This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

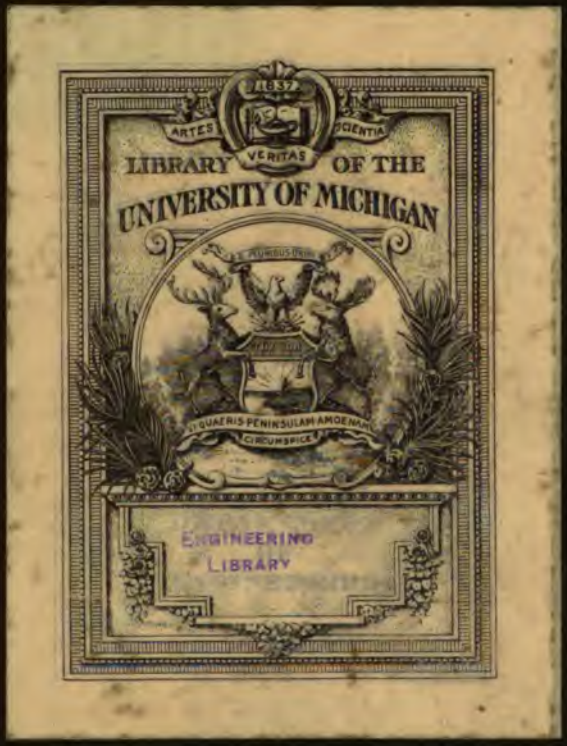
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

B 465311

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

TG
220
.M95
1905

Digitized by Google

Die graphische Statik der Baukonstruktionen

von

Heinrich Müller-Breslau

Dr.-Ing., Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule in Berlin.

Erster Band.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in der Ebene. — Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte; Spannungen in geraden Stäben. — Theorie der statisch bestimmten Träger mit Ausschluß der Untersuchung der Formänderungen.

Vierte, vermehrte Auflage.

Mit 585 Abbildungen im Text und 7 Tafeln.

Stuttgart
Alfred Kröner Verlag
1905.

Digitized by Google

Druck von Grimme & Trömel in Leipzig.

Digitized by Google

Vorwort zur dritten Auflage.

Die vorige Auflage dieses ersten Bandes meiner *Graphischen Statik der Baukonstruktionen* erschien 1887; sie war inzwischen durch zwei unveränderte Neudrucke ergänzt worden und hatte schließlich länger als ein Jahr auf dem Büchermarkte ganz gefehlt, weil die Umarbeitung einiger Abschnitte mehr Zeit in Anspruch genommen hat, als sich vorher übersehen ließ.

In der neuen, dritten Auflage ist der erste, die wichtigsten Sätze über das Kräftepolygon und das Seilpolygon enthaltende Abschnitt ungeändert geblieben, die Abschnitte II und III, die von den Trägheitsmomenten und Zentrifugalmomenten und den Normalspannungen σ in geraden Stäben handeln, sind wesentlich erweitert worden. Besonderer Wert wurde auf Gewinnung einfacher Formeln gelegt, welche die Berechnung der Spannungen σ und die Bestimmung des Kerns ohne Zuhilfenahme der Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente gestatten. Über die Schubspannungen infolge einer durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehenden Querkraft ist nur das nötigste mitgeteilt worden; auf die Drehungsfestigkeit wurde gar nicht eingegangen. In beiden Fällen liegen Aufgaben der Festigkeitslehre vor, die auf eine Integration partieller Differentialgleichungen mit meistens außerordentlich schwierigen Grenzbedingungen führen und deshalb nicht in den Rahmen dieses Buches passen.

Den Hauptinhalt des vorliegenden Bandes bildet die Theorie der statisch bestimmten ebenen Träger, bei deren Ausarbeitung die größte Vollständigkeit und größte Einfachheit angestrebt worden ist. Von der vorigen Auflage bin ich insofern abgewichen, als ich diesmal die allgemeine Theorie des Fachwerks an den Schluß gestellt habe. So einfach die Aufgaben dieser Theorie auch immer sein mögen, sie bieten erfahrungsgemäß dem Anfänger — und an solche wendet sich dieser erste Band — stets Schwierigkeiten, und da schließlich das Endziel dieser allgemeinen Untersuchungen die planmäßige Zurückführung schwierigerer Fälle auf leichtere ist, so erschien es mir am zweckmäßigsten, mit den einfacheren Aufgaben zu beginnen und die um-

14774

Digitized by Google

fangreiche, die Mehrzahl der Anwendungen umfassende Theorie des Dreiecksystems voranzustellen.

Hinsichtlich der Aufgaben über die Berechnung von Eisenbahnbrücken verweise ich besonders auf die während der Drucklegung dieses Buches erschienenen und im Anhange mitgeteilten neuen Belastungsvorschläge und auf das auf Seite 121 gesagte. Auch bemerke ich zu den aus der vorigen Auflage übernommenen Beispielen, daß die ausführliche Theorie der Brückenträger mit Gegendiagonalen noch nicht entbehrt werden kann, trotzdem neuerdings Träger mit steifen Diagonalen bevorzugt werden; allein die Umrechnung der älteren Brücken für die erheblich gestiegene Verkehrsbelastung verlangt ein Eingehen auf die Wirkungsweise der Gegendiagonalen.

Grunewald bei Berlin, den 15. März 1901.

H. Müller-Breslau.

Vorwort zur vierten Auflage.

In der vierten Auflage ist ein kurzer, aber wichtiger Abschnitt über weitgespannte Balkenbrücken hinzugekommen. Der Anhang wurde durch Angaben über das Eigengewicht eiserner Brücken erweitert. Im übrigen konnte ich mich auf die Durchsicht der vorigen Auflage und die Verbesserung der mir in dankenswerter Weise mitgeteilten Druckfehler beschränken.

Auf die vielen Anfragen nach dem Zeitpunkt des Erscheinens der noch ausstehenden Teile dieses Werkes antworte ich, daß die Beteiligung an größeren Konstruktionsaufgaben und andere wissenschaftliche Arbeiten, die meinem Buche zu gute kommen werden, die Vollendung verzögert haben. Ich arbeite aber jetzt an der Fortsetzung und hoffe, die noch fehlenden Teile bald liefern zu können.

Grunewald bei Berlin, im Dezember 1904.

H. Müller-Breslau.

Digitized by Google

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

I. Abschnitt.

Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften. Statische Momente.

§ 1. Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene. Gleichgewichtsbedingungen 3
§ 2. Zerlegung der Kräfte in der Ebene 13
§ 3. Von den statischen Momenten der Kräfte 15
§ 4. Zusammensetzung der Kräfte im Raume 20

II. Abschnitt.

Höhere Momente paralleler, in derselben Ebene wirkender Kräfte. Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte.

§ 5. Höhere Momente paralleler Kräfte 23
§ 6. Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte . . . 26
§ 7. Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten und Zentrifugalmomenten für Achsen, welche durch einen und denselben Punkt gehen 44
§ 8. Die Trägheitsellipse 53

III. Abschnitt.

Spannungen in geraden Stäben.

§ 9. Die Normalspannungen 55
§ 10. Der Kern des Querschnitts 73
§ 11. Druckbelastung außerhalb des Kerns bei Ausschluß von Zugfestigkeit 86
§ 12. Schubspannungen und Hauptspannungen 101

IV. Abschnitt.

Einleitung in die Theorie der ebenen Träger.

§ 13. Allgemeines über die äußeren Kräfte 109
§ 14. Allgemeines über Einflußlinien 115

Digitized by Google

V. Abschnitt.

Querkräfte und Angriffsmomente für den einfachen Balken.

Seite

§ 15. Ständige, unmittelbar wirkende Belastung 123
§ 16. Ständige mittelbare Belastung 126
§ 17. Einflußlinien. Grenzwerte von Q und M bei gleichförmiger ständiger und beweglicher Belastung 128
§ 18. Die veränderliche Belastung besteht aus einem verschiebbaren System von Einzellasten 136
§ 19. Verwertung der Einflußlinien des einfachen Balkens 157

VI. Abschnitt.

Querkräfte und Momente für den Gerberschen Balken.

§ 20. Beliebige ständige Belastung 159
§ 21. Einflußlinien. Belastung durch ein verschiebbares System von Einzellasten 164
§ 22. Gleichmäßige Belastung 172

VII. Abschnitt.

Der vollwandige Bogen mit drei Gelenken.

§ 23. Belastung durch beliebig gerichtete Kräfte 176
§ 24. Belastung durch senkrechte Kräfte 182

VIII. Abschnitt.

Einleitung in die Theorie des ebenen Fachwerks.

§ 25. Erklärungen und Voraussetzungen 208
§ 26. Bestimmung der Spannkräfte im Dreiecknetz nach den Verfahren von *Culmann* und *Ritter* 210
§ 27. Die Kräftepläne *Cremonas* 213
§ 28. Einfluß von Kräften, welche nicht in den Knotenpunkten angreifen . 222
§ 29. Kräftepläne für Polonceau-Träger, in Verbindung mit einigen allgemeineren Untersuchungen 227

IX. Abschnitt.

Der einfache Fachwerkbalken.

§ 30. Die ungünstige Belastungsweise. Einflußlinien 234
§ 31. Spannkräfte in den Gurtungen 243
§ 32. Spannkräfte in den Füllungsstäben 248
§ 33. Das Zimmermannsche Verfahren 261
§ 34. Fachwerkträger mit Gegendiagonalen 278
§ 35. Gleichmäßig belastete Parabelträger mit Gegendiagonalen 291
§ 36. Kräfteplan für einen Parallelträger (Eisenbahnbrücke) 300
§ 37. Kräfteplan für einen Fischbauchträger (Eisenbahnbrücke) 305
§ 38. Kräfteplan für einen Halbparabelträger (Eisenbahnbrücke) und Entwicklung einiger allgemeiner Formeln 309
§ 39. Über die Berechnung von Dachbindern 321

Digitized by Google

X. Abschnitt.

Der Gerbersche Fachwerkbalken.

Seite

§ 40. Einflußlinien 330
§ 41. Kräfteplan für eine Eisenbahnbrücke mit Gerberschen Balken . . . 339
§ 42. Gerberscher Fachwerkbalken mit Gelenkvierecken 354
§ 43. Gerberscher Balken mit Hängegurtung 361

XI. Abschnitt.

Der Fachwerkbogen mit drei Gelenken.

§ 44. Anwendung der Verfahren von Culmann und Ritter 366
§ 45. Belastung durch senkrecht gerichtete Kräfte 371
§ 46. Zahlenbeispiel. Einflußlinien für einen Bogenträger von 80m Stützweite 383

XII. Abschnitt.

Statisch bestimmte Hängebrücken und Gelenkbögen, versteift durch Balken.

§ 47. Hängebrücken, deren Hauptträger aus einfachen Dreiecknetzen bestehen 389
§ 48. Kette, versteift durch einen Balken 404
§ 49. Gelenkbogen, versteift durch einen Balken 422
§ 50. Verwertung der Kettenlinie zur Linienführung der Gurtungen . . . 427

XIII. Abschnitt.

Allgemeine Theorie des statisch bestimmten ebenen Fachwerks.

§ 51. Analytische Untersuchung 438
§ 52. Die kinematische Theorie des Fachwerks 455
§ 53. Aufgaben über mehrteilige Fachwerke 501
§ 54. Balkenbrücken von großer Spannweite 535

Anhang.

I. Neue Belastungsvorschläge für Eisenbahnbrücken 547
II. Neue Belastungsvorschriften für die preußischen Staatsbahnen 549
III. Zahlenbeispiele für die Benutzung der Tabellen 554
IV. Zusammenstellung verschiedener Gewichtsverteilungen für Lokomotiven und Tender 562
V. Eigengewichte eiserner Balkenbrücken für Eisenbahnen 564
VI. Eiserne Straßenbrücken 572

Literatur.

Literatur zu den Abschnitten I, II und III 574
Literatur zu den Abschnitten IV bis XIII 575

Tafel I—VII . . . . . am Schluße des Buches

Digitized by Google

Digitized by Google

Einleitung.

Die graphische Statik lehrt die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte auf geometrischem Wege und entwickelt in gleicher Art die Bedingungen, unter denen sich die auf einen Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewichte befinden. Auch führt sie andere Aufgaben, z. B. die Ermittelung von Schwerpunkten und Trägheitsmomenten, die Bestimmung der Formänderungen fester Körper, auf Aufgaben über Kräfte zurück, wobei sie vielfach an analytische Untersuchungen anknüpft und diese auf zeichnerischem Wege zu Ende führt oder deren Ergebnisse geometrisch deutet.

Die Größe und Lage einer Kraft wird in der graphischen Statik durch die Länge und Lage einer geraden Linie dargestellt. Eine Kraft ist der Lage nach bekannt, sobald ihre Richtung und ein Punkt, durch welchen diese Richtung geht, gegeben ist; ihre unzweideutige Bestimmung erfordert ferner die Hervorhebung des Sinnes, in welchem sie in der angegebenen Richtung wirkt. Dies geschieht am übersichtlichsten durch einen Pfeil, oder, falls die Kraft bei der Beschreibung einer Figur mittels der Zeichen ihres Anfangspunktes und Endpunktes angedeutet werden soll, durch die Aufeinanderfolge dieser Zeichen im Sinne der Kraft. Man sagt: Die Kraft P in Fig. 1 wird durch die Strecke ab dargestellt, weil sie von a nach b wirkt, und die Kraft P in Fig. 2 durch die Strecke ba, weil sie von b nach a wirkt.

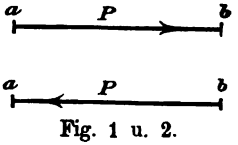


Fig. 1 u. 2.

Die graphische Darstellung der an einem Körper angreifenden Kräfte nennt man einen *Kräfteplan*. Die Aufzeichnung eines solchen setzt die Bildung eines *Kräftemaßstabes* voraus. In der Regel werden

Digitized by Google

wir festsetzen, daß einer Strecke von 1^{mm} Länge die Größe einer Kraft von m Kilogrammen $= \frac{m}{1000}$ Tonnen gleichwertig ist, so daß z. B. in einem im Maßstabe $10^{mm} = 2000^{k} = 2^{t}$ gezeichneten Kräfteplane durch eine Strecke von 62^{mm} Länge eine Kraft von $12{,}4^{t}$ dargestellt wird.

Digitized by Google

I. Abschnitt.

Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften. Statische Momente.

§ 1.

Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene. Gleichgewichtsbedingungen.

1. Zusammensetzung von zwei Kräften. Greifen an einem Punkte a zwei Kräfte P_1 und P_2 an, deren Richtungen und Größen durch die Richtungen und die Längen der Strecken ab und ad dargestellt sind (Fig. 3a), so ist bekanntlich ihre *Mittelkraft* R gleich der Diagonale ac des über ihnen beschriebenen Parallelogrammes $abcd$. Man erhält aber auch R, indem man die beiden gegebenen Kräfte P_1 und P_2 nach Größe, Richtung und Sinn aneinander setzt, entweder in der Reihenfolge P_2, P_1 (Fig. 3b) oder in der Reihenfolge P_1, P_2 (Fig. 3c),

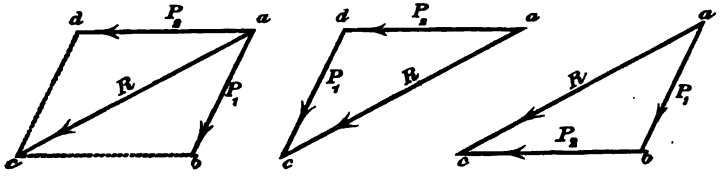


Fig. 3 a, b u. c.

und den Anfangspunkt a des so erhaltenen Kräftezuges mit dessen Endpunkte c durch die Gerade ac verbindet. Die Dreiecke adc und abc nennt man *Kräftedreiecke*.

Umgekehrt läßt sich eine Kraft R mit Hilfe des Kräfteparallelogrammes (bez. eines Kräftedreiecks) in zwei *Seitenkräfte* P_1 und P_2, deren Richtungen gegeben sind, und welche R in demselben Punkte a schneiden, eindeutig zerlegen.

2. Zusammensetzung beliebiger Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte. Fig. 4a und b. Sollen mehrere an demselben Punkte a angreifende Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 zu einer Mittelkraft R vereinigt werden, so setzt man (am zweckmäßigsten in einer besonderen Figur)

Digitized by Google

P_1 und P_2 mittels des Kräftedreiecks abc zu der Mittelkraft R_{1-2} zusammen, hierauf R_{1-2} mit P_3 zur R_{1-3} und diese schließlich mit P_4 zur $R_{1-4} = R$.

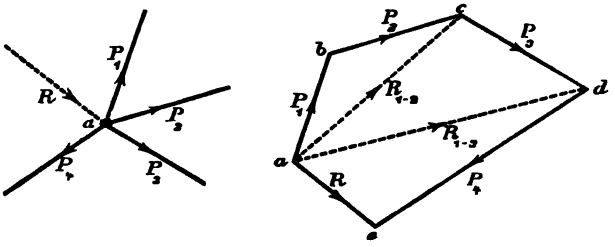


Fig. 4 a u. b.

Zu demselben Ergebnisse gelangt man, wenn man P_1, P_2, P_3, P_4 nach Größe, Richtung und Sinn zu dem Kräftezuge $abcde$ aneinander reiht und hierauf den Anfangspunkt a und den Endpunkt e desselben durch die Gerade $\overline{ae} = R$ verbindet.

Man sagt auch: Die Mittelkraft $\overline{ae} = R$ *unterspannt* den aus den Kräften P_1, P_2, P_3, P_4 gebildeten Kräftezug $abcde$.

Die Reihenfolge, in welcher die Kräfte P miteinander zusammengesetzt werden, ist gleichgültig; denn es wurde vorhin gezeigt, daß man die Mittelkraft zweier Kräfte P_1 und P_2 durch Unterspannen sowohl des Kräftezuges P_2P_1 (Fig. 3b) als auch des Zuges P_1P_2 (Fig. 3c) erhalten kann. Durch wiederholte Vertauschung von zwei aufeinander folgenden Kräften läßt sich aber aus der einen Reihenfolge beliebiger Kräfte jede andere Reihenfolge ableiten.

3. Gleichgewicht von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkte. Lassen sich Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, welche an demselben Punkte a

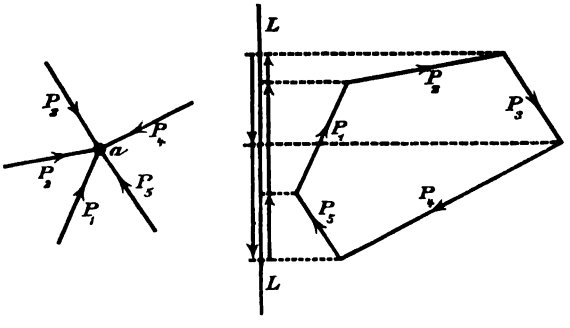


Fig. 5 a u. b.

angreifen (Fig. 5a) nach Größe, Richtung und Sinn zu einem geschlossenen Kräftepolygone (Fig. 5b) aneinanderreihen, so ist ihre

Digitized by Google

Mittelkraft = 0. Es sind dann die Kräfte P miteinander im Gleichgewicht. Projiziert man das Kräftepolygon auf irgend eine Gerade LL und denkt jede der Kräfte P in eine Seitenkraft parallel zu LL und eine lotrecht zu LL zerlegt, so findet man, daß die Summe der nach der Richtung LL gebildeten Seitenkräfte, d. i. die Summe der Projektionen der Kräfte P auf die Gerade LL gleich Null ist.

Hervorzuheben ist, daß ein Kräftepolygon nur dann geschlossen heißt, wenn sich in demselben nie zwei Pfeile begegnen, wenn man also das Polygon, den Pfeilen folgend, ohne Unterbrechung umfahren kann.

Man sagt auch: Das Kräftepolygon in Fig. 5b besitzt einen *stetigen Umfahrungssinn,* während das Kräftepolygon in Fig. 4b durch den Pfeil der Kraft R *unstetig* wird.

Kehrt man in einem geschlossenen Kräftepolygone den Sinn irgend einer Kraft um, so wird diese Kraft zur Mittelkraft aus allen übrigen.

4. Zusammensetzung von Kräften mit beliebigen Angriffspunkten. Wird die Mittelkraft R von Kräften P_1, P_2, P_3, P_4 ..... gesucht, welche nicht an demselben Punkte angreifen, so denke man P_1 und P_2 in ihren Richtungen so weit verschoben, daß ihr Schnittpunkt gemeinsamer Angriffspunkt wird, und setze sie dann zur Kraft R_{1-2} zusammen. Hierauf vereinige man in gleicher Weise R_{1-2} mit P_3 zur R_{1-3}, diese letztere Kraft mit P_4 zur R_{1-4} u. s. f.

Dabei empfiehlt es sich, die Größen und Richtungen der Kräfte R in einer besonderen Figur zu bestimmen.

In Fig. 6 ist die Zusammensetzung der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 auf die beschriebene Weise ausgeführt worden. Nach Aneinanderreihung derselben zu dem stetigen Kräftezuge $abcdef$ ergaben sich (nach Größe und Richtung) die Mittelkräfte

$\overline{ac} = R_{1-2}$; $\overline{ad} = R_{1-3}$;
$\overline{ae} = R_{1-4}$; $\overline{af} = R_{1-5} = R$.

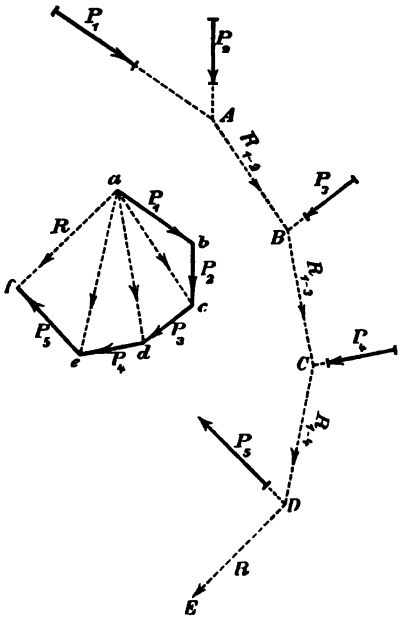


Fig. 6.

Nun wurde durch den Schnittpunkt A von P_1 und P_2 eine Parallele zur R_{1-2} gezogen, welche P_3 in B schneidet, von hier aus eine Parallele zur R_{1-3} bis zu ihrem

Digitized by Google

Schnittpunkt C mit P_4, sodann von C aus eine Parallele zur R_{1-4}, welche P_5 in D trifft, und schließlich die Gerade $DE \| R_{1-5}$. Es liegt dann die R_{1-2} in der Geraden AB, die R_{1-3} in der BC, die R_{1-4} in der CD und die R_{1-5} in der Geraden DE. Das Polygon $ABCDE$ heißt ein *Mittelkraftspolygon* der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Da man die Ordnung, in der die gegebenen Kräfte miteinander zusammengesetzt werden, verschiedenartig wählen kann, ist man im Stande, verschiedene Mittelkraftspolygone zu zeichnen. Die letzten Seiten aller dieser Polygone decken sich; denn die Lage von R_{1-5} ist unabhängig von der Wahl jener Ordnung.

Um dies zu beweisen, genügt es, darzutun, daß die Änderung der Reihenfolge von zwei Kräften P_n und P_{n+1} ohne Einfluß auf die Lage von R ist, weil durch die Wiederholung einer solchen Änderung aus der einen Reihenfolge jede andere abgeleitet werden kann.

Wird die Mittelkraft R' der Kräfte P_1 bis P_{n-1} zuerst mit P_n zur Kraft Q' (Fig. 7) und hierauf mit P_{n+1} zur R'' zusammengesetzt, so ergibt sich das Mittelkraftspolygon ABE, in welchem $AB \| dc$ ist. Vereinigt man hingegen R' zuerst mit P_{n+1} zur Q'' und hierauf Q'' mit P_n zur R'', so muß man die Kraft R' soweit verlängern, bis sie P_{n+1} in C schneidet, von C aus eine Parallele zur Q'' ziehen, welche P_n in D trifft und schließlich von D aus eine Parallele zur R''. Diese fällt aber mit der vorhin gefundenen R'' zusammen, weil in den beiden Vierecken $ABCD$ und $abcd$ fünf entsprechende Seiten einander parallel sind, nämlich $AB \| dc$, $BC \| bc$, $CD \| ba$, $DA \| da$, $AC \| ac$, und infolgedessen auch $DB \| db$ ist.

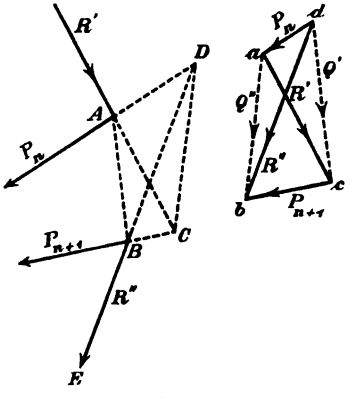


Fig. 7.

Schneiden sich die Kräfte unter sehr spitzen Winkeln, womöglich außerhalb des Zeichenblattes, so ist das beschriebene Verfahren zur Bestimmung von R unzweckmäßig; es wird unbrauchbar, sobald sämtliche Kräfte parallel sind. Es soll deshalb noch ein zweites allgemeineres Verfahren entwickelt und zunächst die Aufgabe gelöst werden:

Gegeben sind die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 8a), welche nicht an demselben Punkte angreifen und auch parallel sein können; gesucht ist die Größe und die Lage derjenigen Kraft R, die zur *Herstellung des Gleichgewichts* hinzugefügt werden muß.

Digitized by Google

Zuerst werden die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 zu dem Kräftezuge *abcde* (Fig. 8b) aneinandergereiht und dieser durch die Gerade *ea* geschlossen. Es ist dann *ea* nach Größe, Richtung und Sinn $= R$. Um die Lage von R in Fig. 8a zu bestimmen, wird die Kraft P_1 durch zwei beliebig gerichtete Kräfte I und II, deren Angriffspunkt A in der Richtung von P_1 willkürlich gewählt werden darf, aufgehoben. Die Größen von I und II werden im Kräfteplane (Fig. 8b) durch Ziehen

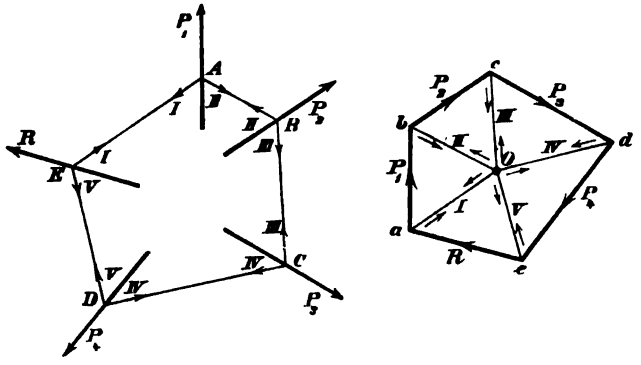


Fig. 8 a u. b.

der Parallelen aO und bO zu den angenommenen Richtungen von I und II erhalten. Ihren Sinn findet man, indem man die Seiten des Kräftedreiecks abO so mit Pfeilen versieht, daß der durch den Pfeil der Kraft P_1 vorgeschriebene Umfahrungssinn ein stetiger ist. Man erhält: Kraft $I =$ Strecke Oa und Kraft $II =$ Strecke bO.

Im Schnittpunkte B der beiden Kräfte II und P_2 wird erstere durch eine entgegengesetzt gerichtete, gleich große Kraft aufgehoben, worauf durch Hinzufügen der durch die Linie cO des Kräfteplanes nach Größe, Richtung und Sinn gegebenen Kraft III am Punkte B Gleichgewicht hergestellt wird. Ebenso wird am Punkte C nach Aufheben von III durch Hinzufügen von $IV = \overline{dO}$ und am Punkte D nach Aufheben von IV durch Hinzufügen von $V = \overline{eO}$ Gleichgewicht erzielt.

Nachdem schließlich noch im Schnittpunkte E von I und V diese Kräfte durch gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte getilgt worden sind, wird durch die Kraft $R = \overline{ea}$ das Gleichgewicht auch an dem Punkte E hergestellt.

Da nun an jedem der Punkte A, B, C, D, E drei im Gleichgewichte befindliche Kräfte angreifen und die Kräfte I, II, III, IV und V sich paarweise aufheben, ist R mit den Kräften P_1, P_2, P_3 und P_4 im Gleichgewichte.

Digitized by Google

Das Polygon $ABCDEA$ kann man als die Mittellinie eines Seiles betrachten, an welchem die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 und R angreifen, und in dessen Seiten die Spannkräfte *(Seilkräfte)* I, II, III, IV, V entstehen. Deshalb nennt man $ABCDEA$ ein *Seilpolygon* oder auch *Gelenkpolygon*. Die erste gebräuchlichere Bezeichnung ist allerdings weniger zutreffend, da, falls die in Fig. 8a angenommenen Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 und R sämtlich umgekehrt werden, in den Polygonseiten Drücke entstehen, und an Stelle des Seiles ein aus druckwiderstandsfähigen Stäben bestehendes Polygon zu denken ist. Die Linien Oa, Ob . . . im Kräfteplane Fig. 8b heißen *Seilstrahlen*. Den Punkt O nennt man den *Pol* und das Lot vom Pole auf irgend eine Kraft die *Polweite* dieser Kraft.

Im Anschluß an diese Benennungen ergibt sich für die Bestimmung der Kraft R die Regel:

> Nach Aufzeichnung des Kräftepolygons $abcdea$, welches die Größe und die Richtung der Kraft R liefert, wähle man einen beliebigen Pol O, ziehe die Seilstrahlen I, II, III . . . und zeichne durch einen beliebigen Punkt (z. B. den Punkt A der Kraft P_1) ein Seilpolygon. Seine Seiten sind parallel den Seilstrahlen, und es müssen sich zwei Seilpolygonseiten stets mit derjenigen Kraft P in einem Punkte schneiden, welche mit den zugeordneten Seilstrahlen ein Dreieck bildet. Durch den Schnittpunkt der ersten und letzten Polygonseite geht die Kraft R.

Die erste und letzte Seilpolygonseite nennen wir in der Folge die *äußersten Seiten für die fragliche Gruppe von Kräften*. So sind z. B. II und IV die beiden äußersten Seiten für die Gruppe (P_2, P_3).

Ist die Aufgabe gestellt, die Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 zu einer *Mittelkraft* zu vereinigen, so hat man nur nötig, die das Gleichgewicht herstellende Kraft R durch eine gleich große, entgegengesetzt wirkende zu ersetzen.

Zur Fig. 6 bemerken wir nachträglich, daß das Mittelkraftspolygon $ABCDE$ als ein Seilpolygon anzusehen ist, dessen Pol mit dem Anfangspunkte a des Kräftezuges $abcdef$ zusammenfällt. Den Begriff *Mittelkraftspolygon* aber erweitern wir noch, indem wir ihn auf jedes Seilpolygon ausdehnen, dessen Pol irgend ein Eckpunkt des Kräftepolygons ist. Die vom Pole aus gezogenen Strahlen sind in diesem Falle Seiten des Kräftepolygons oder die Mittelkräfte der durch sie unterspannten gegebenen Kräfte.

5. Beziehung zwischen zwei Seilpolygonen, die aus verschiedenen Polen zu denselben Kräften gezeichnet werden. Fig. 9a u. 9b. Sind I, II, . . . die vom Pole O aus gezogenen Seilstrahlen und

Digitized by Google

I', II', . . . die zum Pole O' gehörigen, und bringt man die entsprechenden Seilpolygonseiten, nämlich I und I', ferner II und II' u. s. w. miteinander zum Schnitt, so liegen alle diese Schnittpunkte auf einer Geraden, welche der Verbindungslinie OO' der beiden Pole parallel ist. Denn in den beiden Vierecken $ABOO'$ und $abcd$ sind 5 entsprechende Seiten einander parallel, nämlich $ad \parallel AO'$, $bc \parallel BO$, $dc \parallel AB$, $ac \parallel AO$ und $db \parallel O'B$. Es muß mithin auch $ab \parallel O'O$ sein. Ebenso folgt, daß $be \parallel O'O$ und $ia \parallel O'O$ ist, daß also die Punkte $iabe$ auf einer zur OO' parallelen Geraden liegen.

Ein zweiter Beweis ist der folgende. Die Kraft P_2 (Fig. 9b) ist sowohl im Gleichgewichte mit den beiden Kräften $\overline{O'A} = II'$ und

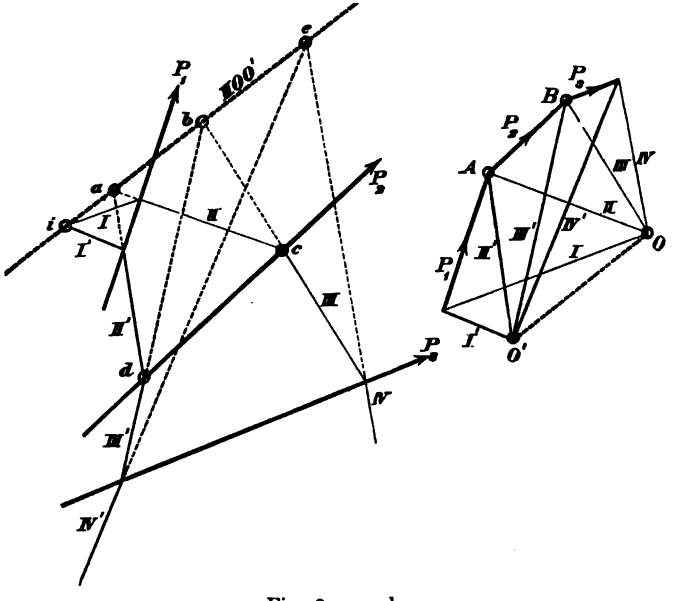


Fig. 9 a u. b.

$\overline{BO'} = III'$, als auch mit den beiden Kräften $\overline{OA} = II$ und $\overline{BO} = III$, und es müssen sich daher die 4 Kräfte $O'A$, BO', $-OA = AO$, $-BO = OB$ das Gleichgewicht halten. Die Mittelkraft aus $\overline{O'A} = II'$ und $\overline{AO} = II$ geht in Fig. 9a durch den Schnittpunkt a der Seilpolygonseiten II' und II, und die Mittelkraft aus $\overline{OB} = III$ und $\overline{BO'} = III'$ geht durch den Punkt b. Beide Mittelkräfte sind parallel zur Geraden OO'; sie müssen sich gegenseitig tilgen, und dies ist nur möglich, wenn die Gerade $ab \parallel OO'$ ist. In gleicher Weise kann man schließen, daß $ia \parallel OO'$ und $be \parallel OO'$ sein muß.

Digitized by Google

6. Eine unendlich ferne, unendlich kleine Kraft als Mittelkraft endlicher Kräfte. Das Kräftepaar. Entspricht den Kräften P_1, P_2, P_3 und P_4 (Fig. 10) ein geschlossenes Kräftepolygon, so ist die Mittelkraft gleich Null. Das mit dem Pole O gezeichnete Seilpolygon $ABCD$ wird sich im allgemeinen nicht schließen. Denkt man dann in den Punkten A, B, C, D die Seilkräfte tätig, so wird Gleichgewicht herrschen, da an jedem dieser Punkte drei miteinander im Gleichgewichte befindliche Kräfte angreifen. Nun heben sich aber von den Seilkräften nur die II, III, IV paarweise auf, so daß die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 nicht für sich allein, sondern mit den beiden Kräften I im

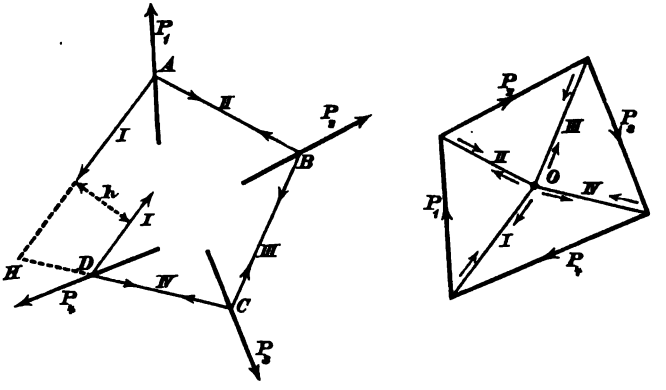


Fig. 10 a u. b.

Gleichgewichte sind. Diese beiden Kräfte schneiden sich auf der unendlich fernen Geraden der Ebene; ihre Mittelkraft ist unendlich klein; ersetzt man diese durch eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft, so erhält man die *unendlich ferne, unendlich kleine Mittelkraft* der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4.

Die Kräfte I in Fig. 10a bilden ein *Kräftepaar;* ihren gegenseitigen Abstand h nennt man den *Arm* und das Produkt

$$M = I \cdot h$$

aus Kraft und Arm das *Moment des Kräftepaares; dasselbe ist unabhängig von der Lage des Poles* und wird deshalb als das Maß des Kräftepaares beziehungsweise der diesem gleich zu achtenden unendlich fernen, unendlich kleinen Kraft angesehen.

Der Beweis für diesen Satz ist folgender. Ist O' ein neuer Pol (Fig. 11), so ist die Gerade, welche den Schnittpunkt E der einander entsprechenden ersten Seilpolygonseiten I und I' mit dem Schnittpunkte F der einander entsprechenden letzten Seiten I und I' verbindet, parallel

Digitized by Google

zur Verbindungslinie OO' der beiden Pole. Hiernach ist bei angenommener Lage der ersten Seite I' des neuen Seilpolygons die Lage der

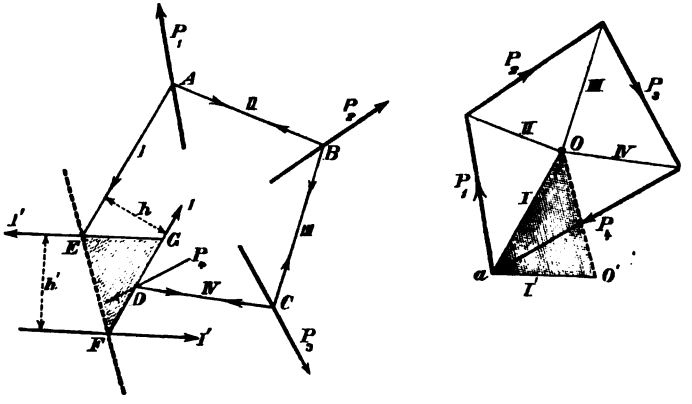


Fig. 11 a u. b.

letzten Seite I' gegeben und mithin auch das Moment $M = I' \cdot h'$ des Paares $(I'\ I')$, dessen Arm gleich h' sein möge. Verlängert man die erste Seite I' bis zu ihrem Schnittpunkte G mit der letzten Seite I, so erhält man das Dreieck GEF, welches dem Dreiecke aOO' ähnlich ist. Bedeuten für das letztere Dreieck: s und s' die Längen der Lote, welche beziehungsweise aus den Ecken O' und O auf die Seiten I und I' gefällt werden, so ergibt sich

$$\frac{h}{h'} = \frac{s}{s'}.$$

Nun ist aber der doppelte Inhalt des Dreiecks $aOO' = I \cdot s = I' \cdot s'$, mithin $\frac{s}{s'} = \frac{I'}{I}$,

und es folgt deshalb $\frac{h}{h'} = \frac{I'}{I}$ und hieraus $I \cdot h = I' \cdot h'$,

was zu beweisen war.

Kehrt man in Fig. 11a den Sinn der beiden Kräfte I' um, so gelangt man zu einem Kräftepaare $(I'\ I')$, welches mit dem Kräftepaare $(I\ I)$ im Gleichgewichte ist; die Momente beider Paare sind entgegengesetzt gleich.

7. Gleichgewichtsbedingungen. Verschiebt man in Fig. 10a die Kraft P_4 parallel mit sich selbst, bis sie durch den Schnittpunkt H der Seilpolygonseiten I und IV geht, so schließt sich das Seilpolygon. Die beiden Seilkräfte I tilgen sich, und die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 sind miteinander im Gleichgewichte. Das *von der Lage des Poles unab-*

Digitized by Google

hängige Moment $I \cdot h$ wird infolge der Verlegung von P_4 gleich Null, und mit ihm verschwindet auch die unendlich ferne, unendlich kleine Kraft, welche vorher zur Herstellung des Gleichgewichtes hinzugefügt werden mußte. Man darf aussprechen:

> Für das Gleichgewicht von Kräften, die in derselben Ebene an verschiedenen Punkten angreifen, ist erforderlich und ausreichend, daß diesen Kräften ein geschlossenes Kräftepolygon und ein geschlossenes Seilpolygon entsprechen oder, was dasselbe heißt, daß sie keine Mittelkraft besitzen.

Bei der zweiten Fassung der Gleichgewichtsbedingung ist zu beachten, daß die Kräfte auch keine unendlich ferne, unendlich kleine Mittelkraft haben dürfen.

8. Parallele Kräfte. Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche. Die Anwendung des Seilpolygons erweist sich namentlich als vorteilhaft, wenn die Mittelkraft *paralleler Kräfte* P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 12b) bestimmt werden soll. Der Kräftezug ist hier eine Gerade (Fig. 12a), O ist der beliebig gewählte Pol. Durch den Schnittpunkt der beiden

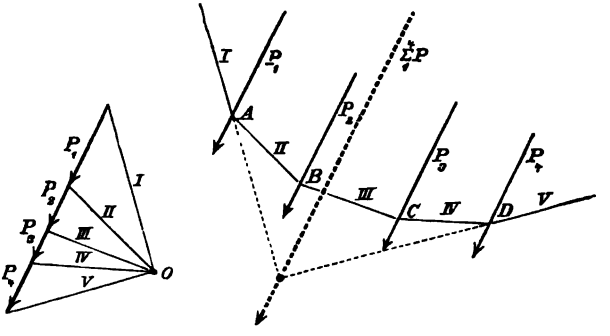


Fig. 12 a u. b.

äußersten Seilpolygonseiten I und V geht

$$R = P_1 = P_2 + P_3 + P_4 = \sum_1^4 P.$$

Es kann auch das Seilpolygon zur graphischen Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche, welche sich in einzelne Teile mit gegebenen Schwerpunkten zerlegen läßt, benutzt werden.

Um z. B. den Schwerpunkt der in Figur 13 dargestellten Fläche (welche etwa den Querschnitt eines eisernen Trägers bedeuten möge) zu finden, fasse man die Inhalte F_1, F_2, F_3 der 3 Rechtecke, aus denen die Fläche besteht, als parallele Kräfte auf, welche einmal in der Richtung AB, dann in der Richtung $A'B'$ wirken. Hierauf bestimme man für diese beiden Fälle die Lage der Mittelkraft ΣF.

Digitized by Google

Man findet auf diese Weise zwei Schwerachsen S und S', deren Schnittpunkt der gesuchte Schwerpunkt ist. Die Richtungen AB und $A'B'$ sind willkürlich.

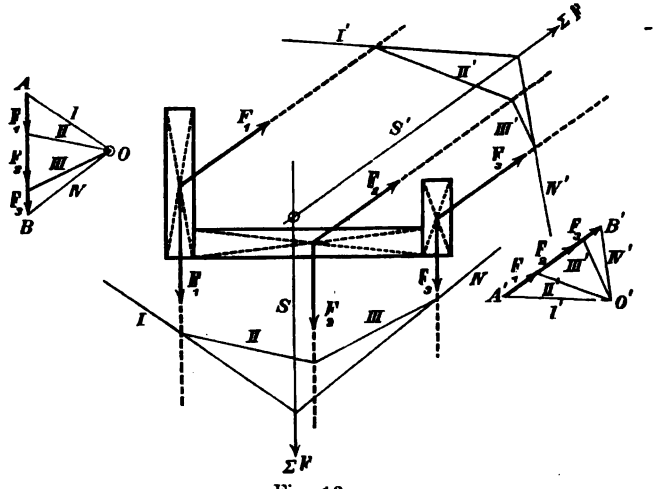


Fig. 13.

Da beim Zeichnen der Kräftezüge in Fig. 13 die Flächeninhalte der Rechtecke durch Linien dargestellt werden, welche sich zueinander verhalten wie $F_1 : F_2 : F_3$, so empfiehlt es sich, die drei Rechtecke in solche von gleicher, beliebig gewählter Grundlinie zu verwandeln, deren Höhen dann den Inhalten F_1, F_2, F_3 proportional sind.

Um z. B. das Rechteck $ABCD$, Fig. 14, in ein anderes zu verwandeln, dessen eine Seite $= DE$ ist, zieht man die Gerade CE und hierauf $AG \parallel EC$. Es ist dann DG die zweite Seite des Rechtecks, weil $ED : CD = AD : GD$, mithin $ED \cdot GD = CD \cdot AD$.

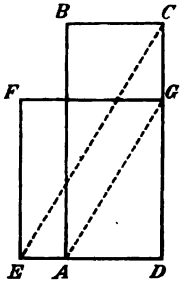


Fig. 14.

Wird der Schwerpunkt einer krummlinigen Figur gesucht, so ist diese in Streifen zu zerlegen, welche, wenn möglich, gleiche Breite erhalten und so schmal sein müssen, daß sie mit genügender Genauigkeit als Rechtecke, Trapeze oder Dreiecke betrachtet werden dürfen.

§ 2.

Zerlegung der Kräfte in der Ebene.

9. Die Zerlegung einer Kraft $R = \overline{ac}$ (Fig. 3a) in zwei Seitenkräfte, deren gegebene Richtungen die R in demselben Punkte a schneiden, erfolgt mit Hilfe des Parallelogramms der Kräfte. Vergl. No. 1.

Digitized by Google

Die eindeutige Zerlegung von R in mehr als zwei, die Kraft R in demselben Punkte treffende Seitenkräfte ist nicht möglich; vielmehr läßt diese Aufgabe unendlich viele Lösungen zu.

10. Um P in zwei ihm parallele Seitenkräfte A und B (Fig. 15) zu zerlegen, verbinde man die drei Kräfte durch ein beliebiges Seilpolygon, dessen Seiten I, II und III sein mögen. Hierauf ziehe man

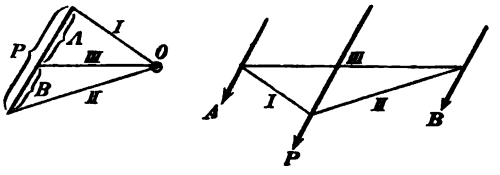


Fig. 15 a u. b.

durch die Endpunkte der Kraft P Parallelen zu I und II, um im Schnittpunkte O derselben den Pol zu finden. Eine durch O zur Seilpolygonseite III gezogene Parallele zerlegt P in A und B. Den Beweis zu führen, vereinige man A und B mit Hilfe des dem Pole O entsprechenden Seilpolygons zu einer Mittelkraft. Man findet dann, daß diese $= A + B = P$ ist und durch den Schnittpunkt der beiden äußersten Seilpolygonseiten I und II geht. Vergl. No. 8.

11. In gleicher Weise läßt sich jetzt die für die Folge wichtige Aufgabe lösen, zwei der Lage nach gegebene parallele Kräfte A und B (Fig. 16) zu finden, welche den ihnen parallelen Kräften P_1, P_2, P_3 und P_4 das Gleichgewicht halten.

Die Kräfte P werden in Fig. 16a aneinander gereiht; hierauf wird der Pol O gewählt und ein Seilpolygon gezeichnet, dessen äußerste Seiten I und V (durch deren Schnittpunkt die Mittelkraft $R = \Sigma P$ geht)

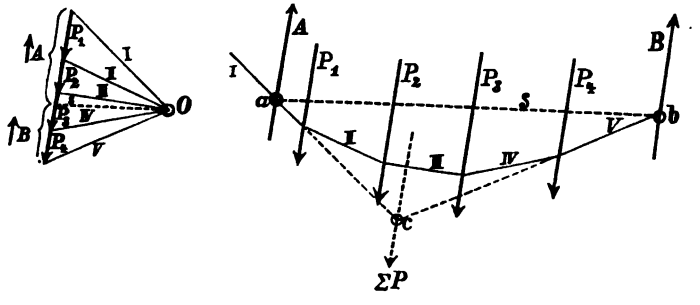


Fig. 16 a u. b.

die Richtungen von A und B beziehungsweise in a und b schneiden. Nachdem das Seilpolygon durch die Verbindungslinie s der Punkte a und b geschlossen worden ist, wird durch den Pol O zu s eine Parallele

Digitized by Google

gezogen. Diese zerlegt die Kraft $R = \Sigma P$ in A und B. Der obere Teil ist gleich A; denn diese Kraft ist im Punkte a mit den Seilkräften I und s im Gleichgewichte, muß also mit den Seilstrahlen I und s ein Dreieck bilden, und ebenso folgt, daß B mit den Strahlen s und V ein Dreieck bildet.

12. Sollen (Fig. 17) drei nicht durch denselben Punkt gehende, der Lage nach bekannte Kräfte X, Y und Z gefunden werden, welche

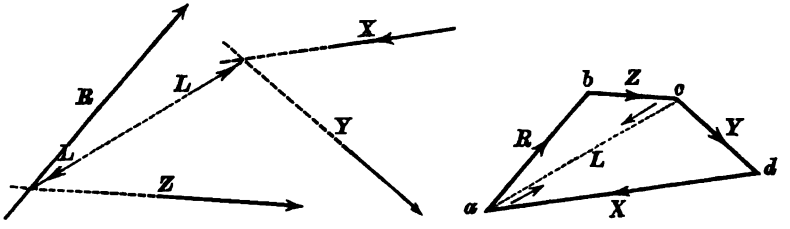


Fig. 17 a u. b.

einer gegebenen Kraft R das Gleichgewicht halten, so bringe man nach Belieben je zwei der vier Kräfte R, X, Y und Z miteinander zum Schnitt, z. B. R und Z, ferner X und Y, und addiere, mit der Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte zusammenfallend, zwei sich aufhebende Kräfte L. Nun bestimme man L und Z aus der Bedingung, daß sich die Kräfte R, L und Z am Schnittpunkte $[RZ]$ das Gleichgewicht halten, daß ihnen also ein geschlossenes Dreieck *abca* Fig. 17b entsprechen muß und hierauf X und Y aus der Bedingung, daß diese beiden Kräfte am Punkte $[XY]$ mit der nunmehr gegebenen L im Gleichgewichte sind.

Ist die Aufgabe gestellt, eine gegebene Kraft R in drei der Lage nach bekannte Kräfte X, Y und Z, welche nicht durch denselben Punkt gehen, zu *zerlegen*, so hat man nur nötig, die vorhin (Fig. 17b) gefundenen Kräfte X, Y, Z durch gleich große aber entgegengesetzt wirkende zu ersetzen.

Die eindeutige Zerlegung einer Kraft nach vier oder mehr Richtungen, die mit ihr in derselben Ebene liegen, ist unmöglich. Es besitzt diese Aufgabe unendlich viele Lösungen.

§ 3.

Von den statischen Momenten der Kräfte.

13. Begriffe. Unter dem *statischen Momente* M einer Kraft P in Bezug auf den *Drehpunkt (Momentenpunkt* oder *Momentenpol)* C versteht man das aus P und seinem Abstande e von C gebildete Produkt; es ist also $M = Pe$.

Digitized by Google

Geometrisch erklärt ist das Moment M gleich dem doppelten Inhalte des Dreiecks ABC, Fig. 18, dessen Grundlinie die Kraft P, und dessen Spitze der Drehpunkt C ist. Der Sinn dieses Dreiecks wird durch den Sinn der Kraft P bestimmt. Die Momente der Kräfte P und P' in Fig. 18 haben also entgegengesetzten Sinn. Das Moment $M = Pe$ heißt ein rechts drehendes (d. i. im Sinne des Uhrzeigers drehendes); es wird positiv angenommen, und im Gegensatze hierzu ist der analytische Ausdruck für das Moment von P'

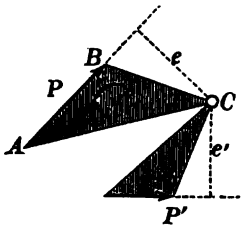


Fig. 18.

$$M' = -P'e'.$$

14. Lehrsatz: *Die Summe der Momente beliebig vieler in derselben Ebene gelegener Kräfte, bezogen auf irgend einen Punkt dieser Ebene, ist gleich dem Momente ihrer Mittelkraft in Bezug auf denselben Punkt.*

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir zunächst die beiden Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 19), deren Mittelkraft $= R$ sein möge, verbinden den Punkt A, in welchem sie sich schneiden, mit dem Drehpunkte C durch eine Gerade und projizieren die Kräfte P_1, P_2, R auf die zur AC Senkrechte CF. Sind die Projektionen jener Kräfte beziehungsweise: $\overline{CE} = P'_1$; $\overline{EF} = P'_2$; $\overline{CF} = R'$, so ist das Moment der Kraft P_1

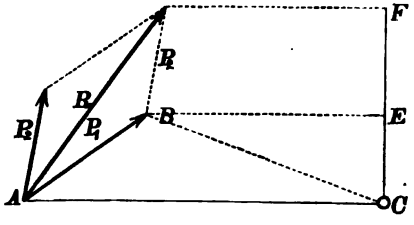


Fig. 19.

$$M = 2 \cdot \Delta ABC = \overline{AC} \cdot P'_1,$$

das Moment von P_2

$$M_2 = \overline{AC} \cdot P'_2$$

und dasjenige von R

$$M = \overline{AC} \cdot R'.$$

Da nun $R' = P'_1 + P'_2$ ist, so folgt

$$M = M_1 + M_2, \text{ w. z. b. w.}$$

Um den Satz für zerstreut in der Ebene wirkende Kräfte, z. B. P_1, P_2, P_3, P_4 Fig. 20*) zu beweisen, setze man dieselben mittels eines Seilpolygones zu ihrer Mittelkraft R zusammen und denke in den Endpunkten des Seilpolygons die sich paarweise aufhebenden Seilkräfte

*) Vergl. auch Fig. 21.

Digitized by Google

tätig; sie wurden in Fig. 20 mit I, I', II, II', III, III' ..... bezeichnet, wobei $I = I'$; $II = II'$; $III = III'$ u. s. w.

Da nun am Punkte A die drei Kräfte II, I' und P_1 miteinander im Gleichgewicht sind, so ist die der Kraft II entgegengesetzt gleiche II' die Mittelkraft aus den Kräften I' und P_1, und ihr Moment ist deshalb gleich der Summe der Momente von I' und P_1. Bezeichnet man also ganz allgemein das Moment einer Kraft Q mit M_Q, so erhält man

$$M_{II'} = M_{I'} + M_{P_1}$$

und ebenso ergibt sich

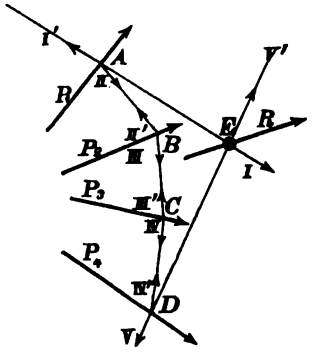


Fig. 20.

$$M_{III'} = M_{II'} + M_{P_2}$$
$$M_{IV'} = M_{III'} + M_{P_3}$$
$$M_{V'} = M_{IV'} + M_{P_4} = M_{I'} + M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + M_{P_4}.$$

Da nun R die Mittelkraft aus V' und I ist, so folgt noch

$$M_R = M_I + M_{V'} \text{ d. i.}$$
$$M_R = M_I + M_{I'} + M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + M_{P_4},$$

und in der letzten Gleichung tilgen sich auf der rechten Seite die entgegengesetzt gleichen Momente der entgegengesetzt gleichen Kräfte I und I'. Es ist deshalb

$$M_R = M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + M_{P_4},$$

was zu beweisen war.

Ganz ebenso kann der Beweis für beliebig viele Kräfte geführt werden.

15. Bestimmung des statischen Momentes beliebig vieler in derselben Ebene wirkender Kräfte. Um das Moment der Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 in Bezug auf den Drehpunkt C zu ermitteln, wird man (Fig. 21) zunächst die Mittelkraft R aufsuchen, indem man den aus P_1, P_2, P_3 und P_4 gebildeten Kräftezug durch die Linie $\overline{LN} = R$ unterspannt und diese Linie mit einem Pfeile versieht, welcher den Umfahrungssinn des Kräftepolygons unstetig macht. Nun wählt man den beliebigen Pol O, zeichnet das Seilpolygon und findet in dem Schnittpunkte E der beiden äußersten Seilpolygonseiten einen Punkt der Kraft R. Jetzt kann man $M = Rr$ berechnen oder auch konstruieren. Dazu schreibt man $M = \frac{Rr}{1}$ und faßt M als vierte Proportionale zu den Größen R, r und 1 auf.

Der Wert M läßt sich aber noch in einer anderen, für die Folge sehr vorteilhaften Form darstellen. Zieht man durch den Drehpunkt C

Digitized by Google

zu R eine Parallele, welche die Seilpolygonseiten I und V in J und F schneidet, und setzt $\overline{FJ} = y$, so folgt aus der Ähnlichkeit der beiden

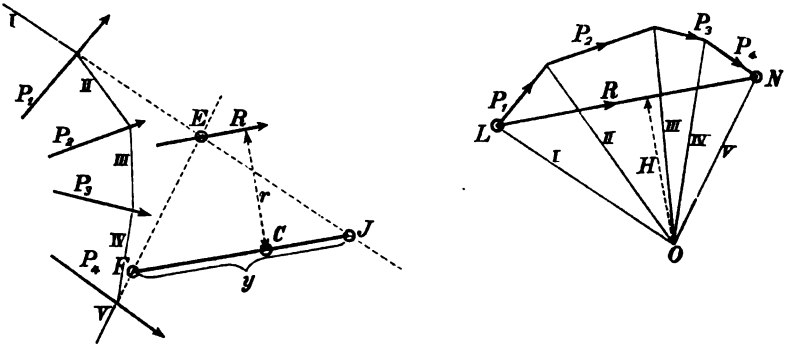


Fig. 21 a u. b.

Dreiecke EFJ und OLN (deren Seiten beziehungsweise parallel sind)

$$r : y = H : R,$$

wobei H die Polweite der Kraft R bedeutet. Es ist also $Hy = Rr$, mithin

$$M = Hy,$$

und es ergibt sich der Satz:

Das statische Moment beliebig vieler Kräfte in der Ebene ist gleich dem Produkte aus der Polweite ihrer Mittelkraft R und aus der Strecke, welche von den äußersten Seilpolygonseiten auf einer durch den Drehpunkt C zu R gezogenen Parallelen abgeschnitten wird.

Über das Vorzeichen des Momentes entscheidet sein Drehungssinn. Das Moment der Kraft R in Fig. 21a ist rechtsdrehend, also positiv. Je näher C an R rückt, desto kleiner wird y und desto kleiner auch M. Fällt C mit R zusammen, so wird $y = 0$. Liegt C oberhalb R, so ist y negativ zu nehmen; man erhält dann ein negatives M.

Die letztbeschriebene Darstellungsweise des Momentes ist deshalb vorteilhaft, weil der Pol, dessen Lage willkürlich angenommen werden darf, so gewählt werden kann, daß die Polweite H durch eine runde Zahl ausgedrückt wird. Nimmt man $H = 1$, so folgt

$$M = y.$$

In dem Produkte Rr ist die Größe R in Kräfteeinheiten (z. B. in Kilogrammen) und r in Längeneinheiten (z. B. in Metern) auszudrücken. Hingegen ist es bei der Berechnung von Hy gleichgültig, ob H mit dem Kräftemaßstabe und y mit dem Längenmaßstabe gemessen wird, oder umgekehrt.

Digitized by Google

Wir werden in der Folge unter H (falls nicht das Gegenteil besonders hervorgehoben wird) eine Kraft verstehen.

16. Parallele Kräfte in der Ebene. Der in No. 15 ausgesprochene Satz findet namentlich Anwendung, wenn es sich um die Bestimmung des Momentes paralleler Kräfte handelt.

Ist z. B. das Moment der parallelen Kräfte A, P_1 und P_2 (Fig. 22) für den Drehpunkt C gesucht, so werden die Kräfte in der Reihenfolge A, P_1, P_2 aneinandergesetzt und von dem beliebig gewählten Pole aus die Strahlen s, I, II, III gezogen. Der Strahl s geht nach dem Anfangspunkte und der Strahl III nach dem Endpunkte des Kräftezuges; mithin sind in Figur 22a, in welcher das Seilpolygon dargestellt

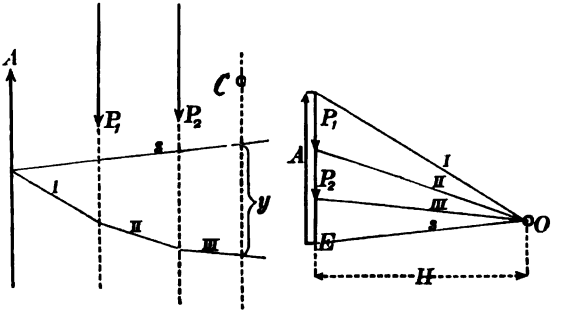


Fig. 22 a u. b.

ist, die Seiten s und III die äußersten; sie schneiden auf der durch C zur Mittelkraft $A - P_1 - P_2$ parallel gezogenen Geraden die Strecke y ab, welche mit der Polweite jener Kraft, d. i. mit dem vom Pole auf den Kräftezug gefällten Lote H, multipliziert das Moment liefert.

Das Moment $M = Hy$ ist positiv; denn es wirkt, wegen $A > P_1 + P_2$, die Mittelkraft $R = A - P_1 - P_2$ in demselben Sinne wie A, also aufwärts, und es liegt außerdem R links vom Drehpunkte C, weil es durch den Schnittpunkt der nach links konvergierenden Seilpolygonseiten III und s geht. Daraus folgt aber, daß das Moment von R ein rechtsdrehendes ist.

17. Eine andere für die Folge sehr wichtige Aufgabe lautet: Gegeben sind die parallelen Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, gesucht wird ihr Moment M für den Drehpunkt C, ferner das Moment M' der Kräfte P_1, P_2, P_3 für den Drehpunkt C'. Fig. 23.

Die Kräfte werden in der Reihenfolge P_6, P_5 ... P_1 (Fig. 23b) aneinandergesetzt, und der Pol wird in beliebiger Weite H vom Kräftezuge so gewählt, daß der Seilstrahl I senkrecht zur Richtung der Kräfte P

Digitized by Google

ist. Hierauf wird (Fig. 23a) das Seilpolygon gezeichnet und die Seite I desselben verlängert. Zieht man jetzt durch C eine Parallele zur Mittelkraft $\sum_1^6 P$, und mißt die Strecke y, welche auf jener Parallelen durch die äußersten Polygonseiten I und VII abgeschnitten wird, so erhält

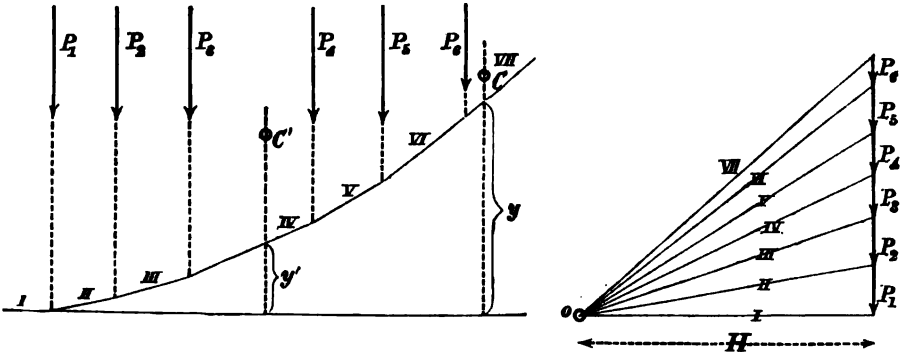


Fig. 23 a u. b.

man $M_c = -Hy$. Dieses Moment ist negativ, weil alle Kräfte links um C drehen. Ebenso findet man für den Drehpunkt C' das Moment der Kräfte P_1, P_2, P_3,

$$M_{c'} = -Hy',$$

denn I und IV sind die äußersten Seilpolygonseiten in Bezug auf die Gruppe P_1, P_2, P_3. Man kann hiernach aussprechen:

Irgend eine Ordinate des Seilpolygons paralleler Kräfte in Fig. 23a, bezogen auf die zur Kraftrichtung senkrechte Polygonseite I als Abscissenachse, ist dem Momente proportional, welches die vor der Ordinate gelegenen Kräfte in Bezug auf irgend einen auf der Ordinate angenommenen Drehpunkt ausüben.

§ 4.

Zusammensetzung der Kräfte im Raume.*)

18. Statische Momente und Mittelkraft paralleler Kräfte. Werden parallele Kräfte P_1, P_2, P_3 . . . . . durch eine zu ihrer Richtung senkrechte Ebene E in den Punkten A_1, A_2, A_3 . . . . . .

*) Eine eingehendere Theorie der *Kräfte im Raume* findet sich im dritten Bande dieses Buches.

Digitized by Google

(Fig. 24) geschnitten, und sind x_m, y_m (wo m eine beliebige Ordnungsziffer) die Koordinaten von A_m bezüglich eines in der Ebene E an-

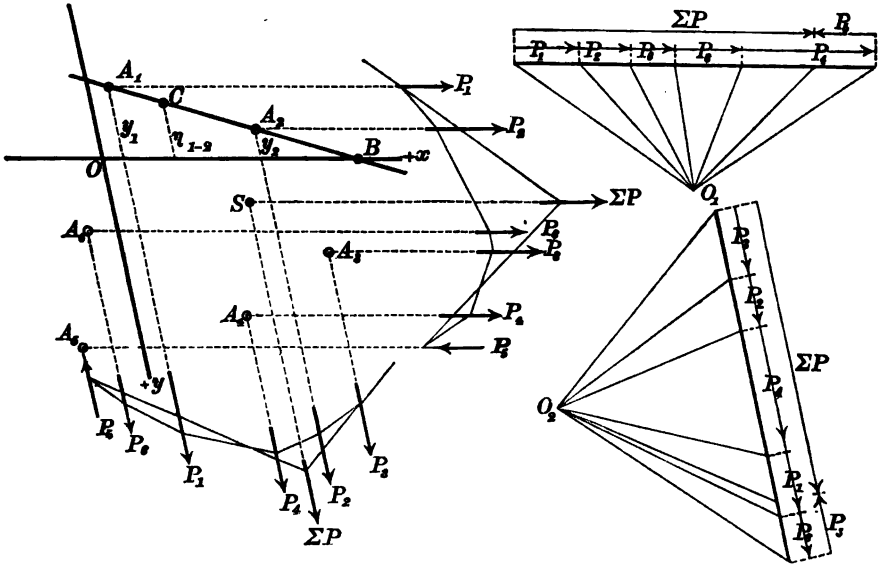


Fig. 24.

genommenen, im allgemeinen schiefwinkligen Achsenkreuzes, so nennt man die Produkte $P_m x_m$ und $P_m y_m$ die statischen Momente der Kraft P_m in Bezug auf die Achsen y und x.

Sind weiter ξ und η die Koordinaten des Punktes S, in welchem die Ebene E von der Mittelkraft $R = P_1 + P_2 + \ldots = \Sigma P$ geschnitten wird, so läßt sich nachweisen, daß

$$(1) \quad R\eta = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \ldots = \Sigma Py \text{ und}$$
$$(2) \quad R\xi = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \ldots = \Sigma Px$$

ist, daß also, bezogen auf irgend eine Achse, das Moment der Mittelkraft R gleich ist der Summe der Momente aller Kräfte P.

Vereinigt man nämlich P_1 und P_2 in einer durch diese beiden Kräfte gelegten Ebene E' zur Mittelkraft R_{1-2}, so ist nach No. 14 das Moment von R_{1-2} in Bezug auf den Punkt B, in welchem die Ebene E' die x-Achse schneidet, gleich der Summe der auf denselben Drehpunkt bezogenen Momente der Kräfte P_1 und P_2. Trifft also R_{1-2} die Ebene E im Punkte C, so ist

$$R_{1-2}\overline{CB} = P_1\overline{A_1B} + P_2\overline{A_2B},$$

Digitized by Google

und hieraus folgt, wenn die Ordinate von C mit η_{1-2} bezeichnet wird,

$$R_{1-2}\eta_{1-2} = P_1 y_1 + P_2 y_2,$$

denn es verhält sich

$$\eta_{1-2} : y_1 : y_2 = \overline{CB} : \overline{A_1 B} : \overline{A_2 B}.$$

Indem man jetzt R_{1-2} mit P_3 zur R_{1-3} zusammensetzt, sodann R_{1-3} mit P_4 zur R_{1-4} u. s. f., findet man

$$R_{1-3}\eta_{1-3} = R_{1-2}\eta_{1-2} + P_3 y_3 = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3,$$
$$R_{1-4}\eta_{1-4} = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und gelangt schließlich zur Gleichung (1) und auf demselben Wege zur Gleichung (2).

Aus (1) und (2) ergeben sich für die Koordinaten des Punktes S die Werte

$$(3) \quad \eta = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P} \text{ und } \xi = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}.$$

Um die Lage des Punktes S auf graphischem Wege zu finden, nehme man die Kräfte P in der Ebene E wirkend an, zuerst parallel zur x-Achse, hierauf parallel zur y-Achse und bestimme mit Hilfe von Seilpolygonen (nach No. 8) die Lagen ihrer Mittelkräfte ΣP, deren Schnittpunkt der gesuchte Punkt S ist.

Beim Zeichnen der Kräftezüge ist auf das Vorzeichen der P zu achten. Es empfiehlt sich, die positiven P im Sinne der positiven Koordinatenachsen aufzutragen. Ist also beispielsweise für den in Fig. 24 dargestellten Fall die Ebene E wagerecht und die Kraftrichtung im Sinne der Schwere die positive, so ist die im Sinne von $(-x)$ bezieh. $(-y)$ gezeichnete Kraft P_5 von unten nach oben wirkend.

19. Allgemeine Zusammensetzung der Kräfte im Raume. Um beliebig gerichtete, im Raume zerstreute Kräfte zusammenzusetzen, bestimme man den Durchschnittspunkt A jeder Kraft P mit einer willkürlich angenommenen Ebene E, verschiebe die Kraft P in ihrer Richtung bis zum Punkte A und zerlege sie dort in zwei Seitenkräfte, deren eine in der Ebene E liegt, während die andere senkrecht hierzu ist. Sodann vereinige man alle zur E senkrechten Kräfte mit Hilfe des in No. 18 gelehrten Verfahrens zu ihrer Mittelkraft N und alle in der Ebene E gelegenen Kräfte nach § 1 zu ihrer Mittelkraft Q.

Schneiden sich N und Q, so können sie zu einer Kraft R vereinigt werden; im Gegenfalle aber lassen sie sich nicht weiter zusammensetzen, und es ist dann, wegen der willkürlichen Lage der angenommenen Ebene E, möglich, die gegebenen Kräfte auf unendlich viele verschiedene Weisen durch zwei Kräfte zu ersetzen.

Digitized by Google

Soll eine zur Ebene E parallele Kraft P auf die angegebene Art und ohne Benutzung der unendlich fernen Geraden jener Ebene zerlegt werden, so füge man zwei sich aufhebende, zur Ebene E senkrechte Kräfte P', welche P schneiden, hinzu, setze P mit der einen zur Mittelkraft P'' zusammen, bringe die P'' mit der Ebene E zum Schnitt und zerlege sie dort wieder in P und P'. Fig. 25.

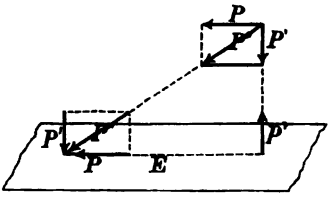


Fig. 25.

II. Abschnitt.

Höhere Momente paralleler, in derselben Ebene wirkender Kräfte. Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte.

§ 5.

Höhere Momente paralleler Kräfte.

20. Bestimmung höherer Momente mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens. Sind P_1, P_2, P_3 . . . . (Fig. 26) parallele, in ein und derselben Ebene (E) gelegene Kräfte und x_1, x_2, x_3 . . . . ihre in irgend einer Richtung gemessenen Abstände von einer ebenfalls in der Ebene E gelegenen Geraden LL, so nennt man die Summe

$$P_1 x_1^n + P_2 x_2^n + P_3 x_3^n + \ldots . = \Sigma P x^n$$

das *Moment n^{ter} Ordnung der Kräfte P in Bezug auf die Achse LL.*

Im Falle $n = 1$ heißt dieses Moment auch das *statische Moment* der Kräfte P (vergl. § 3) und im Falle $n = 2$ das *Trägheitsmoment;* das letztere werden wir in der Regel mit J bezeichnen.

Kennt man für irgend eine Kraft P den Wert Px^{n-1}, so findet man $Px^n = (Px^{n-1})\,x$ als das Moment erster Ordnung der Größe Px^{n-1} in Bezug auf die Achse LL, und es leuchtet ein, daß man, um ΣPx^n zu finden, nur nötig hat, der Reihe nach die statischen Momente

Digitized by Google

$$\Sigma Px,\ \Sigma(Px)x,\ \Sigma(Px^2)x \ldots\ldots \Sigma(Px^{n-1})x$$

darzustellen.

Ist nun in Fig. 26: FN das Kräftepolygon und $ABC\ldots$ das aus dem beliebigen Pole O gezeichnete Seilpolygon, dessen Seiten die Achse LL in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 schneiden mögen, so sind die Dreiecke

$$1A2,\ 2B3,\ 3C4\ldots\ldots,$$

welche die Achse LL mit je zwei aufeinander folgenden Seiten des

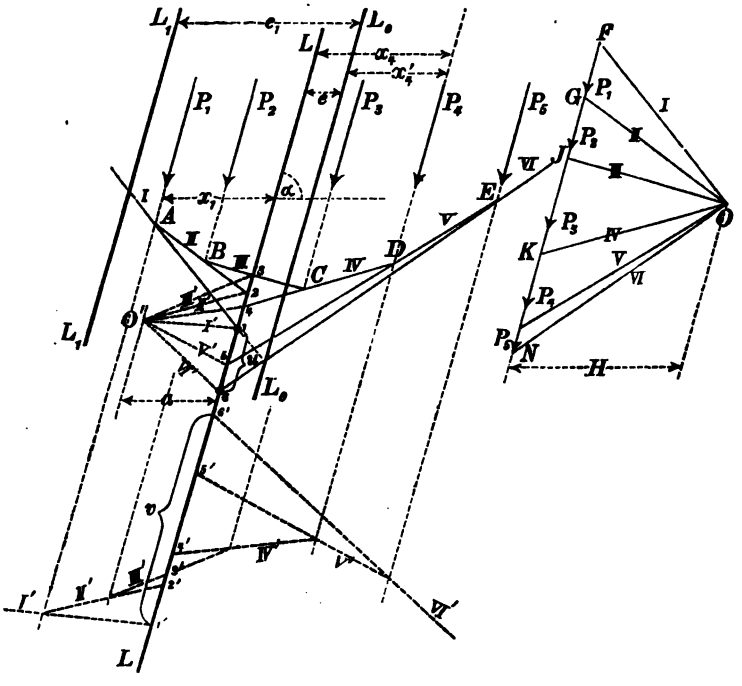


Fig. 26.

Seilpolygons bildet, den ihnen entsprechenden Kräftedreiecken

$$FOG,\ GOJ,\ JOK\ldots\ldots$$

ähnlich, und es folgt, wenn H die in der Richtung x gemessene Polweite ist,

$$x_1 : \overline{12} = H : P_1;\ x_2 : \overline{23} = H : P_2;\ \text{u. s. w.}$$

und hieraus

$$P_1 x_1 = H\overline{12};\ P_2 x_2 = H\overline{23}\ \text{u. s. w.},$$

mithin

$$\Sigma Px = H(\overline{12} + \overline{23} + \overline{34}\ldots.),$$

Digitized by Google

wobei die einzelnen Strecken: $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ . . . . . *mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen, welche bei im gleichen (positiven) Sinne wirkenden Kräften mit den Vorzeichen der entsprechenden* x *übereinstimmen, zu addieren sind.*

Schneiden nun die äußersten Seiten des Seilpolygons auf der Achse LL die Strecke $\overline{16} = u$ ab, so ist, ohne Vorzeichen,

$$\Sigma Px = Hu.$$

Für den in Fig. 26 dargestellten Fall, in welchem die x rechts von LL positiv angenommen wurden, ergibt sich ΣPx positiv, weil die Summe der positiven Abschnitte $\overline{34}$, $\overline{45}$, $\overline{56}$ größer ist als die Summe der negativen Abschnitte $\overline{12}$, $\overline{23}$.

Betrachtet man jetzt die Abschnitte $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ . . . . . als Kräfte, die in den Richtungslinien der Kräfte P_1, P_2, P_3 . . . . wirken, zeichnet zu ihnen aus dem beliebig gewählten Pole O' das Seilpolygon I' II' III' . . ., dessen Seiten die Achse LL in den Punkten $1'$ $2'$ $3'$ . . . . . schneiden, und setzt die der Richtung der x parallele zweite Polweite $= a$, so findet man, auf gleiche Weise wie vorhin

$$x_1 : \overline{1'2'} = a : \overline{12};\ x_2 : \overline{2'3'} = a : \overline{23};\ \text{u. s. w.,}$$

hieraus $\left(\text{wegen}\ \ \overline{12} = \frac{P_1 x_1}{H};\ \ 23 = \frac{P_2 x_2}{H};\ \ldots.\right)$

$$P_1 x_1^2 = Ha\,\overline{1'2'};\ P_2 x_2^2 = Ha\,\overline{2'3'};\ \text{u. s. w.}$$

und schließlich

$$J = \Sigma Px^2 = Ha(\overline{1'2'} + \overline{2'3'} + \overline{3'4'} + \ldots.) = Hav,$$

wo v die Strecke bedeutet, welche die äußersten Seiten des zweiten Seilpolygons auf der Achse LL abschneiden und welche stets positiv ist, sobald alle Kräfte im gleichen (positiven) Sinne wirken. Wenn H mit dem Kräftemaßstabe gemessen wird, stellen a und v Längen vor.

Es ist nun leicht einzusehen, wie man ein Moment beliebiger Ordnung zu bestimmen vermag. Wird ΣPx^3 gesucht, so faßt man die Abschnitte $\overline{1'2'}$, $\overline{2'3'}$, $\overline{3'4'}$ . . . (mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen) als parallele an die Stelle der entsprechenden P tretende Kräfte auf, zeichnet zu ihnen mit der Polweite b ein Seilpolygon und bestimmt die Strecke w, welche dessen äußerste Seiten auf der LL abschneiden. Man findet (ohne Vorzeichen)

$$\Sigma Px^3 = Habw.$$

Um ΣPx^n zu finden, sind n Seilpolygone zu zeichnen. Alle Polweiten sind in der Richtung der x zu messen.

21. Bestimmung von J nach dem Verfahren von Mohr. Die Statik der Bauwerke hat es außer mit statischen Momenten hauptsächlich mit Trägheitsmomenten zu tun. Die Ermittelung der letzteren läßt sich auch mit Hilfe des ersten Seilpolygons (*I, II, III* . . .) vornehmen (Fig. 26). Der Inhalt $\mathfrak{F}$ der von diesem Polygone, von dessen

Digitized by Google

äußersten Seiten (I und VI) und von der Achse LL eingeschlossenen Fläche ($1ABCDE61$) ist nämlich

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} &= \Delta\, 1A2 + \Delta\, 2B3 + \Delta\, 3C4 + \ldots\ldots \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha\,(x_1\,\overline{12} + x_2\,\overline{23} + x_3\,\overline{34}\ldots) \\ &= \frac{\sin\alpha}{2H}\,(P_1x_1^2 + P_2x_2^2 + P_3x_3^2 + \ldots) = \frac{\sin\alpha}{2H}\,\Sigma Px^2,\end{aligned}$$

wo α den Winkel bedeutet, welchen die Richtungen der P und x miteinander einschließen, und es folgt mithin

$$(1)\quad J = \Sigma Px^2 = \frac{2\mathfrak{F}H}{\sin\alpha}.$$

22. Beziehungen zwischen zwei auf parallele Achsen bezogenen Trägheitsmomenten. Haben die Kräfte P_1, P_2, P_3 .... (Fig. 26) von der mit ihrer Mittelkraft ΣP zusammenfallenden, also durch den Schnittpunkt der äußersten Seilpolygonseiten I und VI gehenden Achse L_0L_0 die in der Richtung der x gemessenen Abstände x'_1, x'_2, x'_3 ....., so ist ihr Trägheitsmoment J_0, bezogen auf die Achse L_0L_0,

$$J_0 = \Sigma Px'^2$$

und ihr statisches Moment in Bezug auf L_0L_0

$$\Sigma Px' = 0.$$

Bezeichnet man nun mit e den in der Richtung der x gemessenen Abstand der Achse LL von der L_0L_0 und setzt $x = x' + e$, so erhält man

$$J = \Sigma Px^2 = \Sigma P(x' + e)^2 = \Sigma Px'^2 + 2e\Sigma Px' + e^2\Sigma P$$

und hieraus ergibt sich

$$(2)\quad \ldots\ldots\ldots\quad J = J_0 + e^2\Sigma P.$$

In gleicher Weise erhält man für eine zur L_0L_0 parallele Achse L_1L_1, welche von der L_0L_0 den Abstand e_1 hat

$$J_1 = J_0 + e_1^2\Sigma P,$$

und es folgt deshalb das Gesetz

$$(3)\quad \ldots\ldots\ldots\quad J_1 - J = (e_1^2 - e^2)\,\Sigma P.$$

§ 6.

Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte.

23. Erklärungen. Die Theorie der Momente zweiter Ordnung findet namentlich Anwendung bei der Untersuchung von geraden Stäben, welche auf Biegungsfestigkeit beansprucht werden. Bezieht man den Querschnitt eines solchen Stabes auf ein (in der Regel rechtwinklig angenommenes) Achsenkreuz x, y (Fig. 27), und bezeichnet mit dF den

Digitized by Google

Inhalt eines unendlich kleinen Teilchens des Querschnittes, so nennt man die über den ganzen Querschnitt auszudehnenden Integrale

$$J_x = \int y^2 dF; \quad J_y = \int x^2 dF; \quad J_{xy} = \int xy dF$$

die *Querschnittsmomente zweiter Ordnung*. Es heißt auch

J_x das auf die x-Achse bezogene *Trägheitsmoment*,

J_y „ „ „ y- „ „ „

J_{xy} das *Zentrifugalmoment*.

Da die Biegungsspannungen in geraden Stäben als Funktionen der 3 Integrale J_x, J_y, J_{xy} dargestellt werden können, so ist eine eingehende Untersuchung dieser Werte für die Statik der Bauwerke von besonderer Wichtigkeit. Zunächst wollen wir uns nur mit den Trägheitsmomenten beschäftigen.

24. Bestimmung des Trägheitsmomentes einer unregelmäßigen Figur nach dem Verfahren von Culmann. Das Trägheitsmoment $J_x = \int y^2 dF$ ist unabhängig von den Abscissen x der Querschnittsteilchen, und es darf mithin unter dF der Inhalt eines der zur x-Achse parallelen, unendlich schmalen Streifens verstanden werden. (Vergl. Fig. 31 und 32.)

Bei der graphischen Bestimmung von J muß man nun diese unendlich schmalen Streifen durch solche von endlicher Breite ersetzen (Fig. 27). Sind F_1, F_2, F_3 ..... deren Inhalte und y_1, y_2, y_3 .... die Abstände ihrer Schwerpunkte von der x-Achse, so ist angenähert

$$J_x = F_1 y_1^2 + F_2 y_2^2 + F_3 y_3^2 + \ldots = \Sigma F y^2.$$

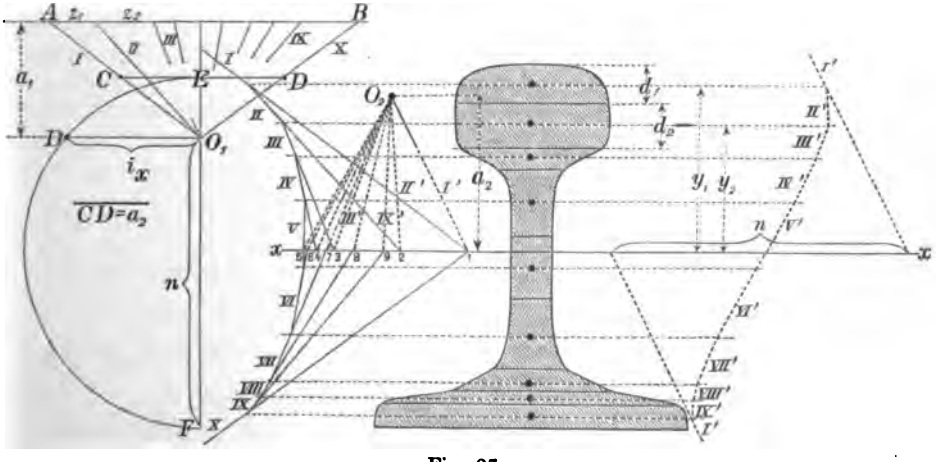


Fig. 27.

Verwandelt man sämtliche Streifen, die im allgemeinen verschieden große Breiten d_1, d_2, d_3 .... erhalten werden, in Rechtecke

Digitized by Google

von der gleichen Grundlinie a und bezeichnet mit z_1, z_2, z_3 .... die Höhen dieser Rechtecke, so ist

$$F_1 = a z_1;\ F_2 = a z_2;\ F_3 = a z_3\ \ldots\ldots$$

und man erhält

$$J_x = a \Sigma y^2 z.$$

Faßt man jetzt die Höhen z als Kräfte auf, die, in den Schwerpunkten der Streifen angreifend, parallel zur x-Achse wirken, bestimmt nach dem in No. 20 gelehrten Verfahren das Moment zweiter Ordnung dieser Kräfte in Bezug auf die Achse x (welche in Fig. 27 die Schwerpunktsachse des Querschnittes ist) und bezeichnet hierbei

mit a_1 die Polweite für das erste Seilpolygon ($I\ II\ldots$)
„ a_2 „ „ „ „ zweite „ ($I'\ II'\ldots$)
„ n die Strecke, welche die äußersten Seiten des zweiten Seilpolygons auf der x-Achse abschneiden,

so erhält man zunächst

$$\Sigma y^2 z = a_1 a_2 n$$

und hierauf

$$J_x = a a_1 a_2 n.$$

Die Strecken a, a_1, a_2, n, sind mit dem Längenmaßstabe zu messen. Für a, a_1, a_2 sind Längen zu wählen, die durch runde Zahlen ausgedrückt werden.

Die einzelnen Streifen, in welche der Querschnitt zerlegt wurde, dürfen als Trapeze betrachtet werden. Ist die mittlere Höhe eines Trapezes $= h$, die Breite $= d$, so ist sein Inhalt: $F = hd$, und es folgt aus $F = az$

$$z = \frac{hd}{a}.$$

Diese Länge z kann durch Zeichnung bestimmt werden (Fig. 29). Um den Trapezschwerpunkt S zu finden (Fig. 28), trage man auf den Verlängerungen der einander parallelen Seiten h', h'' die Strecken ab

$$\overline{DE} = \overline{CF} = \overline{AB} = h'$$
$$\overline{BG} = \overline{AH} = \overline{CD} = h''$$

und verbinde G mit F und E mit H durch gerade Linien; diese schneiden sich in S. Zerlegt man nämlich das Trapez in zwei Dreiecke mit den Inhalten $\frac{h'd}{2}$ und $\frac{h''d}{2}$, so findet man das statische Moment des Trapezes in Bezug auf die Seite h'

$$M = \frac{h'd}{2}\frac{d}{3} + \frac{h''d}{2}\frac{2d}{3} = \frac{h' + 2h''}{6} d^2,$$

während sich andererseits, wenn e' die Länge des von S auf h' gefällten Lotes ist,

$$M = \frac{h' + h''}{2} d e'$$

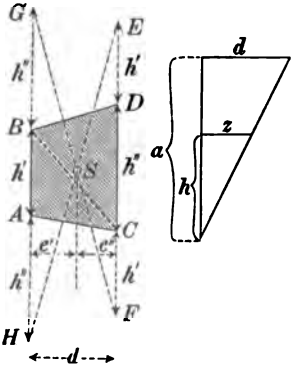


Fig. 28 u. 29.

ergibt. Hieraus folgt aber

Digitized by Google

$$\frac{e'}{d} = \frac{h' + 2h''}{3(h' + h'')}, \quad \text{ebenso} \quad \frac{e''}{d} = \frac{h'' + 2h'}{3(h' + h'')},$$

und schließlich

$$\frac{e'}{e''} = \frac{h' + 2h''}{h'' + 2h'},$$

welcher Bedingung die in Fig. 28 gefundene Lage des Punktes S genügt. Eine dritte leicht erhältliche Schwerlinie ist die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Seiten AB und CD.

25. Trägheitshalbmesser. Die durch die Gleichung

$$i_x^2 = \frac{J_x}{F},$$

(in welcher F den Inhalt des Querschnittes bedeutet) erklärte Länge i_x nennt man den auf die x-Achse bezogenen *Trägheitshalbmesser* des Querschnittes. Hat man mit Hilfe des in No. 24 entwickelten Verfahrens J_x in der Form aa_1a_2n dargestellt, und setzt man $F = a\Sigma z$, so erhält man

$$i_x^2 = \frac{a_1 a_2 n}{\Sigma z}.$$

Um diesen Wert zu finden, trage man zwischen die äußersten Seilstrahlen I und X des ersten Kräfteplanes, parallel zur $AB = \Sigma z$ (Fig. 27), die Gerade $CD = a_2$ ein, ziehe $EO_1F \perp CD$, mache $\overline{O_1F} = n$ und errichte in O_1 auf der EF ein Lot, welches den über EF beschriebenen Halbkreis in D schneidet. Es ist dann

$$\overline{O_1E} = a_1 \frac{a_2}{\Sigma z},$$

$$\overline{O_1D}^2 = \overline{O_1E} \cdot \overline{O_1F} = \frac{a_1 a_2 n}{\Sigma z},$$

und man erhält: $\overline{O_1D} = i_x$.*)

26. Bestimmung von J für einen Querschnitt, welcher aus Teilen besteht, deren Trägheitshalbmesser bekannt sind. Es sei in Fig. 30: ss die Schwerachse eines Querschnittes vom Inhalte F, xx eine zur ss im Abstande e gezogene Parallele und J_s das Trägheitsmoment des Querschnitts, bezogen auf ss. Dann ist nach Gleich. 2 in No. 22, bezogen auf xx

$$(1) \quad J_x = J_s + Fe^2$$

und, wenn $J_s = Fi_s^2$ gesetzt wird,

$$J_x = F(i_s^2 + e^2).$$

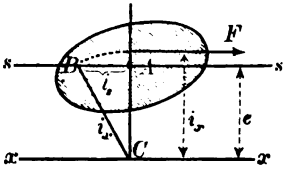


Fig. 30.

Trägt man auf der Geraden ss von irgend

*) Wird nur i_x gesucht (nicht J_x), so nehme man $a_1 = \frac{1}{2}\Sigma z$. Es ergibt sich dann $i_x = \sqrt{\frac{a_2}{2} n}$ als mittlere Proportionale zu $\frac{1}{2} a_2$ und n.

Digitized by Google

einem Punkte A aus die Strecke $AB = i_s$ auf, zieht $AC \perp xx$ und verbindet C mit B durch eine Gerade, so hat diese die Länge

$$(2) \quad i_x = \sqrt{i_s^2 + e^2},$$

und es darf somit gesetzt werden

$$J_x = F i_x^2.$$

Es läßt sich also J_x deuten als das auf die Achse xx bezogene Moment 2ter Ordnung einer Kraft F, welche im Abstande i_x von der xx und parallel zur xx wirkt.

i_x ist der Trägheitshalbmesser des Querschnittes F in Bezug auf die Achse xx.

Gelingt es nun, einen Querschnitt, dessen Trägheitsmoment J_x gesucht wird, in Teile F zu zerlegen, deren Trägheitshalbmesser i_s bekannt sind, so ist man im stande, auch die Trägheitshalbmesser i_x jener Teile zu bestimmen und erhält dann J_x in der Form

$$J_x = \Sigma F i_x^2.$$

Will man also den Fehler, welcher bei der in Fig. 27 vorgenommenen Ermittelung von J_x durch die Zerlegung des Querschnittes in Streifen von endlicher Breite entstanden ist, beseitigen (was aber nur bei verhältnismäßig breiten Streifen nötig ist), so muß man die Schwerpunktsabstände $y_1, y_2, \ldots$ der einzelnen Streifen durch deren auf die Achse xx bezogene Trägheitshalbmesser i_x ersetzen.

Geradlinig begrenzte Figuren lassen sich stets in Parallelogramme und Dreiecke zerlegen, deren eine Seite der Achse parallel ist, auf welche das Trägheitsmoment bezogen werden soll, und krummlinig begrenzte Figuren darf man immer mit genügender Genauigkeit durch geradlinige mit kurzen Seiten ersetzen. Es genügt also, die Trägheitshalbmesser i_s für das Parallelogramm und das Dreieck, bezogen auf deren zur einen Seite parallele Schwerachse anzugeben.

a. *Das Parallelogramm.* Bedeutet b die Grundlinie und h die

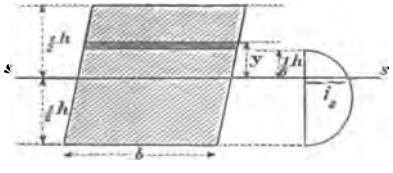


Fig. 31.

Höhe (Fig. 31), so erhält man in Bezug auf die zu b parallele Schwerachse:

Digitized by Google

$$J_s = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} y^2 dF = 2\int_0^{\frac{1}{2}h} y^2 b\,dy = \frac{bh^3}{12}^{*)} \text{ und}$$

$$i_s^2 = \frac{J_s}{F} = \frac{J_s}{bh} = \frac{h^2}{12}, \text{ woraus: } i_s = \sqrt{\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{6}}.$$

Es ist also i_s die mittlere Proportionale zu $\frac{h}{2}$ und $\frac{h}{6}$; sie wurde in Fig. 31 auf bekannte Weise mittels eines über der Strecke $\frac{h}{2}+\frac{h}{6}$ errichteten Halbkreises bestimmt.

b. *Das Dreieck.* Fig. 32. Man findet zunächst in Bezug auf eine durch die Spitze und parallel zur Grundlinie b gelegte Achse

$$J = \int_0^h y^2 dF = \int_0^h y^2 \frac{by}{h} dy = \frac{bh^3}{4}$$

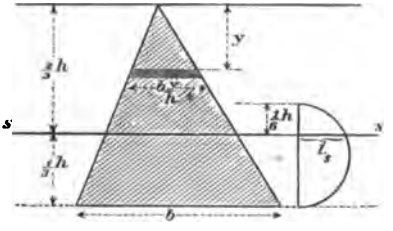


Fig. 32.

und hieraus (mittels Gleich. 2 in No. 22) in Bezug auf die zu b parallele Schwerachse

$$J_s = J - F\left(\frac{2h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2}\cdot\frac{4h^2}{9} = \frac{bh^3}{36},$$

weshalb $i_s^2 = \frac{J_s}{F} = \frac{2J_s}{bh} = \frac{h^2}{18}$ und $i_s = \sqrt{\frac{h}{3}\cdot\frac{h}{6}}$.

Es ist also die i_s die mittlere Proportionale zu $\frac{h}{3}$ und $\frac{h}{6}$.

---

*) Bezogen auf eine mit b zusammenfallende Achse erhält man $J = \frac{bh^3}{3}$.

Digitized by Google

Von den vorstehenden Entwicklungen wird man namentlich bei der Bestimmung der Trägheitsmomente *geradlinig begrenzter Figuren* Gebrauch machen.

27. Das Mohr'sche Verfahren. Um das auf die Achse xx bezogene Trägheitsmoment J des in der Fig. 27 dargestellten Querschnittes mit Hilfe des ersten Seilpolygons (*I*, *II*, *III* . . .) zu bestimmen, wird der Inhalt $\mathfrak{F}$ der Fläche ermittelt, welche von dem Seilpolygone und den äußersten Seiten desselben eingeschlossen wird. Sodann ergibt sich (nach No. 21)

$$\Sigma xy^2 = 2\mathfrak{F}a_1^*) \text{ und, angenähert, } J = \Sigma axy^2 = 2aa_1\mathfrak{F}.$$

Je kleiner nun die Breiten der Streifen sind, in welche der Querschnitt zerlegt worden ist, desto genauer wird J erhalten. Bei unendlich schmalen Streifen geht das Seilpolygon in eine krumme Linie, die *Seillinie,* über, welche das für Flächenstreifen von endlicher Breite gezeichnete Seilpolygon in dessen Durchschnittspunkten mit den die Streifen trennenden Geraden berührt. Denn, werden in den Punkten *A*, *D*, *E*, *B* (Fig. 33), in denen die Seillinie von zur x-Achse parallelen Querschnittssehnen geschnitten wird, Tangenten an jene Linie gelegt,

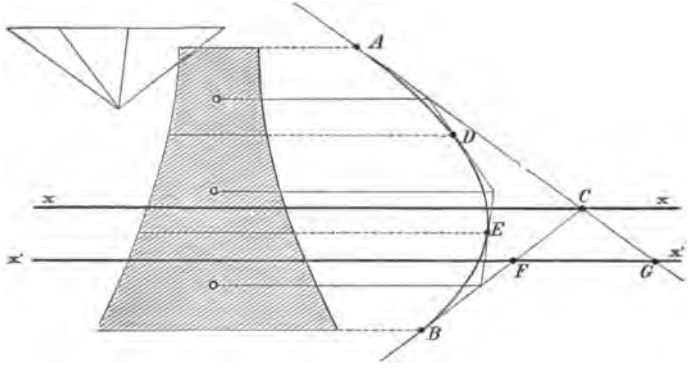


Fig. 33.

so sind je zwei aufeinander folgende Tangenten für den zwischen ihren Berührungspunkten gelegenen Flächenstreifen äußerste Seilpolygonseiten; sie müssen sich daher auf der zur x-Achse parallelen Schwerlinie jenes Streifens schneiden und bilden ein der Seillinie umschriebenes Seilpolygon.

Meistens genügt bereits eine geringe Anzahl von Tangenten und Berührungspunkten zur hinreichend scharfen Aufzeichnung der Seil-

*) In Gleich. (1), Seite 26, ist $\alpha = 90^0$ und $H = a_1$ zu setzen.

Digitized by Google

linie, so daß die Breite der Streifen, in welche der Querschnitt zu zerlegen ist, bei der Anwendung des Mohrschen Verfahrens größer gewählt werden darf, als bei der Behandlungsweise nach Culmann. Auch bringt der von Mohr zur Bestimmung von J eingeschlagene Weg den Fehler gut zur Anschauung, der durch die Annahme von Querschnittsstreifen endlicher Breite begangen wird und der mit dem Inhalte der Fläche zwischen Seilpolygon und Seillinie wächst.

Die Ermittelung des in die Gleichung $J = 2aa_1\mathfrak{F}$ einzuführenden Flächeninhaltes $\mathfrak{F}$ geschieht am schärfsten mit Hilfe der *Simpson*schen Formel. Zu diesem Zwecke zerlegt man die Fläche ABC (Fig. 34), welche die Seillinie AB und deren äußerste Tangenten AC und BC einschließen, in eine gerade Anzahl (m) gleichbreiter Streifen, deren Trennungslinien zu der einen Tangente (z. B. zur AC) parallel sind und die Längen y_1, y_2, y_3 .... haben mögen, und erhält, wenn man die Streifenbreite (senkrecht zu den Ordinaten y) mit e bezeichnet und $\overline{AC} = y_0$ setzt,

$$\mathfrak{F} = \frac{e}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_{m-1}).$$

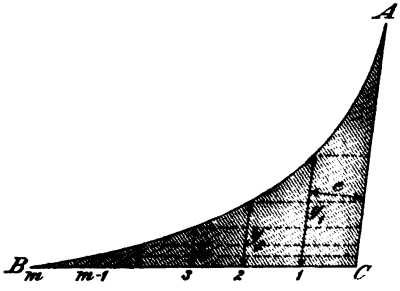


Fig. 34.

Soll das Trägheitsmoment J' des Querschnittes in Bezug auf eine zur xx parallele Achse $x'x'$ bestimmt werden (Fig. 33), so ist zu dem oben ermittelten Flächeninhalte $\mathfrak{F}$ noch der Inhalt eines Dreiecks CFG zu fügen, welches von der Geraden $x'x'$ und den äußersten Tangenten an die Seillinie begrenzt wird.

28. Das Zentrifugalmoment. Wir nehmen zunächst an, es sei das Zentrifugalmoment $J_{x_1y_1}$ einer Fläche F in Bezug auf zwei sich rechtwinklig schneidende Schwerachsen x_1, y_1, gegeben, und suchen das Zentrifugalmoment von F, bezogen auf die zu x_1, y_1 parallelen Achsen x, y. Der Schwerpunkt von F habe die Koordinaten ξ und η, Fig. 35.

Digitized by Google

Es ist

$$J_{xy} = \int (x_1 + \xi)\ (y_1 + \eta)\, dF$$
$$= \int x_1 y_1 dF + \xi \int y_1 dF + \eta \int x_1 dF + \eta \xi F,$$

worin zu setzen: $\int y_1 dF = 0$, $\int x_1 dF = 0$, als statische Momente der Fläche F, bezogen auf deren Schwerachsen, und es folgt mithin das Gesetz

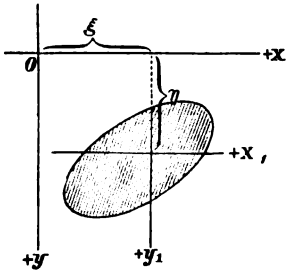


Fig. 35.

$$(3) \quad J_{xy} = J_{x_1 y_1} + F \eta \xi.$$

Ist $J_{x_1 y_1} = 0$, ein Fall der z. B. vorliegt, sobald eine der beiden Achsen x_1 oder y_1 eine Symmetrieachse des Querschnitts ist, so ergibt sich

$$(4) \quad J_{xy} = F \eta \xi.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich nun das Zentrifugalmoment eines Querschnitts ermitteln, der aus Rechtecken besteht, dessen Seiten den Achsen x, y parallel laufen. Figur 36 stellt einen solchen Querschnitt dar. Entsprechen den Schwerpunkten S_1, S_2, S_3 der drei Rechtecke die Koordinaten $(+\eta_1, +\xi_1)$, $(-\eta_2, -\xi_2)$, $(-\eta_3, +\xi_3)$, so ergibt sich:

$$J_{xy} = F_1 \eta_1 \xi_1 + F_2 \eta_2 \xi_2 - F_3 \eta_3 \xi_3.$$

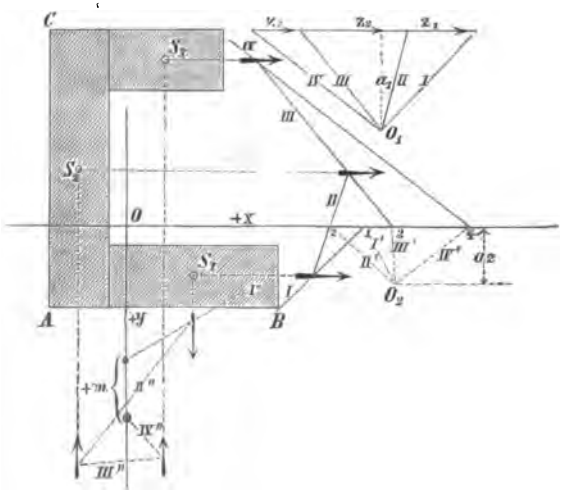


Fig. 36.

Um dieses Moment durch Zeichnung zu bestimmen, verwandeln wir die drei Rechtecke in solche von der gleichen Breite a, fassen die

Digitized by Google

Höhen $x_1 = \frac{F_1}{a}$, $x_2 = \frac{F_2}{a}$, $x_3 = \frac{F_3}{a}$ der neuen Rechtecke als Kräfte auf, welche parallel zu der x-Achse wirken, und zeichnen aus dem beliebigen Pole O_1 das Seilpolygon $I\ II\ III\ IV$, dessen Seiten auf der x-Achse die Abschnitte $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ bestimmen. Es ist dann, wenn a_1 die Polweite bedeutet,

$$\overline{12} = \frac{x_1\eta_1}{a_1};\quad \overline{23} = -\frac{x_2\eta_2}{a_1};\quad \overline{34} = -\frac{x_3\eta_3}{a_1}.$$

Jetzt betrachten wir diese Abschnitte als Kräfte, die in den Punkten S_1, S_2, S_3 angreifen und parallel zur y-Achse gerichtet sind, und zeichnen mit der Polweite a_2 das Seilpolygon $I''\ II''\ III''\ IV''$, dessen Seiten *senkrecht* zu den Strahlen $I'\ II'\ III'\ IV'$ sind, die von O_2 aus nach den Endpunkten der auf der x-Achse bestimmten Abschnitte $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ gezogen sind.*) Das Produkt aus der zweiten Polweite und aus der Strecke m, welche die äußersten Seiten (I'' u. IV'') dieses Polygons auf der y-Achse abschneiden, ist gleich dem statischen Momente der Kräfte $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ in Bezug auf die y-Achse. Es folgt mithin

$$a_2 m = \overline{12}\,\xi_1 - \overline{23}\,\xi_2 + \overline{34}\,\xi_3$$
$$= \frac{x_1\eta_1\xi_1}{a_1} + \frac{x_2\eta_2\xi_2}{a_1} - \frac{x_3\eta_3\xi_3}{a_1} = \frac{\Sigma x\eta\xi}{a_1},$$

und hieraus ergibt sich, da in Fig. 36 die Strecke m positiv ist,

$$\Sigma x\eta\xi = a_1 a_2 m.$$

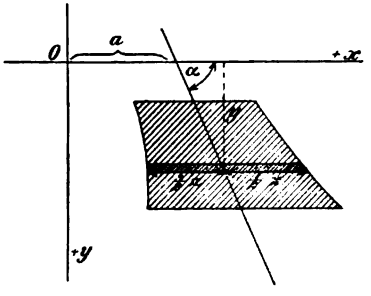


Fig. 37.

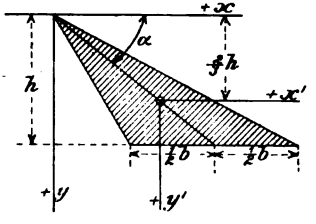


Fig. 38.

Nun ist aber $J_{xy} = \Sigma F\eta\xi = a\Sigma x\eta\xi$,
und es folgt deshalb

$$J_{xy} = a a_1 a_2 m.$$

*) Zu demselben Ergebnisse gelangt man, wenn man jene Abschnitte, und mit ihnen den Strahlenbüschel $I'\ II'\ III'\ IV'$, um 90° nach links dreht und hierauf $I'' \parallel I'$, $II'' \parallel II'$ u. s. w. zieht.

Digitized by Google

Es leuchtet ein, daß das beschriebene Verfahren zur Bestimmung der Zentrifugalmomente beliebiger Querschnitte benutzt werden kann. Im allgemeinen muß der Querschnitt in Streifen zerlegt werden, welche einer der beiden Koordinatenachsen parallel laufen und so schmal sein müssen, daß sie als Rechtecke aufgefaßt werden dürfen.

Besonders wichtig ist der in Fig. 37 dargestellte Sonderfall. Die Mittelpunkte der zur x-Achse parallelen Querschnittssehnen liegen in einer Geraden, welche die x-Achse unter dem Winkel α und im Abstande a vom Ursprung O schneidet. Man erhält

$$J_{xy} = \int xy\,dF = \int (a + y \operatorname{cotg} \alpha)\, y\,dF$$
$$= a \int y\,dF + \operatorname{cotg} \alpha \int y^2\,dF,$$

oder, wenn man mit η die Ordinate des Querschnitts-Schwerpunktes bezeichnet,

$$(5) \quad J_{xy} = Fa\eta + J_x \operatorname{cotg} \alpha.$$

Für das Dreieck (Fig. 38) ergibt sich z. B.

$$J_{xy} = \frac{bh^2}{4} \operatorname{cotg} \alpha \text{ und } J_{x'y'} = \frac{bh^2}{36} \operatorname{cotg} \alpha.$$

Der in Fig. 39 abgebildete Querschnitt (Parabelabschnitt) sei durch die Gleichung bestimmt:

$$z = b\sqrt{\frac{y}{h}}.$$

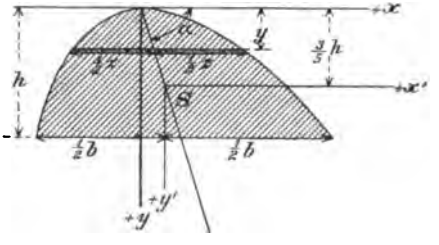


Fig. 39.

Der Flächeninhalt ist

$$F = \int z\,dy = \frac{2}{3} bh$$

und das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die x-Achse

$$\int zy\,dy = \frac{2}{5} bh^2.$$

Der Schwerpunkt S liegt also im Abstande $\frac{3}{5} h$ von der x-Achse. Weiter ist

Digitized by Google

$$J_x = \int z y^2 dy = \frac{2}{7} b h^3$$

$$J_{x'} = \frac{2}{7} b h^3 - \frac{2}{8} b h \left(\frac{3h}{5}\right)^2 = \frac{8}{175} b h^3.$$

Das Zentrifugalmoment für das Achsenkreuz $x'y'$ ist also

$$(6) \quad J_{x'y'} = \frac{8}{175} b h^3 \operatorname{cotg} \alpha.$$

29. Das polare Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf einen in der Ebene des Querschnitts gelegenen Punkt O ist durch die Gleichung erklärt

$$(7) \quad J_p = \int r^2 dF,$$

wo r den Abstand des Querschnittsteilchens dF vom Punkte O bedeutet. Für rechtwinklige Koordinaten ist (Fig. 40)

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

mithin

$$(8) \quad J_p = J_y + J_x.$$

In Bezug auf einen in der x-Achse im Abstande e von O gelegenen Punkt O' erhält man das polare Trägheitsmoment

$$J'_p = J'_y + J_x,$$

es ist also

$$J'_p = J_p + J'_y - J_y.$$

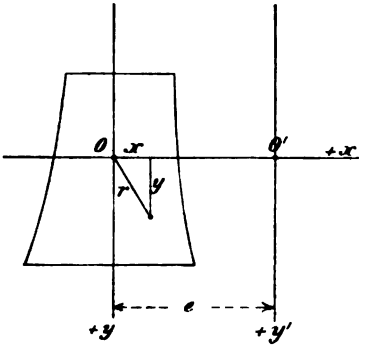


Fig. 40.

Ist die y-Achse eine Schwerachse, so besteht zwischen J'_y und J_y die Beziehung

$$J'_y = J_y + Fe^2;$$

man erhält dann

$$(9) \quad J'_p = J_p + Fe^2.$$

30. Einführung schiefwinkliger Koordinaten. Ist ein Querschnitt anfänglich auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz x, y bezogen, und dreht man die x-Achse, bei festliegender y-Achse, um den Winkel $90° - \beta$ in die Lage x' (Fig. 41), so ergeben sich die schiefwinkligen Koordinaten: $y' = y - x \operatorname{cotg} \beta$ und $x' = x \operatorname{cosec} \beta$.

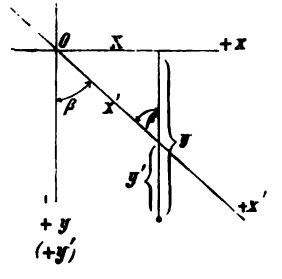


Fig. 41.

Digitized by Google

Aus den für rechtwinklige Koordinaten bestimmten Querschnittsmomenten

$$J_x = \int y^2 dF;\ J_y = \int x^2 dF;\ J_{xy} = \int xy dF$$

findet man demnach die auf schiefwinklige Koordinaten bezogenen:

$$(10)\quad J_{y'} = \int x'^2 dF = \operatorname{cosec}^2\beta \int x^2 dF = J_y \operatorname{cosec}^2\beta$$

$$(11)\quad J_{x'y'} = \int y' x' dF = \operatorname{cosec}\beta \left[\int yx dF - \operatorname{cotg}\beta \int x^2 dF\right]$$
$$= \operatorname{cosec}\beta \left[J_{xy} - J_y \operatorname{cotg}\beta\right].$$

Die letzte Gleichung führt zu dem wichtigen Gesetze: *Bestimmt man* β *mittels der Formel*

$$(12)\quad \operatorname{cotg}\beta = \frac{J_{xy}}{J_y},$$

so ist das auf die schiefwinkligen Achsen y', x' *bezogene Zentrifugalmoment gleich Null.*

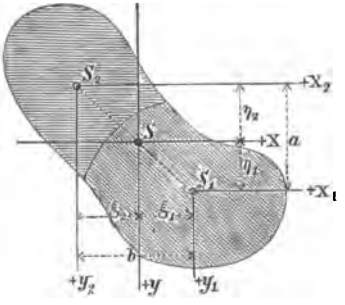


Fig. 42.

31. Entwicklung einiger wichtiger Formeln. Ein Querschnitt bestehe aus zwei Teilen mit den Inhalten F_1, F_2 und den Schwerpunkten S_1, S_2. Fig. 42. Beide Teile seien auf rechtwinklige Schwerachsen x_1, y_1 und x_2, y_2 bezogen. Gegeben seien die Querschnittsmomente J_{x_1}, J_{y_1}, $J_{x_1 y_1}$ des Teiles F_1, ferner J_{x_2}, J_{y_2}, $J_{x_2 y_2}$ des Teiles F_2, und gesucht seien die Werte J_x, J_y, J_{xy} für den ganzen Querschnitt in Bezug auf dessen Schwerachsen x, y, wobei die Richtungen x, x_1, x_2 einander parallel sein mögen, desgleichen die Richtungen y, y_1, y_2. Mit den aus der Fig. 42 ersichtlichen Bezeichnungen ergibt sich (nach Gleichung 1 Seite 29):

$$J_x = J_{x_1} + F_1 \eta_1^2 + J_{x_2} + F_2 \eta_2^2.$$

Nun ist aber $F_1 \eta_1 = F_2 \eta_2$ und $\eta_1 + \eta_2 = a$,

also $$\eta_1 = \frac{F_2 a}{F_1 + F_2} \text{ und } \eta_2 = \frac{F_1 a}{F_1 + F_2},$$

weshalb $$F_1 \eta_1^2 + F_2 \eta_2^2 = \frac{F_1 F_2 a (\eta_1 + \eta_2)}{F_1 + F_2} \text{ und schließlich:}$$

$$(13)\quad J_x = J_{x_1} + J_{x_2} + \frac{F_1 F_2 a^2}{F_1 + F_2}.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$(14)\quad J_y = J_{y_1} + J_{y_2} + \frac{F_1 F_2 b^2}{F_1 + F_2}$$

und (aus der Gleich.: $J_{xy} = J_{x_1 y_1} + J_{x_2 y_2} + F_1 \eta_1 \xi_1 + F_2 \eta_2 \xi_2$):

Digitized by Google

$$(15)\quad J_{xy} = J_{x_1 y_1} + J_{x_2 y_2} + \frac{F_1 F_2 a b}{F_1 + F_2}.$$

Sind die Achsen $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ Hauptachsen der Teile F_1 bezieh. F_2, so ergibt sich $J_{x_1 y_1} = 0$, $J_{x_2 y_2} = 0$, und man erhält:

$$(16)\quad J_{xy} = \frac{F_1 F_2 a b}{F_1 + F_2}.$$

Mit Hilfe der Gleich. (13) bis (16) kann man J_x, J_y, J_{xy} finden, ohne die Lage des Schwerpunktes S zu kennen. Es bieten aber diese Formeln auch bei gegebener Lage von S zuweilen Vorteile, weil die in sie einzuführenden Zahlen meistens abgerundeter sind als die Zahlenwerte für η und ξ.

Ist die Lage von S bekannt, und sind $J_{x_1 y_1}$ und $J_{x_2 y_2}$ gleich Null, so kann man aus der Gleichung

$$J_{xy} = F_1 \eta_1 \xi_1 + F_2 \eta_2 \xi_2$$

mit Hilfe der Beziehungen: $F_1 \xi_1 = F_2 \xi_2$; $F_1 \eta_1 = F_2 \eta_2$ auch ableiten:

$$(17)\quad J_{xy} = F_1 \xi_1 a = F_2 \xi_2 a = F_1 \eta_1 b = F_2 \eta_2 b.$$

Zahlenbeispiel. Für den in Fig. 43 dargestellten Winkeleisen-Querschnitt sollen die Werte J_x, J_y, J_{xy} in Bezug auf die den Schenkeln parallelen Schwerachsen berechnet werden.

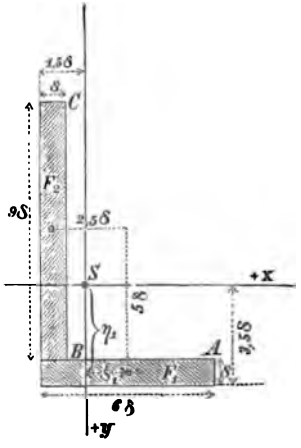


Fig. 43.

Ohne erst die Lage der Schwerachsen zu bestimmen, findet man, nach Zerlegung des Querschnittes in zwei Rechtecke mit den Inhalten $F_1 = 6\,\delta^2$ und $F_2 = 9\,\delta^2$:

$$J_x = \frac{1}{12}(6 \cdot 1^3 + 1 \cdot 9^3)\,\delta^4 + \frac{6 \cdot 9}{6 + 9} 5^2 \delta^4 = 151{,}25\,\delta^4$$

$$J_y = \frac{1}{12}(1 \cdot 6^3 + 9 \cdot 1^3)\,\delta^4 + \frac{6 \cdot 9}{6 + 9} 2{,}5^2 \delta^4 = 41{,}25\,\delta^4$$

$$J_{xy} = \frac{6 \cdot 9}{6 + 9} \cdot 5 \cdot 2{,}5\,\delta^4 = 45\,\delta^4.$$

Muß man die Lage des Schwerpunktes aus irgend welchen Gründen haben (z. B. bei der Berechnung von auf Biegung beanspruchten Stäben), so bestimme man η_1 und ξ_1 oder η_2 und ξ_2. Hierzu stehen die folgenden Gleichungen zur Auswahl (vergl. Fig. 42):

$$(18)\quad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{F_2 a}{F_1 + F_2}\,; \quad \xi_1 = \dfrac{F_2 b}{F_1 + F_2}\,; \quad \dfrac{\eta_1}{\xi_1} = \dfrac{a}{b} \\ \eta_2 = \dfrac{F_1 a}{F_1 + F_2}\,; \quad \xi_2 = \dfrac{F_1 b}{F_1 + F_2}\,; \quad \dfrac{\eta_2}{\xi_2} = \dfrac{a}{b}. \end{cases}$$

Im vorliegenden Falle findet man z. B.

$$\eta_1 = \frac{9\,\delta^2 \cdot 5\,\delta}{(6 + 9)\,\delta^2} = 3\,\delta \text{ und } \xi_1 = \eta_1 \frac{b}{a} = \eta_1 \frac{1}{2} = 1{,}5\,\delta.$$

Digitized by Google

Durch diese beiden Werte ist die Lage von S bekannt, und es ergibt sich jetzt:

$$J_{xy} = F_1 \xi_1 a = 6 \cdot 1{,}5 \cdot 5\delta^4 = 45\delta^4.$$

Daß bei einem so einfachen Querschnitte wie der in Fig. 43 dargestellte die Rechnung schneller zum Ziele führt wie die Zeichnung, braucht kaum hervorgehoben zu werden.

32. Aufgaben.

1. Berechnung der Trägheitsmomente des Kreisquerschnitts. Mit Hilfe der auf Seite 31 für das Dreieck abgeleiteten Formel $J = \frac{1}{4} b h^3$ findet man für das polare Trägheitsmoment des Kreises, Fig. 44, den Wert

$$J_p = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} r\, d\varphi \cdot r^3 = \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Nun ist aber

$$J_p = J_x + J_y,$$

mithin ergibt sich

$$J_x = J_y = \frac{\pi r^4}{4}.$$

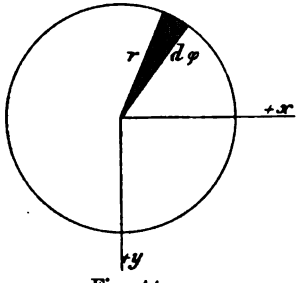


Fig. 44.

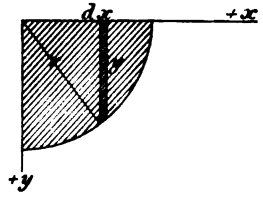


Fig. 45.

2. Für den Quadranten, Fig. 45, erhält man

$$J_x = J_y = \frac{\pi r^4}{16} \qquad J_p = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$J_{xy} = \int_0^r y\, dx\, \frac{y}{2}\, x = \frac{1}{2} \int_0^r x\,(r^2 - x^2)\, dx = \frac{r^4}{8}.$$

Das statische Moment dieses Querschnitts in Bezug auf die x-Achse ist

$$S_x = \int y\, dx\, \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = \frac{r^3}{3}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes des Querschnitts von der x-Achse ist

$$\frac{S_x}{F} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Digitized by Google

3. Für den in Fig. 46 dargestellten Querschnitt (Unterschied eines Quadrats und eines Quadranten) ist*)

$$J_x = J_y = \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) r^4$$

$$J_{xy} = r^3 \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} - \frac{r^4}{8} = \frac{r^4}{8}$$

$$S_x = S_y = r^2 \frac{r}{2} - \frac{r^3}{3} = \frac{r^3}{6}$$

$$F = r^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

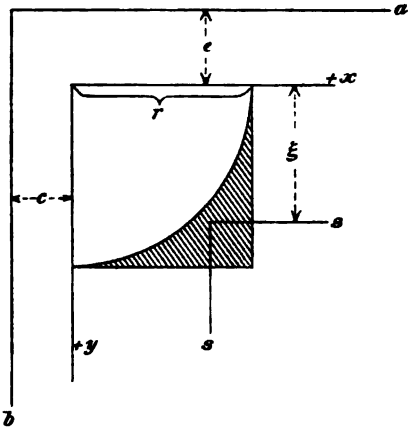


Fig. 46.

Die Ordinate des Schwerpunktes ist

$$\xi = \frac{S_x}{F} = \frac{2r}{3(4-\pi)} = 0{,}776632\, r.$$

Die auf die Schwerachsen ss bezogenen Querschnittsmomente sind

$$J_s = J_x - F\xi^2 = J_x - S_x \xi$$
$$J_{ss} = J_{xy} - F\xi^2 = J_{xy} - S_x \xi.$$

Das Trägheitsmoment für die zur x-Achse parallele Achse a ist

$$J_a = J_s + F(\xi + e)^2 = J_s + F\xi^2 + 2F\xi e + Fe^2$$
$$J_a = J_x + 2S_x e + Fe^2$$

$$J_a = \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) r^4 + \frac{r^3 e}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r^2 e^2.$$

*) Vergl. für das Quadrat die Fußnote auf Seite 31.

Digitized by Google

Das Zentrifugalmoment für das Achsenkreuz ab ist

$$\begin{aligned} J_{ab} &= J_{\xi\eta} + F(\xi + e)(\eta + c) \\ &= J_{\xi\eta} + F\xi\eta + F\xi(e + c) + Fec \\ &= J_{xy} + S_x(e + c) + Fec \end{aligned}$$

$$J_{ab} = -\frac{r^4}{8} + \frac{r^3}{6}(e + c) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r^2 ec.$$

4. Berechnung der Querschnittsmomente für das in Fig. 47 abgebildete Z-Eisen (Normalprofil No. 14 für Schiffbauzwecke). Der Querschnitt ist auf rechtwinklige Schwerachsen bezogen, die y-Achse ist parallel zum Steg. Wird die Abrundung der Ecken C und E vernachlässigt, so erhält man

$$J_x = \frac{1}{12}(8 \cdot 14^3 - 7 \cdot 11{,}6^3) = 918{,}811 \text{ rund} = 919 \text{ cm}^4$$

$$J_y = \frac{1}{12}(1{,}2 \cdot 15^3 + 12{,}8 \cdot 1^3) = 338{,}567 \text{ „} = 339 \text{ „}$$

$$J_{xy} = 2 \cdot 1{,}2 \cdot 7 \cdot 6{,}4 \cdot 4{,}0 \quad = 430{,}080 \text{ „} = 430 \text{ „}.$$

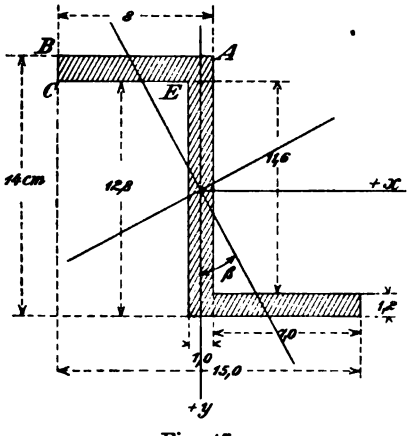


Fig. 47.

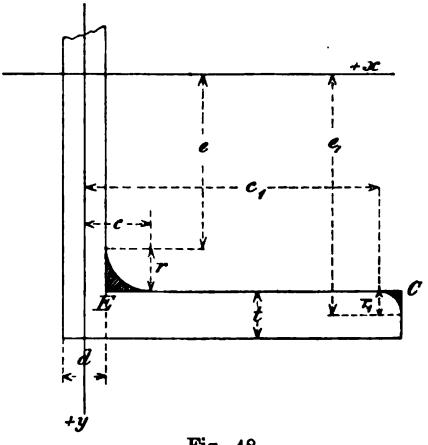


Fig. 48.

Infolge der Abrundung der Ecken E und C durch Viertelkreise mit den Halbmessern r und r_1 (Fig. 48) ändern sich diese Werte um ΔJ_x, ΔJ_y, ΔJ_{xy}, wo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta J_x &= \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) r^4 + \frac{r^3 e}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r^2 e^2 \\ &\quad - \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) r_1^4 - \frac{r_1^3 e_1}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r_1^2 e_1^2\right] \\ \frac{1}{2}\Delta J_y &= \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) r^4 - \frac{r^3 c}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r^2 c^2 \\ &\quad - \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) r_1^4 + \frac{r_1^3 c_1}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r_1^2 c_1^2\right] \\ \frac{1}{2}\Delta J_{xy} &= -\frac{r^4}{8} - \frac{r^3}{6}(e - c) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r^2 ec \\ &\quad - \left[-\frac{r_1^4}{8} + \frac{r_1^3}{6}(e_1 - c_1) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r_1^2 e_1 c_1\right]. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Da nun $r_1 = \frac{1}{2} r$ ist, so wird

$$\Delta J_x = +0{,}2568\, r^4 + \frac{2}{3} r^3 \left(e + \frac{1}{8} e_1\right) + 0{,}4292\, r^2 \left(e^2 - \frac{1}{4} e_1^2\right)$$

$$\Delta J_y = +0{,}2568\, r^4 - \frac{2}{3} r^3 \left(c + \frac{1}{8} c_1\right) + 0{,}4292\, r^2 \left(c^2 - \frac{1}{4} c_1^2\right)$$

$$\Delta J_{xy} = -0{,}2344\, r^4 - \frac{1}{3} r^3 \left(e - c + \frac{e_1 - c_1}{8}\right) + 0{,}4292\, r^2 \left(ec - \frac{1}{4} e_1 c_1\right).$$

Die Einsetzung von $r = d = 1^{cm}$, $c = 1{,}5^{cm}$, $c_1 = 7^{cm}$, $e = 4{,}8^{cm}$, $e_1 = 6{,}3^{cm}$ liefert

$$\Delta J_x = 9{,}612,\ \Delta J_y = -5{,}619,\ \Delta J_{xy} = -2{,}547,$$

die genauen Querschnittsmomente $J + \Delta J$ sind daher

$$J_x = 928{,}423\ J_y\ 332{,}948\ J_{xy} = 427{,}133.\text{*)}$$

Sind η, ξ die Schwerpunkts-Koordinaten des bei E infolge der Abrundung hinzukommenden Querschnittsteilchen ΔF und η_1, ξ_1 die Schwerpunkts-Koordinaten des bei C fortfallenden Teilchens $\frac{1}{4} \Delta F$, so darf man auch genügend genau setzen

$$\Delta J_x = 2\, \Delta F \left(\eta^2 - \frac{1}{4} \eta_1^2\right)$$

$$\Delta J_y = 2\, \Delta F \left(\xi^2 - \frac{1}{4} \xi_1^2\right)$$

$$\Delta J_{xy} = 2 \Delta F \left(\eta \xi - \frac{1}{4} \eta_1 \xi_1\right).$$

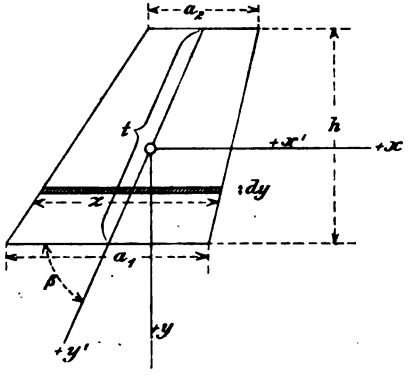


Fig. 49.

Der Flächeninhalt des Querschnitts ist

$F = 30{,}6$ (ohne Rücksicht auf die Abrundungen)
$F = 31{,}1$ (mit „ „ „ „).

5. Berechnung der Querschnittsmomente des Trapezes, bezogen auf die schiefen Achsen x' y'. (Fig. 49.) Die y'-Achse falle mit der Transversalen zusammen; es ist dann $J_{x'y'} = 0$.

Zerlegt man das Trapez in zwei Dreiecke, so erhält man nach Gleichung 13, Seite 38, in Bezug auf das rechtwinklige Achsenkreuz xy den Wert

$$J_x = \frac{a_1 h^3}{36} + \frac{a_2 h^3}{36} + \frac{\frac{a_1 h}{2} \cdot \frac{a_2 h}{2}}{\frac{a_1 h}{2} + \frac{a_2 h}{2}} \left(\frac{h}{3}\right)^2.$$

Nach No. 30 ist nun

$$J_{x'} = J_x \operatorname{cosec}^2 \beta = J_x \frac{t^2}{h^2}, \text{ mithin}$$

$$J_{x'} = \frac{h t^2}{36} \left(a_1 + a_2 + \frac{2 a_1 a_2}{a_1 + a_2}\right).$$

*) Das Normalprofilbuch gibt an $J_x = 928{,}4$, $J_y = 332{,}9$; die wichtigen Zentrifugalmomente sind in diesem Buche leider nicht aufgeführt.

Digitized by Google

Für den Flächenstreifen $z\,dy$ erhält man, bezogen auf das schiefe Achsenkreuz x' y':

$$dJ_{y'} = dy' \sin\beta \int_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} x'^2 dx' = \frac{z^3}{12} \sin\beta\, dy'.$$

Da nun $dy' = dz \dfrac{t}{(a_1 - a_2)}$, so folgt

$$J_{y'} = \frac{\sin\beta\, t}{12(a_1 - a_2)} \int_{a_2}^{a_1} z^3 dz = \frac{\sin\beta\, t(a_1^4 - a_2^4)}{48(a_1 - a_2)}.$$

Der Flächeninhalt ist

$$F = \frac{h(a_1 + a_2)}{2}.$$

Es ergibt sich also schließlich

$$J_{y'} = \frac{F(a_1^2 + a_2^2)}{24}.$$

§ 7.

Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten und Zentrifugalmomenten für Achsen, welche durch einen und denselben Punkt gehen.

33. Analytische Beziehungen. Dreht man das rechtwinklige Achsenkreuz (x, y), auf welches der Querschnitt bezogen ist, um den Winkel α

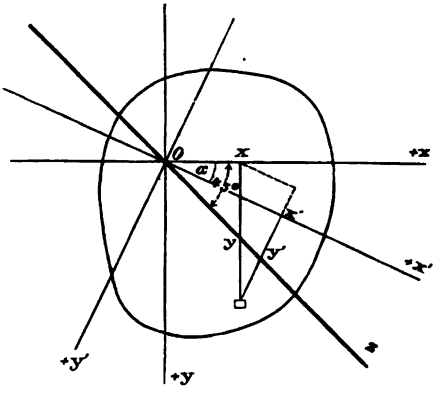


Fig. 50.

in die Lage x', y' (Fig. 50), so sind die neuen Koordinaten:

$$y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$
$$x' = y\sin\alpha + x\cos\alpha,$$

Digitized by Google

und es ergeben sich für die Querschnittsmomente: $J_{x'} = \int y'^2 dF$; $J_{y'} = \int x'^2 dF$; $J_{x'y'} = \int x' y' dF$ in Bezug auf die Achsen x' und y' des neuen Koordinatensystems die Ausdrücke:

$$J_{x'} = \cos^2\alpha \int y^2 dF + \sin^2\alpha \int x^2 dF - 2 \sin\alpha \cos\alpha \int xy dF,$$
$$J_{y'} = \sin^2\alpha \int y^2 dF + \cos^2\alpha \int x^2 dF + 2 \sin\alpha \cos\alpha \int xy dF,$$
$$J_{x'y'} = \sin\alpha \cos\alpha \left(\int y^2 dF - \int x^2 dF\right) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \int xy dF.$$

Es bestehen also zwischen den auf die Achsen x, y bezogenen Werten

$$J_x = \int y^2 dF; \quad J_y = \int x^2 dF; \quad J_{xy} = \int xy dF$$

und den Werten $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{x'y'}$ die Beziehungen

$$(1) \quad \begin{cases} J_{x'} = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha, \\ J_{y'} = J_x \sin^2\alpha + J_y \cos^2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha, \\ J_{x'y'} = \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \end{cases}$$

Addiert man die beiden ersten dieser Gleichungen, so erhält man das wichtige Gesetz

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad J_{x'} + J_{y'} = J_x + J_y,$$

nach welchem die Summe der Trägheitsmomente, bezogen auf irgend zwei durch einen und denselben Punkt gehende, rechtwinklige Achsen konstant ist.*)

Aus der ersten der Gleichungen (1) ergibt sich für eine unter 45° gegen die x-Achse geneigte, in der Fig. 50 mit z bezeichnete Achse das Trägheitsmoment

$$J_z = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - J_{xy}$$

und hieraus folgt die Formel

$$(3) \quad J_{xy} = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - J_z,$$

welche mitunter zur Berechnung des Zentrifugalmomentes aus drei Trägheitsmomenten benutzt wird.

Setzt man

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

so geht $J_{x'}$ über in

$$(4) \quad J_{x'} = \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha.$$

---

*) Dies folgt auch nach Seite 37 aus $J_y = J_x + J_y = J_{x'} + J_{y'}$.

Digitized by Google

Dieser Wert wird ein Maximum bezw. Minimum sobald

$$-\frac{1}{2}(J_x - J_y)\sin 2\alpha - J_{xy}\cos 2\alpha = 0$$

ist, woraus

$$(5)\quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2J_{xy}}{J_x - J_y}.$$

Dieser Gleichung genügen zwei Winkel α, die sich voneinander um 90° unterscheiden. Die beiden Achsen, für welche J ein Maximum oder Minimum ist, stehen also aufeinander senkrecht; sie führen den Namen *Hauptachsen.* Die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptachsen heißen *Hauptträgheitsmomente*, sie sollen mit J_1 und J_2 bezeichnet werden. Aus den Gleichungen (4) und (5) folgt

$$\begin{aligned} J_{x'} &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y)\cos 2\alpha\left[1 - \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}\operatorname{tg} 2\alpha\right] \\ &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y)\cos 2\alpha\,(1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y)\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}. \end{aligned}$$

Man erhält also für die beiden Hauptträgheitsmomente die Werte

$$(6)\quad \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} = J_{max} \\ J_2 = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} = J_{min}. \end{cases}$$

Aus der dritten der Gleichungen (1) und aus Gleichung (5) folgt schließlich noch, *daß das Zentrifugalmoment für die Hauptachsen = 0 ist.* Jede *Symmetrieachse* ist zugleich eine Hauptachse.

34. Geometrische Beziehungen (nach Mohr). Durch einen beliebigen Punkt O eines Querschnitts (Fig. 51) seien zwei Achsen x und y gelegt, die miteinander irgend einen Winkel einschließen. Die lotrechten Abstände des Querschnittsteilchens dF von diesen Achsen seien als dessen Koordinaten eingeführt. ρ sei der Abstand des Teilchens dF von O und α und β seien die Winkel, welche der von O nach dF führende Fahrstrahl mit den Achsen x und y bildet. Das Zentrifugalmoment des Teilchens dF in Bezug auf die Achsen x und y ist dann

$$dJ_{xy} = dF \cdot \rho^2 \sin\alpha \sin\beta.$$

Legt man nun durch O einen beliebigen Kreis, dessen Radius r ist, und bringt man die Achsen x, y und den Fahrstrahl ρ mit dem Kreise in A, B und C zum Schnitt, so ist $\angle BAC = \beta$ und Sehne $\overline{AC} = 2r\sin\alpha$, mithin ist der Abstand des Punktes C von der Kreis-

Digitized by Google

sehne AB gleich $2r \sin\alpha \sin\beta$. Legt man also dem Punkte C eine Masse von der Größe

$$\frac{dF\varrho^2}{2r}$$

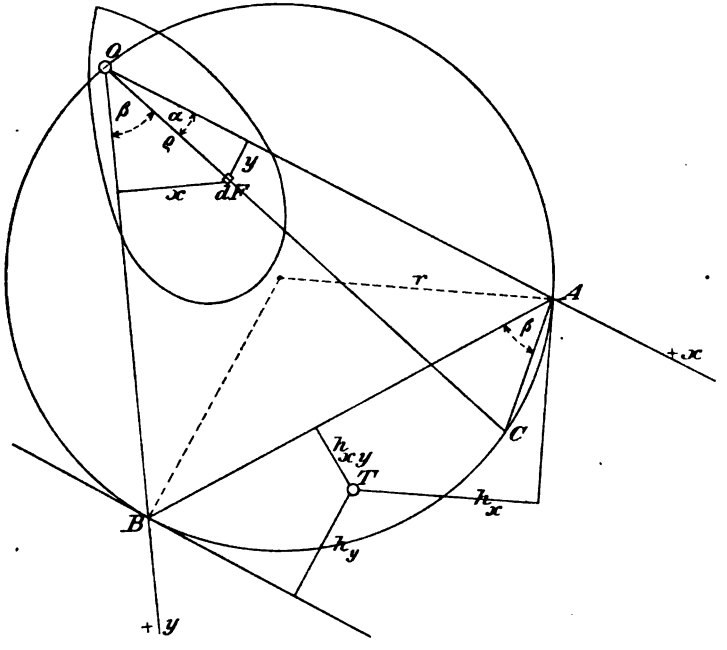


Fig. 51.

bei, so ist das statische Moment dieser Masse in Bezug auf die Kreissehne AB gleich dem Zentrifugalmoment dJ_{xy}.

Denkt man sich nun zu jedem dF den zugehörigen Kreispunkt und die diesem Punkte beizulegende Masse bestimmt und schließlich den Schwerpunkt T aller dieser Massenpunkte ermittelt, so erhält man, wenn T von der Sehne AB den Abstand h_{xy} hat:

$$J_{xy} = h_{xy} \int \frac{dF\varrho^2}{2r} = \frac{h_{xy} J_p}{2r},$$

wo J_p das polare Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf den Punkt O bedeutet.

Fallen die beiden Achsen x und y zusammen, so wird aus dem Zentrifugalmoment ein Trägheitsmoment und aus der Kreissehne AB

Digitized by Google

eine Tangente. Bezeichnen also h_x und h_y die Abstände des Punktes T von den in A und B an den Kreis gelegten Tangenten, so ist

$$J_x = h_x \frac{J_p}{2r} \qquad J_y = h_y \frac{J_p}{2r}.$$

Sind nun drei Querschnittsmomente: J_x, J_y, J_{xy} auf die im vorigen Paragraphen gezeigte Weise ermittelt worden, so kann man die Lage von T auf Grund der Bedingung bestimmen, daß sich die Abstände h_x, h_y, h_{xy} zueinander verhalten müssen wie $J_x : J_y : J_{xy}$ und hierauf ist man im stande, die Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente für alle durch den Punkt O gehenden Achsen sehr rasch anzugeben. An die Stelle von J_{xy} kann natürlich auch ein drittes Trägheitsmoment J_s als Bestimmungsstück treten, während sich andererseits die Lage von T auch mit Hilfe von drei Zentrifugalmomenten oder mit Hilfe eines Trägheitsmomentes und zweier Zentrifugalmomente bestimmen läßt.

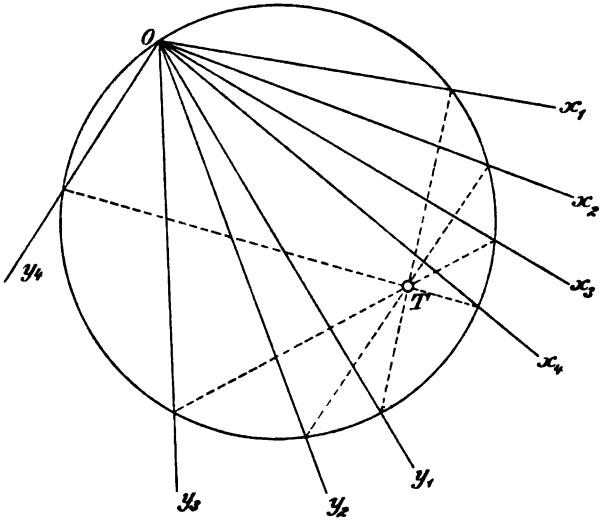


Fig. 52.

Geht die Kreissehne AB durch den Punkt T so ist das Zentrifugalmoment $J_{xy} = 0$; die beiden Achsen x und y heißen dann *zugeordnete* oder *konjugierte* Achsen. In Fig. 52 ist eine Schar zugeordneter Achsen x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, ... dargestellt worden; sie bilden einen involutorischen Strahlenbüschel; das Zentrum der Involution ist der Punkt T. Führt man als Koordinaten von dF nicht die lotrechten Achsenabstände x und y ein, sondern die schrägen Abstände

Digitized by Google

ξ und η (Fig. 53), deren Richtungen aber mit den Achsen x und y die von der Lage von dF unabhängigen, also festen Winkel γ und ε einschließen, so ist

$$J_{\xi\eta} = \int \xi\eta dF = \frac{1}{\sin\gamma \sin\varepsilon} \int xy dF.$$

Ist also $J_{xy} = 0$, so ist auch $J_{\xi\eta} = 0$.

In der Folge werden wir meistens rechtwinklige Koordinaten einführen und den bislang willkürlich gelassenen Kreisdurchmesser

$$2r = J_p = J_x + J_y$$

wählen. Als drittes Bestimmungsstück werden wir in der Regel ein Zentrifugalmoment benutzen. Sind dann für irgend ein Achsenkreuz J_x, J_y, J_{xy} gegeben, so bestimmen wir T nach Fig. 54 oder Fig. 55. In der ersten Figur ist durch O ein beliebiger Kreis vom Durchmesser $J_x + J_y$ gelegt worden, in der zweiten wurde die

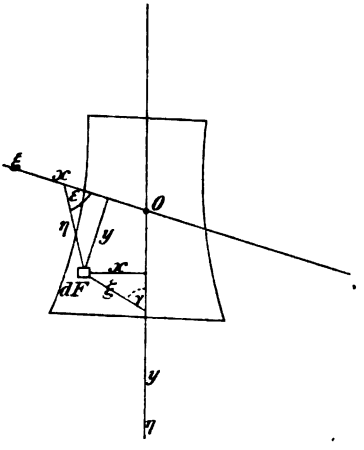
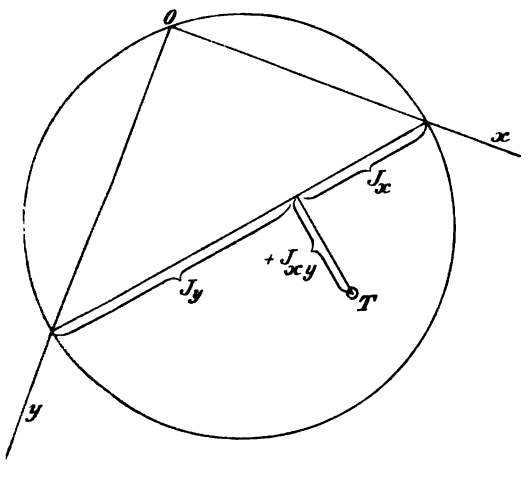


Fig. 53.



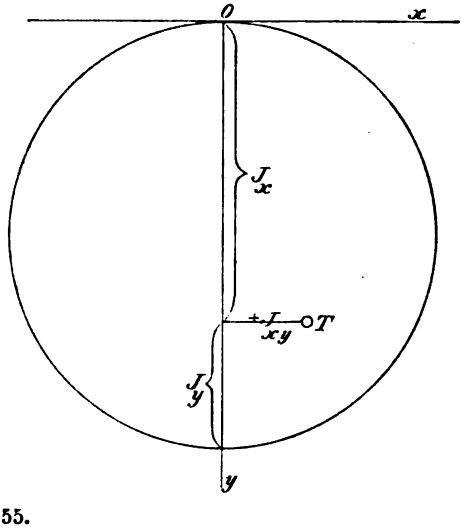


Fig. 54 und 55.

Digitized by Google

x-Achse zur Kreistangente gemacht. Beim Auftragen von J_{xy} ist auf das Vorzeichen zu achten.

Fig. 56 zeigt die Ermittelung der Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente. Es wurde ein die x-Achse berührender Kreis benutzt. Der durch T gelegte Durchmesser bestimmt die Hauptachsen OA und OB;

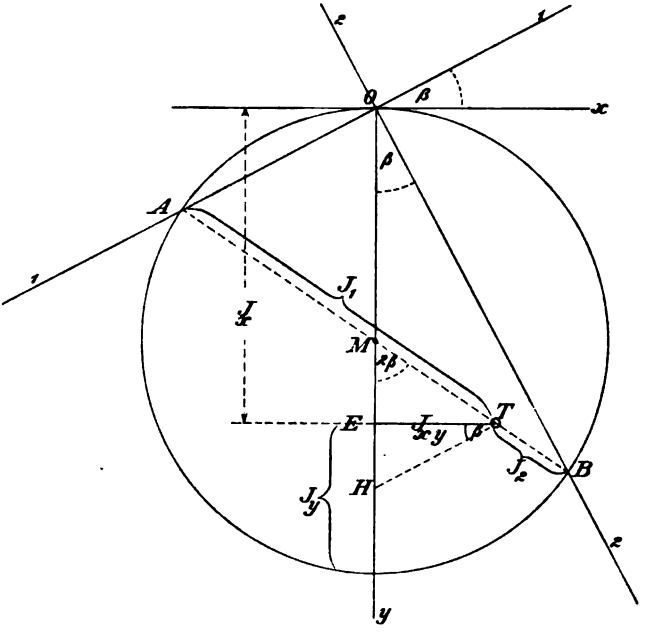


Fig. 56.

die Strecken TA und TB stellen die Hauptträgheitsmomente dar; es ist

$$\overline{TA} = J_1 = J_{max}$$
$$\overline{TB} = J_2 = J_{min}.$$

Aus der Fig. 56 lassen sich auch leicht die in No. 33 abgeleiteten Formeln folgern. Es ist nämlich

$$\overline{MT} = \frac{J_1 - J_2}{2}$$
$$\overline{ME} = \frac{J_x - J_y}{2}$$
$$\frac{J_1 - J_2}{2} = \frac{J_x - J_y}{2} \sec 2\beta$$
$$J_1 + J_2 = J_x + J_y,$$

Digitized by Google

folglich

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y)\sec 2\beta$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - \frac{1}{2}(J_x - J_y)\sec 2\beta.$$

Der Winkel β ist bestimmt durch

$$(7) \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{\overline{ET}}{\overline{ME}} = \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}.$$

Macht man $\overline{MH} = \overline{MT}$, so ist $\angle ETH = \beta$, und man findet

$$\overline{EH} = \overline{OH} - \overline{OE} = \overline{AT} - \overline{OE} = J_1 - J_x = J_{xy} \operatorname{tg}\beta,$$

so daß man auch erhält:

$$(8) \quad \begin{cases} J_1 = J_x + J_{xy} \operatorname{tg}\beta \\ J_2 = J_y - J_{xy} \operatorname{tg}\beta. \end{cases}$$

Besitzt ein Querschnitt eine Symmetrieachse, so bezieht man ihn zweckmäßig gleich von vornherein auf Hauptachsen. Dieser Fall ist in Fig. 57 dargestellt worden. Es ist $\overline{OT} = J_1$ und $\overline{TA} = J_2$. Die

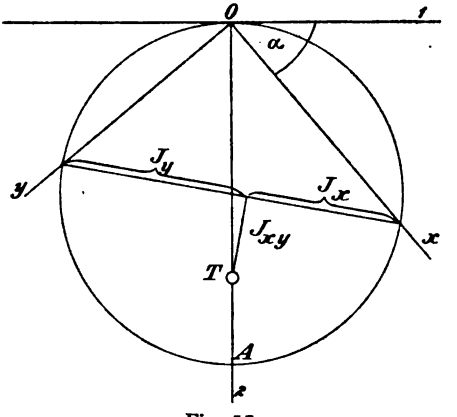


Fig. 57.

Figur zeigt die Ermittelung von J_x, J_y, J_{xy} für ein beliebiges, durch O gelegtes Achsenkreuz. Rechnerisch findet man aus den Hauptträgheitsmomenten

$$(9) \quad J_x = J_1 \cos^2\alpha + J_2 \sin^2\alpha$$

$$(10) \quad J_y = J_1 \sin^2\alpha + J_2 \cos^2\alpha = J_1 + J_2 - J_x$$

$$(11) \quad J_{xy} = \frac{1}{2}(J_1 - J_2)\sin 2\alpha.$$

Digitized by Google

Zahlenbeispiel. Für das auf Seite 42 untersuchte Z-Eisen wurden gefunden:

$$J_x = 928{,}428 \quad J_y = 332{,}948 \quad J_{xy} = 427{,}133.$$

Die Lage der Hauptachsen ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 J_{xy}}{J_x - J_y} = \frac{854{,}266}{595{,}475}$$

$$\beta = 27° 33' 38'' \quad \operatorname{tg}\beta = 0{,}52191.$$

Für die Hauptträgheitsmomente ergeben sich die Werte

$$J_1 = J_x + J_{xy} \operatorname{tg}\beta = J_x + 222{,}925 = 1151{,}35 \text{ cm}^4$$

$$J_2 = J_y - 222{,}925 = 110{,}02 \text{ „}$$

35. Wichtige Beziehung zwischen zwei zugeordneten Richtungen. Gegeben seien für rechtwinklige Koordinaten $x\,y$ die Querschnittsmomente J_x, J_y, J_{xy}; gesucht eine Beziehung zwischen den Winkeln α' und α'', welche zwei zugeordnete Richtungen mit der x-Achse bilden, Fig. 58. Sind y' und y'' die Lote von irgend einem Querschnittspunkte auf die beiden zugeordneten Achsen, so muß

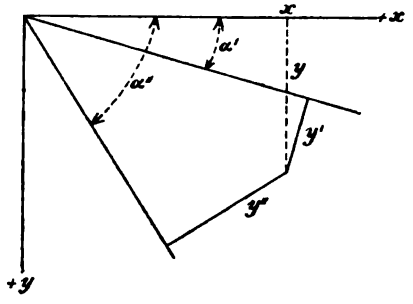


Fig. 58.

$$\int y' y'' \, dF = o$$

sein. Nun ist aber

$$y' = y \cos\alpha' - x \sin\alpha'$$

$$y'' = x \sin\alpha'' - y \cos\alpha'',$$

mithin

$$\cos\alpha' \sin\alpha'' \int yx\,dF - \sin\alpha' \sin\alpha'' \int x^2 dF - \cos\alpha' \cos\alpha'' \int y^2 dF + \sin\alpha' \cos\alpha'' \int xy\,dF = 0,$$

und hieraus ergibt sich die Beziehung

$$(12) \quad J_{xy}(\operatorname{tg}\alpha' + \operatorname{tg}\alpha'') = J_x + J_y \operatorname{tg}\alpha' \operatorname{tg}\alpha''.$$

Ist α' gegeben, so findet man

$$(13) \quad \operatorname{tg}\alpha'' = \frac{J_x - J_{xy}\operatorname{tg}\alpha'}{J_{xy} - J_y \operatorname{tg}\alpha'} = \frac{J_x \operatorname{cotg}\alpha' - J_{xy}}{J_{xy}\operatorname{cotg}\alpha' - J_y}.$$

Für $\alpha' = 0$ erhält man $\operatorname{tg}\alpha'' = \dfrac{J_x}{J_{xy}}$

„ $\alpha' = 90°$ „ „ $\operatorname{tg}\alpha'' = \dfrac{J_{xy}}{J_y}$.

Digitized by Google

Sind die Achsen x und y Hauptachsen, so wird $J_{xy} = 0$ und

$$J_x + J_y \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha'' = 0.$$

§ 8.

Die Trägheitsellipse.

36. Annahme rechtwinkliger Koordinaten. Ein Querschnitt sei auf die irgend einem Punkte O entsprechenden Hauptachsen (1) und 2) bezogen.

Die Haupt-Trägheitshalbmesser $i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}}$ und $i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}}$ seien gegeben. Dann findet man für den Trägheitshalbmesser i_x in Bezug auf eine unter dem Winkel α gegen die Hauptachse (1) durch den Punkt O gelegte x-Achse die Gleichung

(1) $i_x^2 = i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha$ (nach Gleich. 9 auf Seite 51).

Trägt man auf der zur x-Achse senkrechten y-Achse die Strecke $\overline{OA} = i_x$ ab (Fig. 59), legt durch den Punkt A eine Parallele zur x-Achse und wiederholt dies für alle möglichen Lagen der x-Achse, so umhüllen jene Parallelen eine

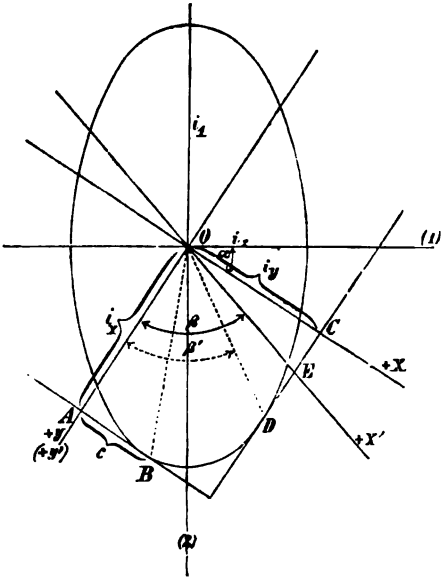


Fig. 59.

Ellipse, welche die *Trägheitsellipse* für den Punkt O heißt und den besonderen Namen *Zentralellipse* führt, sobald O der Schwerpunkt des Querschnittes ist. Die Halbachsen der Trägheitsellipse fallen mit den Querschnitts-Hauptachsen zusammen und sind $= i_1$ (senkrecht zur Achse 2) und $= i_2$ (senkrecht zur Achse 1).

Digitized by Google

Der Beweis für den vorstehenden Satz ist der folgende. Die Gleichung einer Ellipse lautet, bezogen auf ihre Hauptachsen i_1 und i_2 als Koordinatenachsen, und wenn die Koordinaten irgend eines Punktes B der Ellipse mit x_1 und y_1 bezeichnet werden (wobei $y_1 \parallel i_1$ sein möge):

$$(2) \quad \frac{y_1^2}{i_1^2} + \frac{x_1^2}{i_2^2} = 1;$$

aus ihr folgt durch Differentiieren:

$$\frac{y_1 dy_1}{i_1^2} + \frac{x_1 dx_1}{i_2^2} = 0 \quad \text{oder} \quad x_1 = -y_1 \frac{i_2^2 dy_1}{i_1^2 dx_1},$$

und es müssen daher die Koordinaten des Ellipsenpunktes B, dem eine unter α gegen die Achse (1) geneigte Tangente entsprechen soll, außer der Gleich. (2) noch der Gleichung genügen:

$$(3) \quad x_1 = -y_1 \frac{i_2^2}{i_1^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Nun folgt aus (2) und (3) mit Beachtung von (1):

$$y_1^2 = \frac{i_1^4 \cos^2 \alpha}{i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha} = \frac{i_1^4 \cos^2 \alpha}{i_x^2}$$

also: $$y_1 = \frac{i_1^2 \cos \alpha}{i_x} \quad \text{und hierauf} \quad x_1 = \frac{i_2^2 \sin \alpha}{i_x},$$

und es ist deshalb das Lot von O auf die in B an die Ellipse gelegte Tangente

$$\overline{OA} = y_1 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha = \frac{i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha}{i_x} = i_x,$$

was zu beweisen war.

Für die mit c bezeichnete Entfernung des Punktes A vom Berührungspunkte B ergibt sich:

$$c = y_1 \sin \alpha - x_1 \cos \alpha = \frac{(i_1^2 - i_2^2) \sin \alpha \cos \alpha}{i_x} = \frac{(J_1 - J_2) \sin 2\alpha}{2 i_x F},$$

und aus dieser Gleichung folgt mit Beachtung von Gleich. (11) auf Seite 51:

$$(4) \quad c = \frac{J_{xy}}{i_x F}, \text{ also } J_{xy} = c i_x F,$$

so daß man im stande ist, mit Hilfe der Trägheitsellipse die Querschnittsmomente J_x, J_y, J_{xy} für beliebige (zunächst rechtwinklige) Koordinatenachsen zu bestimmen.

Für die Anwendung viel bequemer ist natürlich der im § 7 benutzte Kreis.

Ist CD die der y-Achse parallele Tangente an die Trägheitsellipse und D ihr Berührungspunkt, so ist $\overline{OC} = i_y$ und $\overline{DC} = \frac{J_{xy}}{i_y F}$, also, wenn $\overline{DC} = e$ gesetzt wird, $J_{xy} = e i_y F$.

Die Richtungen OB und OC sind *konjugierte Richtungen bezüglich der Trägheitsellipse*, desgleichen OD und OA.

Einführung schiefwinkliger Koordinaten. Dreht man die x-Achse, bei liegenbleibender y-Achse um den Winkel $90° - \beta$ in die Lage x' (Fig. 59 und 41), so erhält man (nach No. 30) in Bezug auf die schiefwinkligen Achsen y', x':

$$J_{y'} = J_y \operatorname{cosec}^2 \beta \text{ und } J_{x'y'} = \operatorname{cosec} \beta \, (J_{xy} - J_y \operatorname{cotg} \beta),$$

woraus, mit $J_{y'} = F i_{y'}^2$; $J_y = F i_y^2$; $J_{xy} = e i_y F$, sich ergibt:

$$i_{y'} = i_y \operatorname{cosec} \beta \text{ und } J_{x'y'} = i_y \operatorname{cosec} \beta \, (e - i_y \operatorname{cotg} \beta) F.$$

Bezeichnet man den Schnittpunkt der x'-Achse und der Ellipsentangente DC mit E, so ist $\overline{OE} = i_{y'}$: $\overline{DE} = e - i_y \operatorname{cotg} \beta$, und es folgt daher:

$$J_{y'} = F \cdot \overline{OE}^2; \quad J_{x'y'} = F \cdot \overline{OE} \cdot \overline{ED}.$$

Digitized by Google

Erhält die x'-Achse die der y-Achse konjugierte Richtung OD, so wird $J_{x'y'} = 0$, und es ergibt sich der Satz:

Das auf konjugierte Durchmesser der Trägheitsellipse bezogene Zentrifugalmoment des Querschnittes ist $= 0$.

Der Winkel β', welchen die einander konjugierten Richtungen OD und OA einschließen, ist bestimmt durch die Gleichung: $\operatorname{cotg} \beta' = \frac{J_{xy}}{J_y}$. Es ergibt sich dies sowohl aus dem am Schluß von No. 30 ausgesprochenen Gesetze, als auch aus Fig. 59; hier findet man

$$\operatorname{cotg} \beta' = \frac{DC}{\overline{OC}} = \frac{e}{i_y} = \frac{J_{xy}}{J_y}.$$

Hat die x'-Achse die Lage OD, so ist der Trägheitshalbmesser $i_{y'}$ gleich dem Ellipsenhalbmesser OD.

Kennt man J_x, J_y, J_{xy} für irgend ein Achsenkreuz, so ist man im stande, in jedem Ellipsenquadranten eine Tangente und deren Berührungspunkt anzugeben (in Fig. 59 die Punkte B, D, die Tangenten AB, DC, sowie die entsprechenden 2 Punkte und 2 Tangenten auf der anderen Seite der y-Achse). Die Ellipse ist also durch 8 Stücke gegeben, mithin überbestimmt, da bereits 5 Stücke zur Bestimmung eines Kegelschnittes genügen.

III. Abschnitt.

Spannungen in geraden Stäben.

§ 9.

Die Normalspannungen.

37. Gleichgewichtsbedingungen. Ein von irgend welchen endlichen Kräften ergriffener gerader, elastischer Stab wird bei genügender Festigkeit seine ursprüngliche Form so lange ändern, bis die in seinem Inneren hervorgerufenen Kräfte den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Diesen Gleichgewichtszustand wollen wir unter der Voraussetzung betrachten, daß die entstandene Formänderung sehr gering ist und ihr Einfluß auf die Lage der Angriffspunkte und die Richtungen der Kräfte vernachlässigt werden darf; wir denken uns also bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen alle Kräfte in denjenigen Lagen, welche sie im Falle eines vollkommen starren Stabes einnehmen würden.

Durch einen zur Stabachse AB (Fig. 60) senkrechten Querschnitt F zerlegen wir den Stab in zwei Teile und vereinigen alle an dem

Digitized by Google

einen der beiden Teile, z. B. an dem linken, angreifenden äußeren Kräfte P_1, P_2, P_3 . . . . (mittels des in No. 19 beschriebenen Verfahrens) zu zwei Kräften N und Q, deren erste senkrecht zum Querschnitte ist, während die andere in der Ebene des Querschnittes wirkt. N heißt die *Längskraft für den Querschnitt* F; sie möge positiv angenommen werden, sobald sie das Bestreben hat, den linken Stabteil von dem festgehalten gedachten rechten Teile zu entfernen. Die Kraft Q wird die *Querkraft für den Querschnitt* F genannt; ihr Vorzeichen ist vorläufig gleichgültig.

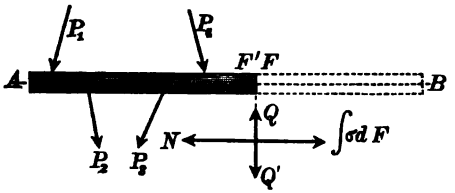


Fig. 60.

Neben den äußeren Kräften greifen an dem betrachteten linken Stabstücke noch die vom rechten Stabstücke auf den Querschnitt F ausgeübten inneren Kräfte an. Die auf ein unendlich kleines Querschnittsteilchen dF wirkende Kraft setzen wir gleichmäßig über dF verteilt voraus; wir zerlegen sie in die Seitenkräfte σdF und τdF, erstere rechtwinklig zur Querschnittsebene gerichtet, letztere mit dieser Ebene zusammenfallend. Hierbei bedeuten σ und τ die auf die Einheit von dF wirkenden Kräfte; sie werden *Spannungen* genannt, und zwar heißt σ eine *Normalspannung* und τ eine *Schubspannung*. σ wird in der Regel als *Zugspannung positiv* und als *Druckspannung (Pressung) negativ* angenommen.

Sollen die inneren und äußeren Kräfte miteinander im Gleichgewicht sein, so muß

1) die Mittelkraft $\int \sigma dF$ aller zur Querschnittsebene senkrechten Kräfte σdF der Längskraft N entgegengesetzt gleich sein und mit N zusammenfallen.
2) die Mittelkraft Q' aller in der Querschnittsebene wirkenden Kräfte τdF der Querkraft Q entgegengesetzt gleich sein und mit Q zusammenfallen.

38. Ermittelung der Normalspannungen σ. Wir beschäftigen uns zunächst nur mit den Spannungen σ, beziehen den Querschnitt auf ein schiefwinkliges Achsenkreuz ξ, η und bezeichnen die Koordinaten des Angriffspunktes K der Längskraft N mit ξ_k, η_k. Dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen, denen die Spannungen σ genügen müssen

Digitized by Google

$$(1) \qquad N = \int \sigma dF$$

$$(2) \qquad N\xi_k = \int \xi \sigma dF$$

$$(3) \qquad N\eta_k = \int \eta \sigma dF,$$

sie sollen in diesem Bande unseres Buches nur für den Fall aufgelöst werden, daß σ eine lineare Funktion der Koordinaten ξ und η ist, daß also

$$(4) \qquad \sigma = a + b\xi + c\eta$$

gesetzt werden darf, wo a, b, c für den betrachteten Querschnitt feste Werte bedeuten. Trägt man dann in jedem Punkte $\xi\eta$ die

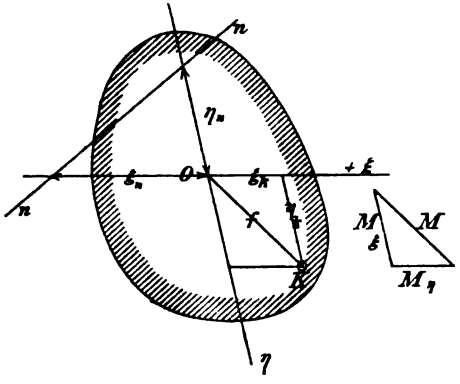


Fig. 61.

daselbst herrschende Spannung rechtwinklig zum Querschnitt als Ordinate auf, so liegen die Endpunkte der Strecke σ in einer Ebene, welche den Querschnitt in einer Geraden nn, der sogenannten *Nulllinie* schneidet. In den Punkten einer zur Nulllinie parallelen Geraden herrschen gleich große Spannungen; die größte Spannung entsteht in dem von der Nulllinie am weitesten abgelegenen Querschnittspunkte.

Man erkennt, daß sich für den Fall der Proportionalität zwischen Spannungen und Formänderungen — also für den Fall der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes — die Einführung der Gleichung (4) mit der in der Festigkeitslehre üblichen Voraussetzung deckt, daß bei der Berechnung der Spannungen σ die ursprünglich ebenen Querschnitte auch nach der Biegung des Stabes als Ebenen betrachtet werden dürfen und daß sowohl die Krümmung der materiellen Linien, welche entsprechende Punkte zweier benachbarten Querschnitte verbinden, als

Digitized by Google

auch die Querkontraktion vernachlässigbar ist. Die Brauchbarkeit dieser Annahme ist für gerade Stäbe mit im Verhältnis zur Stablänge kleinen Querschnitts-Abmessungen durch eine Reihe schärferer Untersuchungen nachgewiesen worden, so von *De Saint-Venant* in Liouvilles Journal, 1856, von *Kirchhof* in Crelles Journal, 1859, von *Pochhammer* in dessen Werke über das Gleichgewicht des elastischen Stabes (Kiel, 1879).

In erster Linie dürfen also die auf Grund der linearen Spannungsverteilung gewonnenen Formeln für Stäbe aus Flußeisen, Schweißeisen und Stahl benutzt werden, solange die Beanspruchung innerhalb der für diese Stoffe nachgewiesenen Proportionalitätsgrenze liegt. Aber auch bei der Berechnung der Querschnitts-Abmessungen von Holz- und Steinbauten (bei letzteren nur im Falle des Überwiegens von Druckspannungen) hat sich jenes überaus einfache Spannungsgesetz recht gut bewährt.

Damit sich nun für die mittels der 3 Gleichgewichtsbedingungen

$$N = \int (a + b\xi + c\eta)\, dF$$

$$N\xi_k = \int (a + b\xi + c\eta)\, \xi dF$$

$$N\eta_k = \int (a + b\xi + c\eta)\, \eta dF$$

zu berechnenden Werte a, b, c möglichst übersichtliche Ausdrücke ergeben, wählen wir zu Koordinatenachsen zwei einander zugeordnete Schwerachsen (vergl. Seite 48); es wird dann

$$\int \xi dF = 0,\ \int \eta dF = 0,\ \int \xi\eta dF = 0$$

und die Gleichheitsbedingungen gehen über in

$$N = aF$$

$$N\xi_k = b \int \xi^2 dF = bJ_\eta$$

$$N\eta_k = c \int \eta^2 dF = cJ_\xi .$$

Setzt man die hieraus berechneten Werte a, b, c in die Gleichung (4) ein, so erhält man für die gesuchte Spannung den Ausdruck

$$(5) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{N\xi_k \xi}{J_\eta} + \frac{N\eta_k \eta}{J_\xi}.$$

Die Nulllinie n hat die Gleichung

$$(6) \quad 0 = \frac{1}{F} + \frac{\xi_k \xi}{J_\eta} + \frac{\eta_k \eta}{J_\xi},$$

Digitized by Google

sie schneidet auf den Koordinatenachsen die Strecken

$$(7)\quad \begin{cases} \xi_n = -\dfrac{J_\eta}{F\xi_k} = -\dfrac{i_\eta^2}{\xi_k}, \\ \eta_n = -\dfrac{J_\xi}{F\eta_k} = -\dfrac{i_\xi^2}{\eta_k} \end{cases}$$

ab, ihre Lage ist unabhängig von der Größe der Kraft N.

Die durch den Angriffspunkt K und den Schwerpunkt O gelegte Gerade führt den Namen *Kraftlinie*. Ihre Neigung ist durch das Verhältnis $\eta_n : \xi_k$ gegeben, und die Neigung der Nulllinie durch die Zahl $\eta_n : \xi_n$. Zwischen beiden Verhältniszahlen besteht die Beziehung

$$(8)\quad \frac{\eta_n}{\xi_n} \cdot \frac{\eta_k}{\xi_k} = \frac{J_\xi}{J_\eta} = \frac{i_\xi^2}{i_\eta^2}.$$

Aus den Gleichungen (7) und (8) folgt: *Zu jedem Angriffspunkte K gehört eine bestimmte Nulllinie n und zu jeder Kraftlinien-Richtung eine bestimmte Nulllinien-Richtung.*

Liegt K im Schwerpunkte, so liegt die Nulllinie im Unendlichen; liegt K im Unendlichen, so geht die Nulllinie durch den Schwerpunkt. Im zweiten Falle muß $N = 0$ sein; der Querschnitt wird durch eine unendlich ferne, unendlich kleine Längskraft (d. i. ein Kräftepaar) beansprucht.

Wichtige Schlüsse lassen sich auch aus dem Umstande ziehen, daß in den Gleichungen (5) und (6) die Koordinaten nur in den Produkten $\xi_k\xi$ und $\eta_k\eta$, deren Faktoren miteinander vertauscht werden dürfen, auftreten.

Betrachtet man in Gleich. (6) ξ_k und η_k als die laufenden Koordinaten eines Angriffspunktes K, der sich in einer durch diese Gleichung bestimmten Geraden n' bewegt, so sind ξ und η die festen Koordinaten desjenigen Punktes K', durch den sämtliche zu den Punkten K gehörenden Nulllinien n gehen. Wird der Punkt K' Angriffspunkt, so wird die Gerade n' Nulllinie. Hieraus folgt der wichtige Satz:

Beschreibt eine Nulllinie nn einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt K' ist, so bewegt sich ihr Angriffspunkt K auf der dem Punkte K' entsprechenden Nulllinie n'n'.

Bewegt sich der Angriffspunkt K auf einer Geraden n'n', so beschreibt seine Nulllinie nn einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt K' der zur Nulllinie n'n' gehörige Angriffspunkt ist.

Aus der Gleichung (5) aber folgt der Satz:

Die Spannung σ, welche eine im Punkte $\xi_k\eta_k$ angreifende Längskraft N im Punkte $\xi\eta$ erzeugt, ist ebenso groß wie die Spannung, welche die im Punkte $\xi\eta$ angreifende Kraft N im Punkte $\xi_k\eta_k$ hervorbringt.

Digitized by Google

Wir werden diesen Satz in der Folge durch die kurze Gleichung

$$\sigma_{AB} = \sigma_{BA}$$

ausdrücken, in welcher σ_{AB} die Spannung bedeutet, welche im Punkte A durch eine in B angreifende Last von der Größe *1* erzeugt wird. Ganz ebenso ist σ_{BA} zu lesen.

39. Einführung des Biegungsmomentes. Das Produkt aus der Längskraft N und ihrer Entfernung f vom Schwerpunkte S nennt man das *Biegungsmoment* (auch das *Angriffsmoment* oder kurz das *Moment*) *für den fraglichen Querschnitt;* es möge mit M bezeichnet werden. Die Produkte

$$N\eta_k = M_\xi \text{ und } N\xi_k = M_\eta$$

wollen wir *die auf die Achsen* ξ *und* η *bezogenen Seitenmomente* von

$$(9) \quad M = Nf$$

nennen. Wir erhalten dann

$$(10) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_\eta}{J_\eta}\xi + \frac{M_\xi}{J_\xi}\eta.$$

Ist $N = 0$, sind also beispielsweise sämtliche äußeren Kräfte senkrecht zur Stabachse gerichtet, so wird der Querschnitt nur durch ein Moment M beansprucht, und es ergibt sich

$$(11) \quad \sigma = \frac{M_\eta}{J_\eta}\xi + \frac{M_\xi}{J_\xi}\eta.$$

Es ist dies der Belastungsfall, den wir vorhin als Beanspruchung des Querschnitts durch eine unendlich kleine, unendlich ferne Längskraft bezeichneten. Die Nulllinie n geht durch den Schwerpunkt; sie ist parallel zu einer Geraden, die auf den Koordinatenachsen Strecken η_n und ξ_n abschneidet, welche die Bedingung

$$(12) \quad \frac{\eta_n}{\xi_n} = -\frac{i_\xi^2}{i_\xi^2} \cdot \frac{M_\eta}{M_\xi}$$

erfüllen. Die eine der beiden Strecken darf beliebig groß gewählt werden.

40. Einführung rechtwinkliger Koordinaten. Sollen die in No. 38 und No. 39 abgeleiteten Gleichungen für rechtwinklige Koordinaten gelten, so muß der Querschnitt auf Hauptachsen bezogen werden; denn diese sind die einzigen sich rechtwinklig schneidenden konjugierten Achsen. Besitzt der Querschnitt eine Symmetrieachse, so ist die Lage der Hauptachsen von vornherein bekannt; denn jede Symmetrieachse ist eine Hauptachse. Die Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente der Walzeisen-Profile findet man in dem bekannten Normalprofilbuche und in vielen Taschenbüchern; hier lassen sich also die bisher gewonnenen Formeln ebenfalls sofort verwerten. Für andere Fälle aber empfiehlt es sich, wenn rechtwinklige Koordinaten

Digitized by Google

eingeführt werden sollen, diese Gleichungen umzuformen. Zu diesem Zwecke vereinfachen wir die für schiefwinklige Koordinaten entwickelten Gleichungen zunächst dadurch, daß wir die Kraftlinie zur $\eta =$ Achse machen. Es wird dann $\xi_k = 0$, $M_\eta = 0$, $M_\xi = M$ und es ergibt sich

$$(13) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{N\eta_k \eta}{J_\xi} = \frac{N}{F} + \frac{M_\xi \eta}{J_\xi}.$$

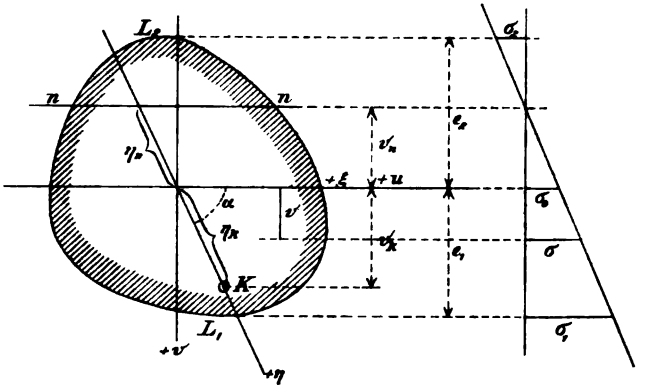


Fig. 62.

Die Nulllinie wird parallel zur ξ-Achse und schneidet die η-Achse im Abstande

$$(14) \quad \eta_n = -\frac{J_\xi}{F\eta_k} = -\frac{i_\xi^2}{\eta_k}$$

vom Schwerpunkte. *Wir erkennen jetzt, daß die Richtungen von Nulllinie und Kraftlinie einander zugeordnet sind,* eine Eigenschaft, die sich auch, allerdings weniger einfach, aus den in No. 38 aufgestellten Gleichungen hätte folgern lassen.

Nun beziehen wir den Querschnitt auf das rechtwinklige Achsenkreuz u, v und wählen die der Kraftlinie zugeordnete Achse (d. i. unsere bisherige ξ-Achse) zur u-Achse. Bezeichnet α den von den Achsen ξ und η eingeschlossenen Winkel, so bestehen zwischen den bisher benutzten und den neuen Koordinaten die Gleichungen

$$\eta = \frac{v}{\sin\alpha}, \quad \eta_k = \frac{v_k}{\sin\alpha}$$

und es ergibt sich

$$J_\xi = \int \eta^2 dF = \frac{1}{\sin^2\alpha}\int v^2 dF = \frac{J_u}{\sin^2\alpha};$$

mithin ist

$$\frac{\eta\eta_k}{J_\xi} = \frac{vv_k}{J_u}.$$

Digitized by Google

Der für σ gefundene Ausdruck geht also über in

$$(15) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{N v_k v}{J_u} = \frac{N}{F} + \frac{M_u v}{J_u},$$

wo $M_u = M \sin \alpha$ das auf die u-Achse bezogene Seitenmoment ist, und die Lage der Nulllinie ist bestimmt durch

$$(16) \quad v_n = -\frac{J_u}{F v_k} = -\frac{i_u^2}{v_k}.$$

Die für rechtwinklige Koordinaten gültigen Gleichungen (15) und (16) haben also dieselbe Form, wie die für schiefwinklige Koordinaten gefundenen Ausdrücke (13) und (14).

In Fig. 62 haben wir noch einen Überblick über die Spannungsverteilung gegeben, indem wir die Abstände v als Abscissen und die zugehörigen σ als Ordinaten auftrugen. Dieses Spannungsbild ist durch zwei Werte σ bestimmt, beispielsweise durch eine der beiden für die äußersten Querschnittspunkte L_1 und L_2 berechneten Spannungen

$$(17) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{N}{F} + \dfrac{N v_k e_1}{J_u} = \dfrac{N}{F} + \dfrac{M_u e_1}{J_u} \\ \sigma_2 = \dfrac{N}{F} - \dfrac{N v_k e_2}{J_u} = \dfrac{N}{F} - \dfrac{M_u e_2}{J_u} \end{cases}$$

und durch die Spannung

$$(18) \quad \sigma_0 = \frac{N}{F}$$

an der Stelle $v = 0$. Es kann sich aber auch als zweckmäßig erweisen, σ für zwei Punkte, deren Abstände v durch runde Zahlen ausgedrückt sind, und die auch außerhalb des Querschnittes angenommen werden dürfen, zu berechnen.

41. Weitere Umformungen für rechtwinklige Koordinaten. Meistens ist es am zweckmäßigsten, den Querschnitt auf solche rechtwinklige Schwerachsen xy zu beziehen, welche zu einer möglichst einfachen Berechnung von J_x, J_y, J_{xy} führen. Bildet dann die Kraftlinie mit der x-Achse den Winkel α_k (Fig. 63), so ist der Neigungswinkel α_n der zur Nulllinie parallelen u-Achse durch die auf Seite 52 abgeleitete Gleichung

$$(19) \quad \operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_k}{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha_k} = \frac{J_x \operatorname{cotg} \alpha_k - J_{xy}}{J_{xy} \operatorname{cotg} \alpha_k - J_y}$$

bestimmt. Für das in die Formel (15) einzusetzende Trägheitsmoment J_u findet man nach Gleich. (1), Seite 45 den Wert

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha_n + J_y \sin^2 \alpha_n - 2 J_{xy} \sin \alpha_n \cos \alpha_n$$
$$= \cos \alpha_n (J_x \cos \alpha_n - J_{xy} \sin \alpha_n) - \sin \alpha_n (J_{xy} \cos \alpha_n - J_y \sin \alpha_n)$$

Digitized by Google

und dieser geht wegen der aus der Gleich. (19) folgenden Beziehung

$$\frac{J_{xy}\cos\alpha_n - J_y\sin\alpha_n}{J_x\cos\alpha_n - J_{xy}\sin\alpha_n} = \operatorname{cotg}\alpha_k = \frac{\cos\alpha_k}{\sin\alpha_k}$$

über in

$$J_n = (J_x\cos\alpha_n - J_{xy}\sin\alpha_n)\frac{\cos\alpha_n\sin\alpha_k - \sin\alpha_n\cos\alpha_k}{\sin\alpha_k}$$

$$= (J_x\cos\alpha_n - J_{xy}\sin\alpha_n)\frac{\sin(\alpha_k - \alpha_n)}{\sin\alpha_k}.$$

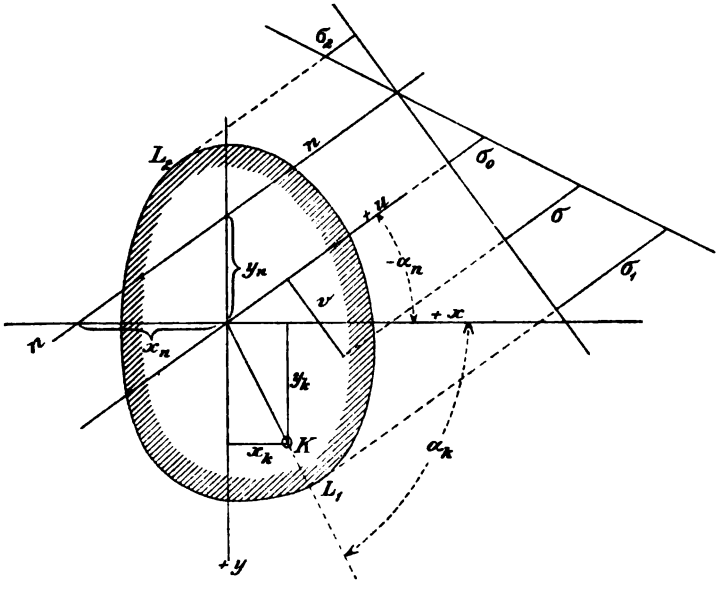


Fig. 63.

Setzt man diesen Wert in die Gleichung

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_n v}{J_n} = \frac{N}{F} + \frac{M\sin(\alpha_k - \alpha_n)v}{J_n}$$

ein und bezeichnet man das auf die x-Achse bezogene Seitenmoment mit M_x,

$$(20)\quad M_x = M\sin\alpha_k,$$

so erhält man den einfachen Ausdruck

$$(21)\quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x v}{J_x\cos\alpha_n - J_{xy}\sin\alpha_n}.$$

Digitized by Google

Drückt man noch v durch x und y aus,

$$v = y \cos \alpha_n - x \sin \alpha_n,$$

so findet man für die Spannung an der Stelle xy den Wert

$$(22) \quad \sigma = \frac{N}{F} + M_x \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}.$$

In derselben Weise läßt sich auch die Formel ableiten

$$(23) \quad \sigma = \frac{N}{F} + M_y \frac{x - y \operatorname{cotg} \alpha_n}{J_y - J_{xy} \operatorname{cotg} \alpha_n}.$$

Beide Formeln sind nötig. Ist $\alpha_k = 0$, also auch $M_x = 0$, so ist die Richtung der Nulllinie durch

$$(24) \quad \operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_x}{J_{xy}}$$

gegeben, und das zweite Glied der Gleich. (22) nimmt den unbestimmten Wert $0 : 0$ an. Wird $M_y = 0$, so versagt die zweite Formel; es wird dann $\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_{xy}}{J_y}$.

Setzt man $\sigma = 0$ und $M_x = N y_k$, so erhält man aus Formel (22) die Gleichung der Nulllinie

$$(25) \quad 0 = \frac{1}{F} + y_k \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n},$$

während aus Formel (23) für dieselbe Linie die Gleichung

$$(26) \quad 0 = \frac{1}{F} + x_k \frac{x - y \operatorname{cotg} \alpha_n}{J_y - J_{xy} \operatorname{cotg} \alpha_n}$$

folgt. Diese Linie schneidet auf der y-Achse die Strecke

$$(27) \quad y_n = - \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}{F y_k}$$

ab und auf der x-Achse die Strecke

$$(28) \quad x_n = - \frac{J_y - J_{xy} \operatorname{cotg} \alpha_n}{F x_k}.$$

Kennt man den einen der beiden Werte y_n, x_n, so findet man den anderen auch mittels der Gleichung

$$\frac{y_n}{x_n} = - \operatorname{tg} \alpha_n.$$

42. Zeichnerisches Verfahren. Wir setzen den in No. **41** behandelten Fall voraus, beziehen also den Querschnitt auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz xy, das eine möglichst einfache Ermittelung von J_x, J_y, J_{xy} gestattet. Hierauf benutzen wir zur Bestimmung der zur Kraftlinie k gehörigen Nulllinien-Richtung den von *Mohr* eingeführten Kreis, vergl. No. **34**. Wir tragen auf der y-Achse die Strecken

Digitized by Google

$\overline{OE} = J_u$ und $\overline{EC} = J_y$ auf, und setzen von E aus rechtwinklig zur y-Achse die Strecke $\overline{ET} = + J_{xy}$ ab. Ist J_{xy} negativ, so liegt der Punkt T im zweiten Quadranten. Nun wird die Kraftlinie mit dem durch den Durchmesser $\bar{O}\bar{C}$ bestimmten Kreise in A zum Schnitt gebracht und mittels der Sehne ATB die Richtung der u-Achse festgelegt. Der

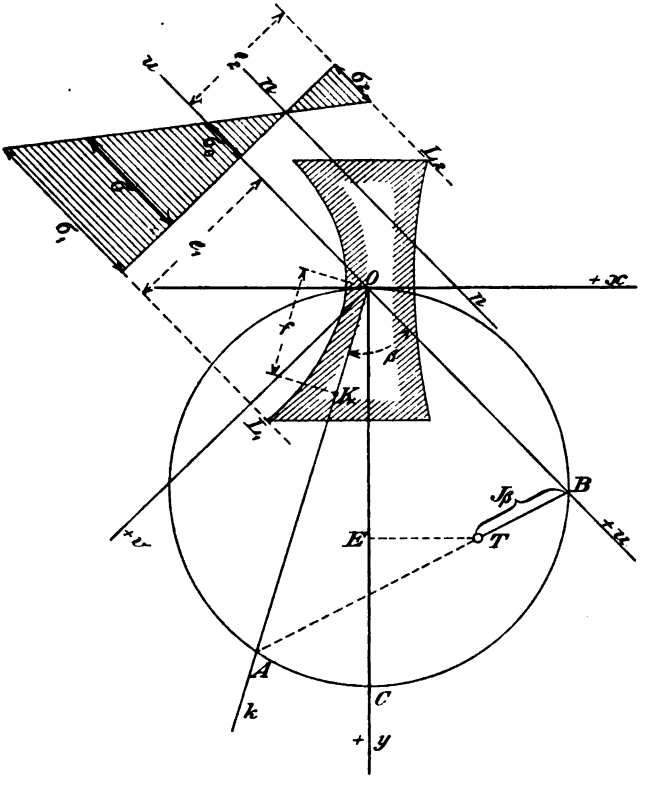


Fig. 64.

Abstand des Punktes T von der in B an den Kreis gezogenen Tangente stellt das Trägheitsmoment J_u dar, weshalb die Strecke $\overline{TB}$ den Wert $\frac{J_u}{\sin \beta}$ angibt. Dieser Ausdruck soll in der Folge mit J_β bezeichnet werden. Nun ist nach Gleich. (15), wegen $M_u = M \sin \beta$, wo $M = Nf$,

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M \sin \beta \, r}{J_u},$$

Digitized by Google

und man erhält daher

$$(29) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J_\beta}.$$

Für die äußersten Querschnittspunkte ergibt sich

$$(30) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{N}{F} + \dfrac{Me_1}{J_\beta} \\ \sigma_2 = \dfrac{N}{F} - \dfrac{Me_2}{J_\beta}. \end{cases}$$

In den Punkten der u-Achse herrscht

$$\sigma_0 = \frac{N}{F}.$$

Durch irgend zwei Werte σ ist das Spannungsbild in Fig. 64 bestimmt.

43. Einführung des Begriffs „Widerstandsmoment des Querschnitts". Die Spannungen σ_1 und σ_2 in den beiden äußersten Punkten L_1 und L_2 des Querschnitts (Fig. 61—64) haben stets die Form

$$(31) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{N}{F} + \dfrac{M}{W_1} \\ \sigma_2 = \dfrac{N}{F} - \dfrac{M}{W_2} \end{cases}$$

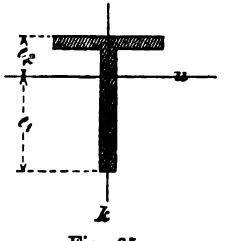


Fig. 65.

wo W_1 und W_2 Werte bedeuten, die unabhängig von der Größe des Momentes M sind und durch die Richtung der Kraftlinie bestimmt sind. Man nennt W_1 und W_2 die zu der fraglichen Kraftlinie gehörigen *Widerstandsmomente* des Querschnitts. Erfolgt die Berechnung der Spannungen beispielsweise nach den Gleichungen (17) auf Seite 62, so findet man

$$W_1 = \frac{J_u}{e_1 \sin\beta} \quad \text{und} \quad W_2 = \frac{J_u}{e_2 \sin\beta}.$$

Wird das zeichnerische Verfahren gewählt, so ergibt sich

$$W_1 = \frac{J_\beta}{e_1}, \quad W_2 = \frac{J_\beta}{e_2}.$$

Fällt die Kraftlinie mit einer Hauptachse zusammen, Fig. 65, so ist

$$(32) \quad W_1 = \frac{J_u}{e_1}, \quad W_2 = \frac{J_u}{e_2}.$$

Für die I-Eisen und [-Eisen sind die auf Hauptachsen bezogenen Widerstandsmomente W im Normalprofilbuche und in vielen Hilfsbüchern zu finden.

Digitized by Google

Es wäre aber zu wünschen, daß auch für die mit den Hauptachsen nicht zusammenfallenden Kraftlinien die Werte W berechnet werden möchten, etwa in der Weise, wie dies für die Schiffbau-⌐⌙-Eisen von Herrn Ingenieur *Meyerhof* in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrgang 1899, Seite 607—614 geschehen ist.

44. Zahlenbeispiele. *1. Aufgabe.* Ein an beiden Enden frei aufliegendes 400 cm langes Winkeleisen (Flußeisen) ist gleichmäßig mit $P = 200^{k}$ belastet, Fig. 66 und 67; es sollen die Spannungen σ_1 und σ_2 berechnet werden, erstens für den Fall, daß die zum längeren Schenkel parallele Schwerachse Kraftlinie ist, zweitens für eine um 30° gegen den kürzeren Schenkel geneigte Kraftlinie.

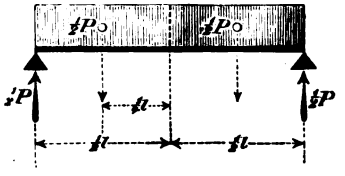


Fig. 66.

Es ist

$$M = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{P}{2} - \frac{l}{4} = \frac{Pl}{8} = \frac{200 \cdot 400}{8} = 10\,000 \text{ kcm}.$$

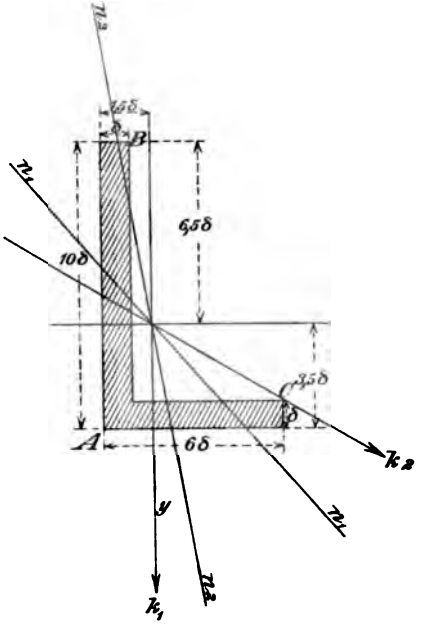


Fig. 67.

Die Querschnittsmomente für das Achsenkreuz xy sind (vergl. Seite 39):

$$J_x = 151{,}25\,\delta^4 \qquad J_y = 41{,}25\,\delta^4 \qquad J_{xy} = 45\,\delta^4.$$

Digitized by Google

Fällt die Kraftlinie mit der y-Achse zusammen, so ist $\alpha_k = 90°$ und

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_{xy}}{J_x} = \frac{45}{41{,}25} = 1.09.$$

Die Koordinaten der äußersten Querschnittspunkte A und B sind

$$y_A = +3.5\,\delta \qquad x_A = -1.5\,\delta$$
$$y_B = -6.5\,\delta \qquad x_B = -0.5\,\delta.$$

Man erhält also nach der Formel (vergl. Seite 64)

$$\sigma = M_x \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n},$$

worin $M_x = M$ zu setzen ist, für $\delta = 1^m$ die Spannungen

$$\sigma_A = \frac{M}{\delta^3} \frac{3{,}5 + 1{,}5 \cdot 1{,}09}{151{,}25 - 45 \cdot 1{,}09} = + \frac{M}{19{,}9\,\delta^3} = +503\ {}^{kg}/_{cm^2}$$

$$\sigma_B = \frac{M}{\delta^3} \frac{-6.5 + 0.5 \cdot 1{,}09}{151{,}25 - 45 \cdot 1{,}09} = - \frac{M}{17{,}2\,\delta^3} = -582\ {}^{kg}/_{cm^2}.$$

Bildet die Kraftlinie mit der x-Achse den Winkel $30°$ so ist $\operatorname{tg} \alpha_k = 0{,}577$. mithin

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_k}{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha_k} = \frac{125{,}285}{21{,}2} = 5{,}91.$$

Die äußersten Querschnittspunkte sind nunmehr A und C.

$$y_C = +2.5\,\delta \qquad x_C = 4.5\,\delta$$
$$M_x = M \sin \alpha_k = 0{,}5\,M$$

$$\sigma_A = 0{,}5 \frac{M}{\delta^3} \frac{3{,}5 + 1{,}5 \cdot 5{,}91}{151{,}25 - 45 \cdot 5{,}91} = - \frac{M}{18{,}6\,\delta^3} = -538\ {}^{kg}/_{cm^2}$$

$$\sigma_C = 0{,}5 \frac{M}{\delta^3} \frac{2{,}5 - 4{,}5 \cdot 5{,}91}{151{,}25 - 45 \cdot 5{,}91} = + \frac{M}{9{,}5\,\delta^3} = +1053\ {}^{kg}/_{cm^2}.$$

Die Widerstandsmomente des Querschnitts sind für die senkrechte Kraftlinie

$$W_1 = 19{,}9\,\delta^3 \qquad W_2 = 17{,}2\,\delta^3,$$

für die um $30°$ geneigte Kraftlinie

$$W_1 = 9{,}5\,\delta^3 \qquad W_2 = 18{,}6\,\delta^3.$$

2. Aufgabe. Der in Fig. 68 abgebildete Querschnitt eines gemauerten Pfeilers wird im Punkte K mit $N = 60000^k$ gedrückt. Gesucht ist die Lage der Nulllinie und die größte Spannung σ.

Wir beziehen den Querschnitt zunächst auf das mit zwei Seiten zusammenfallende Achsenkreuz $x'y'$ und zerlegen ihn in drei Rechtecke, deren Abmessungen und Schwerpunkts-Abscissen

$$b_1 = 0{,}25^m, \quad b_2 = 0{,}52^m, \quad b_3 = 0{,}26^m$$
$$h_1 = 0{,}77^m, \quad h_2 = 0{,}51^m, \quad h_3 = 0{,}25^m$$
$$e_1 = 0{,}125^m, \quad e_2 = 0.51^m, \quad e_3 = 0{,}90^m$$

sind. Dann erhalten wir

$$F = \Sigma bh = 0{,}5227\ m^2$$

Digitized by Google

$$S_{x'} = \frac{1}{2} \Sigma b h^2 = 0{,}1499\ m^3 \text{ (statisches Moment)}$$

$$J_{x'} = \frac{1}{3} \Sigma b h^3 = 0{,}0624\ m^4$$

$$J_{x'y'} = \frac{1}{2} \Sigma b h^2 e = 0{,}0511\ m^4$$

und auf ähnliche Weise

$$S_{y'} = 0{,}2178\ m^3$$
$$J_{y'} = 0{,}1320\ m^4.$$

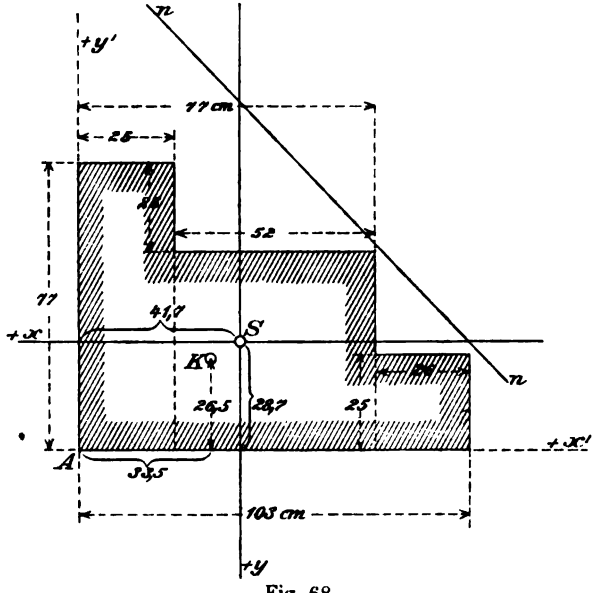


Fig. 68.

Die Koordinaten des Schwerpunktes sind nun

$$y'_s = \frac{S_{x'}}{F} = 0{,}287\ m;$$

$$x'_s = \frac{S_{y'}}{F} = 0{,}417\ m$$

und die Querschnittsmomente, bezogen auf die Schwerachsen

$$J_x = J_{x'} - F y'^2_s = J_{x'} - S_x y'_s$$
$$J_x = 0{,}0624 - 0{,}1499 \cdot 0{,}287 = 0{,}0194\ m^4$$
$$J_y = 0{,}1320 - 0{,}2178 \cdot 0{,}417 = 0{,}0412\ \text{„}$$
$$J_{xy} = 0{,}0511 - 0{,}1499 \cdot 0{,}417 = -0{,}0114\ m^4.$$

Digitized by Google

Die Koordinaten des Angriffspunktes K seien

$$y'_k = 0{,}265^m \text{ und } x'_k = 0{,}335^m.$$

Dann erhält man

$$y_k = 0{,}287 - 0{,}265 = 0{,}022^m$$
$$x_k = 0{,}417 - 0{,}335 = 0{,}082^m$$
$$\operatorname{tg}\alpha_k = \frac{y_k}{x_k} = \frac{11}{41} = 0{,}268$$
$$\operatorname{tg}\alpha_n = \frac{J_x - J_{xy}\operatorname{tg}\alpha_k}{J_{xy} - J_y \operatorname{tg}\alpha_k}$$
$$= \frac{0{,}0194 + 0{,}0114 \cdot 0{,}268}{-0{,}0114 - 0{,}0412 \cdot 0{,}268} = -0{,}836.$$

Die Nulllinie schneidet auf den Schwerachsen die Strecken ab:

$$y_n = -\frac{J_x - J_{xy}\operatorname{tg}\alpha_n}{F y_k} = -\frac{0{,}0194 - 0{,}0114 \cdot 0{,}836}{0{,}5227 \cdot 0{,}022} = -0{,}858^m$$

$$x_n = -\frac{y_n}{\operatorname{tg}\alpha_n} = -1{,}026^m,$$

sie liegt vollständig außerhalb des Querschnitts, und es haben deshalb alle Spannungen σ dasselbe Vorzeichen. Der Querschnitt wird nur auf Druck beansprucht. Die größte Spannung herrscht im Punkte A. Man findet hier

$$\sigma = \frac{N}{F} + N y_k \frac{y - x\operatorname{tg}\alpha_n}{J_x - J_{xy}\operatorname{tg}\alpha_n}$$
$$= \frac{N}{F}\left(1 - \frac{y - x\operatorname{tg}\alpha_n}{y_n}\right)$$
$$= \frac{N}{F}\left(1 + \frac{0{,}287 + 0{,}417 \cdot 0{,}836}{0{,}858}\right)$$
$$= \frac{1{,}74\,N}{F} = -\frac{1{,}74 \cdot 60000}{5227} = -20\ {}^{kg}/_{qcm}.$$

Klinkermauerwerk in Kalk-Zementmörtel, vergl. Seite 101, ist das beim Auftreten solcher Pressungen angezeigte Material.

3. Aufgabe. Der trapezförmige Querschnitt eines gemauerten Pfeilers habe die Abmessungen (Fig. 69)

$$a_1 = 2{,}16^m,\ a_2 = 1{,}4^m,\ t = 6^m \text{ (Transversale)},\ h = 5{,}1^m.$$

Im Eckpunkte A greife senkrecht zur Querschnittsebene der Druck 1^t an. Verlangt wird die Darstellung der Spannungsverteilung.

Wir beziehen den Querschnitt auf die schiefwinkligen Schwerachsen ξ, η und erhalten (nach Seite 43)

Digitized by Google

$$J_\xi = \frac{ht^2}{36}\left(a_1 + a_2 + \frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}\right)$$

$$= \frac{5{,}1 \cdot 6^2}{36}\left(2{,}6 + 1{,}4 + \frac{2 \cdot 2{,}6 \cdot 1{,}4}{2{,}6+1{,}4}\right) = 29{,}682\ m^4$$

$$J_\eta = \frac{F(a_1^2+a_2^2)}{24}, \text{ wo } F = \frac{h(a_1+a_2)}{2} = 5{,}1 \cdot 2{,}0 = 10{,}2,$$

weshalb $$J_\eta = \frac{10{,}2\,(2{,}6^2+1{,}4^2)}{24} = 3{,}706\ m^4.$$

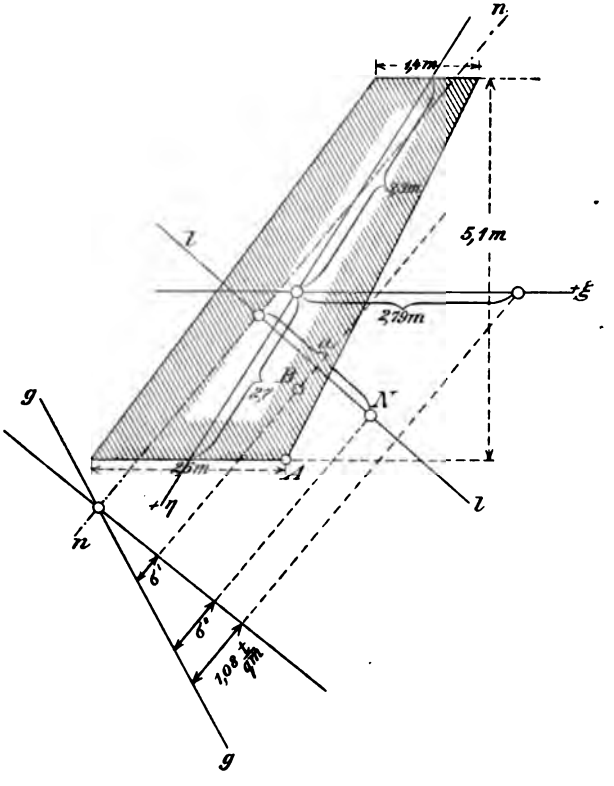


Fig. 69.

Die Koordinaten des Angriffspunktes A sind

$$\xi_k = \frac{1}{2}\,a_1 = 1{,}3^m$$

$$\eta_k = t\,\frac{a_1+2a_2}{3(a_1+a_2)} = 6\,\frac{2{,}6+2{,}8}{3 \cdot 4} = 2{,}7^m,$$

Digitized by Google

es schneidet also die Nulllinie auf den Achsen die Strecken ab (vergl. Seite 59):

$$\xi_n = -\frac{J_\eta}{F\xi_k} = -\frac{3{,}706}{10{,}2 \cdot 1{,}3} = -0{,}279^m$$

$$\eta_n = -\frac{J_\xi}{F\eta_k} = -\frac{29{,}682}{10{,}2 \cdot 2{,}7} = -1{,}078^m$$

und es ergibt sich für die Druckspannung in irgend einem Punkte ξ, η des Querschnitts (nach Gleich. 5, Seite 58) der Wert

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{N\xi_k \xi}{J_\eta} + \frac{N\eta_k \eta}{J_\xi};$$

er wird zweckmäßig umgeformt in

$$\sigma = \frac{N}{F}\left(1 - \frac{\xi}{\xi_n} - \frac{\eta}{\eta_n}\right)$$

und nun wird das Spannungsbild mit Hilfe des für die Stelle $\eta = 0$ und $\xi = -10\xi_n = 2{,}79^m$ berechneten Wertes

$$\sigma = \frac{11\,N}{F} = -\frac{11 \cdot 1}{10{,}2} = -1{,}08\,{}^t/_{qm}\,{}^*)$$

bestimmt.

Dieses Spannungsbild gestattet jetzt mit Hilfe des auf Seite 59 bewiesenen Satzes

$$\sigma_{AB} = \sigma_{BA}$$

die Berechnung der Kantenpressung an der Stelle A infolge beliebiger Belastungen des Pfeilers. Ist nämlich σ' die einem Punkte B entsprechende Ordinate der Spannungslinie gg, so erzeugt ein in A angreifender Druck $N = 1$ an der Stelle B die Spannung σ', und es ruft deshalb ein in B angreifender Druck $N = 1$ in A ebenfalls die Spannung σ' hervor. Wirken also auf den Pfeiler eine Reihe von Drücken N_1, N_2, N_3, ... so erhält man für die in A entstehende Druckspannung den Wert

$$\sigma = \Sigma N\sigma'.$$

Man nennt die Linie gg auch die *Einflußlinie* für die Spannung σ im Punkte A.

Wird der Einfluß eines Momentes M gesucht, welches in einer Ebene liegt, die den Querschnitt in der Geraden ll schneidet und zum Querschnitte rechtwinklig ist, so ersetze man M durch ein Kräftepaar Na mit beliebig großem Arme a und lege den Angriffspunkt der einen der beiden, zum Querschnitte rechtwinkligen Gegenkräfte N in

*) $1\,{}^t/_{qm} = 0{,}1\,{}^k/_{qcm}$.

Digitized by Google

den Schnittpunkt der Geraden ll und nn. Man findet dann für σ_A den Wert

$$\sigma_A = N\sigma'' = \frac{M\sigma''}{a}.$$

§ 10.

Der Kern des Querschnitts.

45. Erklärungen. Bestimmung des Kerns für einen beliebigen Querschnitt. Schneidet die Nulllinie nn den Querschnitt, so besitzen die Spannungen σ in den durch die nn getrennten Teilen des Querschnitts verschiedene Vorzeichen. In demjenigen Teile, welcher den Angriffspunkt K enthält, herrschen Zug- oder Druckspannungen, je nachdem die in K wirksame Längskraft N positiv oder negativ ist.

Nähert sich der Angriffspunkt dem Schwerpunkte S des Querschnitts, so entfernt sich die Nulllinie von S. Von dem Augenblicke an, in welchem die Nulllinie bei dieser Bewegung den Querschnitt berührt, ohne ihn zu schneiden, besitzen die Spannungen σ in allen Punkten des Querschnitts dasselbe Vorzeichen wie die Längskraft N.

Betrachtet man nun alle möglichen den Querschnitt berührenden, *aber nicht schneidenden* Geraden der Reihe nach als Nulllinien und bestimmt die zugehörigen Angriffspunkte, so begrenzt der Ort dieser Punkte denjenigen Teil des Querschnitts, innerhalb dessen der Angriffspunkt K einer Längskraft N liegen muß, wenn alle durch diese Kraft in dem Querschnitte hervorgerufenen Spannungen dasselbe Vorzeichen haben sollen wie N. Dieser Teil des Querschnitts heißt der *Kern*, und die von jenen den Querschnitt berührenden aber nicht schneidenden Geraden eingehüllte Linie wollen wir die *Umhüllungslinie* des Querschnittes nennen.

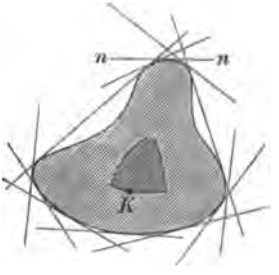


Fig. 70.

Der Kern ist u. a. von Bedeutung für die Beurteilung der Steinbauten. Soll z. B. der durch einen Druck N beanspruchte Querschnitt eines gemauerten Pfeilers nur Druckspannungen erfahren, so muß der Angriffspunkt von N innerhalb des Kerns liegen.

Wird der Kern eines von geraden Linien begrenzten Querschnitts (Fig. 71) gesucht, so genügt es, die Seiten AB, BC, CD, DE, EA der Umhüllungslinie $ABCDEA$ der Reihe nach als Nulllinien anzu-

Digitized by Google

sehen und die ihnen entsprechenden Angriffspunkte (ab), (bc), (cd), (de), (ea) zu bestimmen. Die Verbindungslinien a, b, c, d, e dieser Punkte umschließen den Kern. Denn, während sich die auf dem Umfange des Querschnittes rollende Nulllinie aus der Lage AB um den Eckpunkt B in die Lage BC dreht, beschreibt der Angriffspunkt die Verbindungslinie b der Punkte (ab) und (bc); dreht sie sich aus der Lage BC um den Punkt C in die Lage CD, so beschreibt der Angriffspunkt die Gerade c u. s. w.

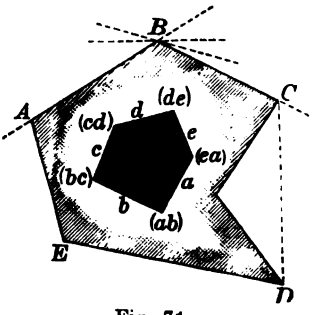


Fig. 71.

Nun wurde aber früher bewiesen, daß sich bei der Drehung einer Nulllinie um einen festen Punkt der zugehörige Angriffspunkt auf der jenem Drehpunkte entsprechenden Nulllinie bewegt, und hieraus folgt, daß man den Kern auch durch Bestimmung der den Eckpunkten A, B, C, D, E entsprechenden Nulllinien a, b, c, d, e finden kann.

Es gilt die vorstehende Betrachtung auch für von krummen Linien eingeschlossene Querschnitte, da diese als von unendlich kurzen Geraden begrenzt angesehen werden dürfen, und man darf deshalb ganz allgemein den Kern durch den folgenden Doppelsatz erklären:

Rollt die Nulllinie auf der Umhüllungslinie des Querschnitts, so beschreibt der Angriffspunkt den Umfang des Kerns.

Beschreibt der Angriffspunkt die Umhüllungslinie des Querschnitts, so rollt die Nulllinie auf dem Umfange des Kerns.

Hiermit ist die Aufgabe, den Kern eines Querschnitts zu bestimmen, auf die im vorigen Paragraph behandelte Aufgabe zurückgeführt, die einem gegebenen Angriffspunkte K entsprechende Nulllinie zu ermitteln oder umgekehrt zu einer gegebenen Nulllinie den Angriffspunkt zu suchen.

Ist z. B. der Querschnitt auf seine Haupt-Schwerachsen (1) und (2) bezogen, Fig. 72, und sind i_1 und i_2 die Haupt-Trägheitshalbmesser

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}}, \quad i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}},$$

sind ferner v_1 und u_1 die Koordinaten des Angriffspunktes K und schneidet die Nulllinie auf den Hauptachsen die Strecken

$$\overline{SV'} = v_n \text{ und } \overline{SU'} = u_n$$

ab, so ist nach Gleich. (7) Seite 59

$$v_1 v_n = -i_1^2$$
$$u_1 u_n = -i_2^2;$$

Digitized by Google

es ist also

i_1 die mittlere Proportionale zu v_1 und v_n
i_2 „ „ „ „ u_1 „ u_n

und es ergibt sich das folgende zeichnerische Verfahren:

Man trage auf den Hauptachsen (1) und (2) die Strecken $\overline{SA} = i_1$ und $\overline{SB} = i_2$ auf (gleichgültig, auf welcher Seite von S), verbinde die Fußpunkte V und U der Koordinaten u_1 und v_1 des Angriffspunktes K mit A bezieh. B und errichte in A und B auf den Geraden VA und UB Lote, welche die Hauptachsen in den Punkten V' und U' schneiden. Dann ist

$i_1 = \overline{SA}$ die mittlere Proportionale zu $\overline{SV}$ und $\overline{SV'}$

$i_2 = \overline{SB}$ die mittlere Proportionale zu $\overline{SU}$ und $\overline{SU'}$

und hieraus folgt, daß U' und V' Punkte der gesuchten Nulllinie sind.

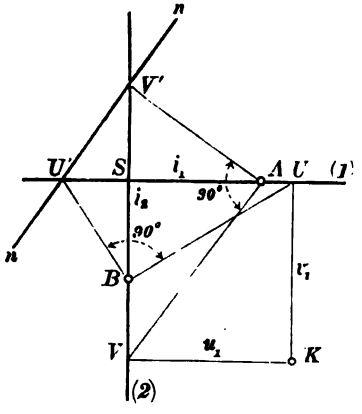


Fig. 72.

Bei großer Entfernung des Angriffspunktes K vom Schwerpunkte S ist das beschriebene Verfahren unbequem. Man bestimme dann zu irgend einem auf der Geraden SK und näher an S gelegenen Punkte K' die Nulllinie $n'n'$ (Fig. 73) und beachte, daß die zu K gehörige nn parallel zur $n'n'$ ist, und daß sich verhält: $\overline{SL} : \overline{SL'} = \overline{SK'} : \overline{SK}$, wobei L und L' die Punkte sind, in denen die Kraftlinie SK von den Nulllinien nn und $n'n'$ geschnitten sind. Liegt K im Unendlichen, so geht die nn durch den Schwerpunkt S; sie bleibt aber parallel zur $n'n'$. Dieser Fall liegt vor, sobald $N = 0$ ist und der Querschnitt nur durch ein Biegungsmoment M beansprucht wird.

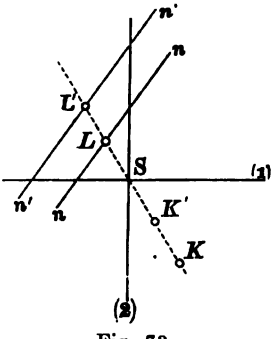


Fig. 73.

Wie man nun die umgekehrte Aufgabe löst, zu einer gegebenen Nulllinie nn den Angriffspunkt K zu suchen, bedarf keiner Erläuterung.

46. Bestimmung der Nulllinie mit Hilfe der Polaren-Theorie. Legt man durch den Schwerpunkt S des Querschnittes eine Parallele $u'u'$ zu der irgend einem Angriffspunkte K entsprechenden Nulllinie nn, Fig. 74, so ist

Digitized by Google

nach Seite 61 das auf die Achsen SK und $u'u'$ bezogene Zentrifugalmoment des Querschnittes $= 0$, und hieraus folgt nach No. 36, daß die Richtungen SK und $u'u'$ bezüglich der Zentralellipse einander konjugiert sind.

Die in den Schnittpunkten A und B von Kraftlinie und Zentralellipse an die letztere gelegten Tangenten sind also parallel zur nn.

Der mit der Kraftlinie zusammenfallende Ellipsenhalbmesser $\overline{SA} = \overline{SB}$ ist gleich dem auf die u'-Achse bezogenen Trägheitshalbmesser i' des Querschnittes, und die Ordinate der Nulllinie ist: $\overline{SD} = \frac{i'^2}{f}$. Bestimmt man nun auf der Kraftlinie einen bezüglich des Schwerpunktes S symmetrisch zu K gelegenen Punkt K', so werden die Punkte A und B durch die Punkte K' und D harmonisch getrennt, und hieraus folgt, daß die durch den unendlich fernen Punkt der in A und B an die Zentralellipse gelegten Tangenten gehende Nulllinie *die Polare des Punktes K' in Bezug auf die Zentralellipse* ist. Denn die Polare eines Punktes bezüglich einer Kurve zweiter Ordnung ist durch den Satz erklärt:

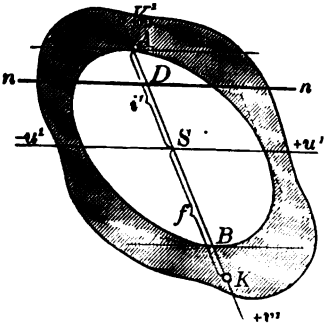


Fig. 74.

Legt man von irgend einem Punkte K' aus beliebig viele Sekanten durch eine Kurve zweiter Ordnung und bestimmt auf jeder Sekante den Punkt D, welcher von K' durch die beiden Kurvenpunkte A und B harmonisch getrennt ist, so liegen alle Punkte D auf einer Geraden, welche die Polare des Punktes K' in Bezug auf jene Kurve zweiter Ordnung genannt wird, und welche den Schnittpunkt der in den Punkten A und B einer beliebigen Sekante an die Kurve gelegten Tangenten enthält.

Aus dem Hauptsatze der Polarentheorie, nämlich:

Die Polaren sämtlicher Punkte einer Geraden gehen durch den Pol jener Geraden	*Die Pole sämtlicher Strahlen eines Punktes liegen auf der Polaren dieses Punktes*

folgt unmittelbar der in No. 45 bewiesene Doppelsatz.

Man nennt auch die Nulllinie die *Gegenpolare* des Angriffspunktes und umgekehrt den Angriffspunkt den *Gegenpol* der Nulllinie.

Die Bestimmung der Gegenpolare nn ist eine Aufgabe ersten Grades, deren einfachste Lösung in der Festlegung der Nulllinie mittels der in ihr liegenden Gegenpole U' und V' zweier Geraden KU und KV besteht, die durch den Angriffspunkt K gehen und zu irgend zwei in Bezug auf die Zentralellipse einander konjugierten Richtungen (beispielsweise zu den Schwerpunkts-Hauptachsen) parallel sind.

47. Rechnerische Bestimmung des Kerns. Ist der Querschnitt auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz x, y bezogen, und sind x_k, y_k die Koordinaten des Angriffspunktes K, so lautet die Gleichung der zugehörigen Nulllinie (Seite 64)

$$0 = \frac{1}{F} + y_k \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}$$

Digitized by Google

oder

$$0 = \frac{1}{F} + x_k \frac{x - y \operatorname{cotg} \alpha_n}{J_y - J_{xy} \operatorname{cotg} \alpha_n}.$$

Ferner besteht, da Kraftlinie und Nulllinie zugeordnete Achsen sind, die Bezeichnung

$$(1) \quad \frac{y_k}{x_k} = \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha_n} = \frac{J_x \operatorname{cotg} \alpha_n - J_{xy}}{J_{xy} \operatorname{cotg} \alpha_n - J_y}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen findet man zu einer gegebenen Nulllinie die folgenden Angriffspunkts-Koordinaten:

$$(2) \quad \begin{cases} y_k = -\frac{1}{F} \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}{y - x \operatorname{tg} \alpha_n} \\ x_k = -\frac{1}{F} \frac{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha_n}{y - x \operatorname{tg} \alpha_n} \end{cases}$$

oder

$$(3) \quad \begin{cases} y_k = -\frac{1}{F} \frac{J_{xy} - J_x \operatorname{cotg} \alpha_n}{x - y \operatorname{cotg} \alpha_n} \\ x_k = -\frac{1}{F} \frac{J_y - J_{xy} \operatorname{cotg} \alpha_n}{x - y \operatorname{cotg} \alpha_n}. \end{cases}$$

In diese Formeln sind für x und y *die Koordinaten irgend eines Punktes der Nulllinie* einzusetzen. Beide Formelgruppen liefern dasselbe Ergebnis. Ist α_n gleich oder nahezu 90°, so wende man die Formeln (3) an; ist α_n gleich oder nahezu Null, so muß man die Formeln (2) benutzen.

Für $\alpha_n = 0$ erhält man

$$(4) \quad y_k = -\frac{J_x}{Fy}, \; x_k = -\frac{J_{xy}}{Fy},$$

für $\alpha_n = 90°$ wird

$$(5) \quad y_k = -\frac{J_{xy}}{Fx}, \; x_k = -\frac{J_y}{Fx}.$$

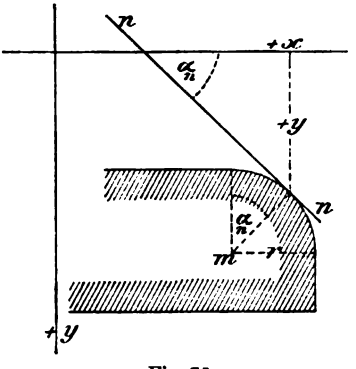


Fig. 75.

Rollt die Nulllinie über einen Kreisbogen vom Halbmesser r und sind x_m, y_m die Koordinaten des Mittelpunktes, Fig. 75, so ist

$$y = y_m - r \cos \alpha_n$$
$$x = x_m + r \sin \alpha_n$$

und man erhält

Digitized by Google

$$(6)\quad \begin{cases} -Fy_k = \dfrac{J_x \cos\alpha_m - J_{xy}\sin\alpha_m}{y_m\cos\alpha_m - x_m\sin\alpha_m - r} \\ -Fx_k = \dfrac{J_{xy}\cos\alpha_m - J_y\sin\alpha_m}{y_m\cos\alpha_m - x_m\sin\alpha_m - r}. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich bei der Berechnung der Kernfiguren der Normalprofile der Walzeisen die Abrundungen der Ecken berücksichtigen.

48. Benutzung des Kerns zur Ermittelung der Spannungen σ. Bezieht man den in irgend einem Punkte K durch eine Längskraft N beanspruchten Querschnitt auf die Kraftlinie SK und die zur Nullinie parallele Schwerachse u' als Koordinatenachsen, so findet man die Spannungen σ_1 und σ_2 in den von der Achse u' entferntesten Punkten L_1 und L_2 des Querschnitts (nach Gleich. 13, Seite 61):

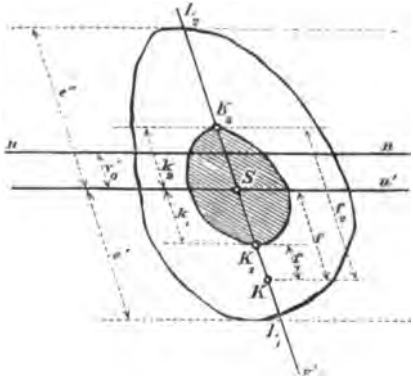


Fig. 76.

$$(1)\quad \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Nfe'}{J_{u'}};\ \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{Nfe''}{J_{u'}}.$$

Die auf der Kraftlinie liegenden Kernpunkte K_1 und K_2 entsprechen beziehungsweise den durch L_2 und L_1 parallel zur Geraden u' gedachten Nulllinien als Angriffspunkte, und es gelten deshalb für die zugehörigen Kernhalbmesser k_1 und k_2 die Formeln:

$$(2)\quad k_2 = \frac{J_{u'}}{Fe'};\ k_1 = \frac{J_{u'}}{Fe''},$$

woraus dann folgt: $\frac{J_{u'}}{e'} = Fk_2$; $\frac{J_{u'}}{e''} = Fk_1$.

Führt man diese Werte in die Gleichungen (1) ein, so gehen diese über in:

Digitized by Google

$$(3)\quad \sigma_1 = \frac{N}{F}\frac{f+k_2}{k_2};\quad \sigma_2 = -\frac{N}{F}\frac{f-k_1}{k_1},$$

und hierfür kann man schreiben:

$$(4)\quad \sigma_1 = \frac{N}{F}\frac{f_2}{k_2};\quad \sigma_2 = -\frac{N}{F}\frac{f_1}{k_1},$$

wobei f_1 und f_2 die Abstände des Angriffspunktes K von den auf der Kraftlinie liegenden Kernpunkten K_1 und K_2 bedeuten.

Ist also der Kern eines Querschnittes gegeben, so ist man mit Hilfe der Gleichungen (4) im stande, die Spannungen σ_1 und σ_2 auf eine sehr einfache Weise zu bestimmen, ohne daß man nötig hat, die Richtung der Nulllinie und die äußersten Querschnittspunkte L_1 und L_2 aufzusuchen. Will man σ_1 und σ_2 nach Berechnung der im Schwerpunkte S herrschenden Spannung $\sigma_0 = \frac{N}{F}$ durch Zeichnung finden, so trage man auf irgend einer von S ausgehenden Geraden die Spannung $\sigma_0 = \overline{SR}$ auf, Fig. 77, lege durch K zur SR eine Parallele und ziehe von R aus durch die Kernpunkte K_1 und K_2 gerade Linien, welche diese Parallele in T_1 und T_2 schneiden. Man findet: $\sigma_1 = \overline{KT_2}$ und $\sigma_2 = \overline{KT_1}$.

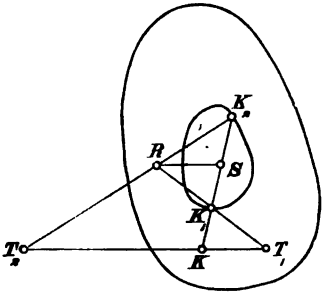


Fig. 77.

Zuweilen sind die auf die Kernpunkte K_1 und K_2 bezogenen Angriffsmomente $M_1 = Nf_1$ und $M_2 = Nf_2$ bekannt, ohne daß N, f_1, f_2 einzeln gegeben sind. Dann findet man die Spannungen σ_1, σ_2 (am besten durch Rechnung) mittels der Formeln

$$(5)\quad \sigma_1 = \frac{M_2}{Fk_2};\quad \sigma_2 = -\frac{M_1}{Fk_1},$$

welche namentlich für die Theorie der Bogenbrücken von großem Werte sind.

Die Benutzung des Kerns bietet bei der Berechnung der Spannungen σ gegenüber den im § 9 mitgeteilten Verfahren nur dann Vorteile, wenn sich der Kern schnell zeichnen läßt, oder wenn die größten Spannungen σ_1 und σ_2 für verschiedene Lagen des Angriffspunktes miteinander zu vergleichen sind.

Wird z. B. der Querschnitt bei wechselnder Lage des Angriffspunktes durch eine unveränderliche Längskraft N und ein unveränderliches Moment M, welche beide positiv sein mögen, beansprucht, so

Digitized by Google

nimmt die Spannung $\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fk_2}$ den größten oder den kleinsten Wert an, je nachdem die Kraftlinie mit dem kleinsten oder größten Kernhalbmesser zusammenfällt.

49. Die *W*-Fläche. Die Produkte Fk_2 und Fk_1 sind nach No. 43 gleich den der fraglichen Kraftlinie entsprechenden Widerstandsmomenten W_1 und W_2. Man kann also auch den Kern in der Weise bestimmen, daß man nach dem im § 9 gezeigten Verfahren die Widerstandsmomente für hinreichend viele Kraftlinien berechnet. Für einen von Geraden begrenzten Querschnitt genügt es, die Rechnung für die durch die Eckpunkte des Umfanges gehenden Kraftlinien auszuführen.

Sehr oft erweist es sich als zweckmäßig, nicht die Strecken k sondern Strecken $W = Fk$ aufzutragen; an Stelle des Kerns entsteht dann die *W*-Fläche.

50. Zahlenbeispiel. ***Rechnerische Bestimmung der W-Fläche und des Kerns für das in Fig. 78 dargestellte I-Eisen.***

Auf Seite 42 erhielten wir für diesen Querschnitt

$$J_x = 928{,}423,\quad J_y = 332{,}948,\quad J_{xy} = 427{,}133.$$

Wir weisen nun der Nulllinie der Reihe nach die Lagen (1) (2) (3) zu und berechnen mit Hilfe der in No. 47 abgeleiteten Formeln die Koordinaten $y = Fy_k$, $x = Fx_k$ der Eckpunkte 1, 2, 3 der *W*-Fläche und die Längen der vom Schwerpunkte nach diesen Punkten führenden Fahrstrahlen Fk_1, Fk_2, Fk_3.

Nulllinie (1) $\alpha_n = 0,\quad y = -7{,}0$ cm

$$y_1 = Fy_{k_1} = -\frac{J_x}{y} = +\frac{928{,}423}{7{,}0} = 132{,}632\ cm^3$$

$$x_1 = Fx_{k_1} = -\frac{J_{xy}}{y} = +\frac{427{,}133}{7{,}0} = 61{,}019\ \text{„}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{928{,}423}{427{,}133};\quad \alpha_1 = 65^\circ\,17'\,40''$$

$$W_1 = Fk_1 = \frac{Fy_{k_1}}{\sin\alpha_1} = 146{,}00\ cm^3$$

Nulllinie (2) $\alpha_n = 90^\circ,\quad x = -7{,}5$ cm

$$y_2 = Fy_{k_2} = -\frac{J_{xy}}{x} = +\frac{427{,}133}{7{,}5} = 56{,}951\ cm^3$$

$$x_2 = Fx_{k_2} = -\frac{J_y}{x} = +\frac{332{,}948}{7{,}5} = 44{,}393\ \text{„}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{427{,}133}{332{,}948};\quad \alpha_2 = 52^\circ\,3'\,50''$$

$$W_2 = Fk_2 = \frac{Fy_{n_2}}{\sin\alpha_2} = 72{,}21\ cm^3$$

Nulllinie (3) $\operatorname{tg}\alpha_n = 1{,}88220,\ \alpha_n = 62^\circ\,1'\,7'',\ y = +7{,}0,\ x = -0{,}5$*)

*) Koordinaten eines ***beliebigen*** Punktes der Nulllinie; wir haben den unteren linken Eckpunkt des Querschnittes gewählt. Die Berechnung von $\operatorname{tg}\alpha_n$ ist oben nicht weiter ausgeführt, sie bereitet keine Schwierigkeit. α_n ist Neigungswinkel einer Kreistangente.

Digitized by Google

$$y_3 = F y_{k_3} = -\frac{J_x - J_{xy}\,\mathrm{tg}\,\alpha_n}{y - x\,\mathrm{tg}\,\alpha_n}$$

$$= -\frac{928{,}423 - 427{,}188 \cdot 1{,}88220}{7{,}0 + 0{,}5 \cdot 1{,}88220} = -15{,}675\ cm^3$$

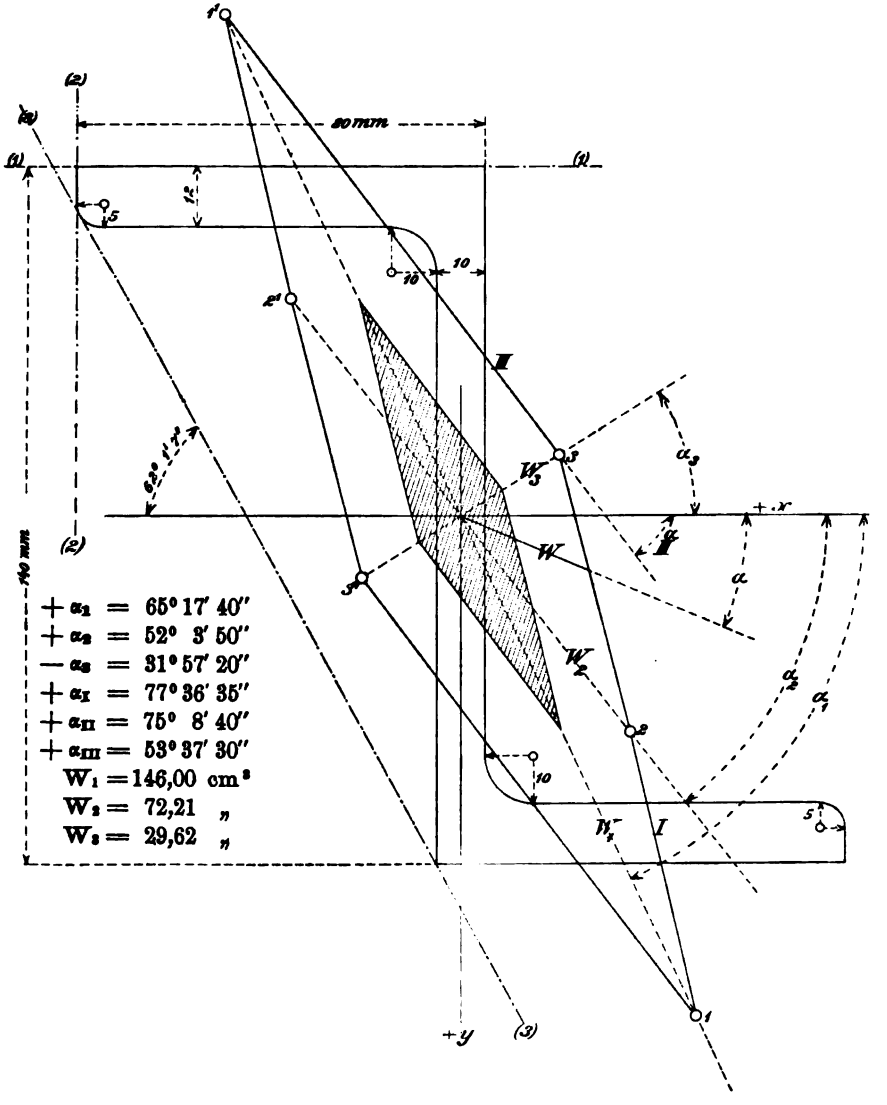


Fig. 78. (100 $cm^3 = 50\ mm$)

Digitized by Google

$$x_s = F x_{k_s} = -\frac{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha_n}{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}$$

$$= -\frac{427{,}183 - 332{,}948 \cdot 1{,}88220}{0{,}7 + 0{,}5 \cdot 1{,}88220} = +25{,}128\ cm^3$$

$$\operatorname{tg} \alpha_s = \frac{y_s}{x_s} = \frac{-15{,}675}{25{,}128},\quad \alpha_s = -31^\circ 57' 20''$$

$$W_s = F k_s = \frac{F y_{k_s}}{\sin(-\alpha_s)} = 29{,}62\ cm^3.$$

Dreht sich die Nulllinie aus der Lage (1) um die Querschnittsecke in die Lage (2), so beschreibt der zugehörige Angriffspunkt die Gerade 1—2. Beim Übergang aus Lage (2) in Lage (3) rollt die Nulllinie über einen Kreisbogen, dessen Zentriwinkel gleich $90^\circ - 62^\circ 1' 7'' = 27^\circ 58' 53''$ ist. Der zugeordnete Angriffspunkt bewegt sich auf einer ganz flachen Kurve, deren Ordinaten sich leicht mit Hilfe der Formeln 6 auf Seite 78 berechnen lassen. Man findet

für	$\alpha_n = 85^\circ$	$F y_k = +49{,}766\ cm^3$,	$F x_k = +42{,}525\ cm^3$,
„	80°	„	$+41{,}181$ „	„	$+40{,}275$ „
„	75°	„	$+30{,}596$ „	„	$+37{,}481$ „
„	70°	„	$+17{,}029$ „	„	$+33{,}799$ „
„	65°	„	$-1{,}256$ „	„	$+28{,}993$ „

Es ist stets zulässig, die durch diese Punkte bestimmte Kurve durch die Gerade 2—3 zu ersetzen.

Nach Auftragung der die W-Fläche begrenzenden 6 Geraden kann man die zu den verschiedenen Kraftlinien gehörigen Widerstandsmomente mit dem Zirkel abgreifen. Will man rechnen, so bestimme man mit Hilfe der oben angegebenen Koordinaten der Angriffspunkte 1, 2, 3 die Neigungswinkel der drei Geraden

$$\begin{array}{ccc} 1—2 & 2—3 & 3—1' \\ \alpha_I = 77^\circ 36' 35'', & \alpha_{II} = 75^\circ 8' 40'', & \alpha_{III} = 53^\circ 37' 30''. \end{array}$$

Der Sinussatz liefert dann für die diese drei Geraden schneidenden Kraftlinien die Werte

$$W = W_1 \frac{\sin(\alpha_I - \alpha_1)}{\sin(\alpha_I - \alpha)}$$

$$W = W_2 \frac{\sin(\alpha_{II} - \alpha_2)}{\sin(\alpha_{II} - \alpha)}$$

$$W = W_3 \frac{\sin(\alpha_{III} - \alpha_3)}{\sin(\alpha_{III} - \alpha)},$$

wo α den veränderlichen Neigungswinkel der Kraftlinie bedeutet. In der folgenden Tabelle sind die Werte für die Winkel $+90^\circ$ bis -90°, immer um 5° fortschreitend, angegeben.

Bei der sehr wünschenswerten Ausführung dieser Arbeit für die deutschen Normal-Profile wird man den Zwischenraum dort, wo die Werte sich mit α schnell ändern (besonders in der Nähe der Spitze 1), wohl etwas enger wählen. Man vergl. die schon einmal erwähnte, von Meyerhoff berechnete Tabelle für Schiffbau-⌐L-Eisen in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1899, Seite 607, mit deren Zahlen die von uns berechneten gut übereinstimmen.

Dividiert man die Widerstandsmomente W_1, W_2, W_3 durch $F = 31{,}1$, so erhält man die Kernradien $k_1 = 4{,}70\ cm$, $k_2 = 2{,}32\ cm$, $k_3 = 0{,}95$ cm. Der Kern ist in Fig. 78 schraffiert worden.

Digitized by Google

α	W	α	W	α	W
$+90°$	49,79	$+30°$	39,98	$-35°$	29.54
$+85°$	56,72	$+25°$	36,88	$-40°$	29,59
$+80°$	66,48	$+20°$	34,50	$-45°$	29,87
$+75°$	81,02	$+15°$	32,64	$-50°$	30,38
$+70°$	104,74	$+10°$	31,20	$-55°$	31,16
$+65°17'40''$	$146{,}00 = W_1$	$+5°$	30,10	$-60°$	32,23
		$0°$	29,29	$-65°$	33,64
$+65°$	142,64	$-5°$	28,78	$-70°$	35,64
$+60°$	102,93	$-10°$	28,41	$-75°$	37,80
$+55°$	81,00	$-15°$*)	$28{,}31 = W_{min}$	$-80°$	40,79
$+52°3'50''$	$72{,}21 = W_2$	$-20°$	28,42	$-85°$	44,66
		$-25°$	28,76	$-90°$	49,79
$+50°$	66,22	$-30°$	29,38		
$+45°$	56,37				
$+40°$	49,18	$-31°57'20''$	$29{,}62 = W_3$		
$+35°$	43,91				

Die vorstehenden Rechnungen enthalten reichlich viel Dezimalstellen; es soll deshalb noch gezeigt werden, daß man vollkommen brauchbare Ergebnisse auch dann erhält, wenn man auf die Abrundung der Ecken des Querschnitts keine Rücksicht nimmt und die ganze Zahlenrechnung so einrichtet, daß man immer nur zwei- oder dreistellige Zahlen zu multiplizieren oder zu dividieren hat. Man kann dann die ganze Arbeit sehr schnell mit Hilfe einer Rechentafel ausführen.**)

Auf Seite 42 erhielten wir für den nicht abgerundeten Querschnitt:

$$J_x = 919,\ J_y = 339,\ J_{xy} = 430.$$

Nun ergibt sich für die ***Nulllinie (1)***:

$$y_1 = F y_{k_1} = \frac{919}{7{,}0} = 131\ cm^3$$

$$x_1 = F x_{k_1} = \frac{430}{7{,}0} = 61\ ,,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{919}{430} = 2{,}14,\ \alpha_1 = 65°$$

$$W_1 = \sqrt{131^2 + 61^2} = 145\ cm^3 \text{ (anstatt 146,00)},$$

für die ***Nulllinie (2)***:

$$y_2 = F y_{k_2} = \frac{430}{7{,}5} = 57\ cm^3$$

$$x_2 = F x_{k_2} = \frac{339}{7{,}5} = 45\ ,,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{430}{339} = 1{,}27,\ \alpha_2\ 51°50'$$

$$W_2 = \sqrt{57^2 + 45^2} = 73\ cm^3 \text{ (anstatt 72,21)},$$

*) Genau wird W ein Minimum für $\alpha = 90° - 75°8'40'' = 14°51°20°$.

) Wir empfehlen hierzu die ***Rechentafel von Dr. Zimmermann*, Berlin, Verlag von W. Ernst & Sohn, oder die große ***Rechentafel von Crelle***, Berlin, Verlag von G. Reimer.

Digitized by Google

für die *Nulllinie (3)*: $\operatorname{tg}\alpha_n = \frac{12{,}8}{7{,}0} = 1{,}82$

$$y_s = F y_{k_3} = -\frac{919 - 430 \cdot 1{,}82}{7{,}0 + 0{,}5 \cdot 1{,}82} = -\frac{136}{7{,}91} = -17\ cm^3$$

$$x_s = F x_{k_3} = -\frac{430 - 339 \cdot 1{,}82}{7{,}0 + 0{,}5 \cdot 1{,}82} = +\frac{187}{7{,}91} = +24\ ,,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_s = -\frac{136}{187} = -0{,}72,\ \alpha_s = 35°\,50'$$

$$W_s = \sqrt{17^2 + 24^2} = 29\ cm^3 \text{ (anstatt } 29{,}62).$$

Die Ergebnisse dieser kurzen Rechnung sind genau so viel wert, wie der zuerst angestellten genaueren Untersuchung. Man darf nie außer acht lassen, daß die hier vorgetragene Lehre von der Biegungsfestigkeit auf der Voraussetzung einer linearen Spannungsverteilung beruht und — ganz besonders bei der vorliegenden Querschnittsform — nur als Annäherungsrechnung angesehen werden darf. Dazu kommt, daß die von den Walzwerken gelieferten Profile nie genau mit den im Profilbuch beschriebenen übereinstimmen — nach den Erfahrungen des Verfassers fallen sie stets etwas stärker aus — und daß schließlich eine scharfe Bestimmung der Richtung der Kraftlinie in Wirklichkeit nie möglich ist. Aus diesem letzten Grunde wird man, um sicher zu gehen, die Kraftlinie stets um einige Grade nach der Seite hin gedreht denken, nach welcher das Widerstandsmoment abnimmt.

51. Analytische Bestimmung des Kerns für einige häufiger vorkommende Querschnitte.

1. Das Dreieck. Fig. 79. Um den Kern zu ermitteln, genügt es, die eine Seite, z. B. b, als Nulllinie zu betrachten und den zugehörigen Angriffs-

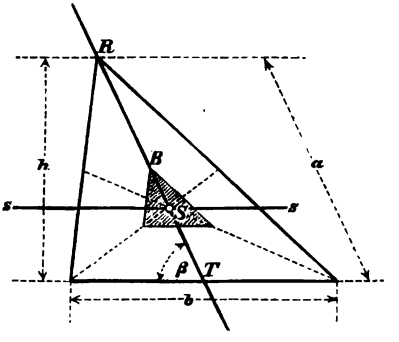


Fig. 79.

punkt B zu bestimmen. Er liegt auf der zur Seite b gehörigen Transversale $\overline{RT} = a$, weil das Zentrifugalmoment des Querschnitts in Bezug auf diese Transversale und die zu b parallele Schwerachse ss des Dreiecks als Koordinatenachsen $= 0$ ist. Der Abstand des Punktes B vom Schwerpunkte S ist $\overline{SB} = \frac{i'^2}{\frac{1}{3}a} = \frac{3J'}{Fa}$, wobei J' das für schiefwinklige Koordinaten auf die Achse ss bezogene Trägheitsmoment ist. Für rechtwinklige Koordinaten wurde in

Digitized by Google

Bezug auf die Achse ss auf Seite 31 gefunden: $J = \frac{bh^3}{36} = \frac{ba^3 \sin^3\beta}{36}$, und hieraus folgt (nach Gleich. 10 auf Seite 38):

$J' = J \operatorname{cosec}^2\beta = \frac{ba^3 \sin\beta}{36}$. Wegen $F = \frac{ba \sin\beta}{2}$ ergibt sich mithin $\overline{SB} = \frac{a}{6}$.

Bestimmt man auf die gleiche Weise die den übrigen Dreiecks-Seiten entsprechenden Kernpunkte, so findet man, daß der Kern ein Dreieck ist, dessen Seiten parallel zu den Querschnitts-Seiten sind, und dessen Schwerpunkt mit dem Querschnitts-Schwerpunkte zusammenfällt.

2. Das Parallelogramm. Fig. 80. Die zu den Seiten b und a parallelen Schwerachsen werden zu Koordinatenachsen gewählt; es entspricht ihnen das Zentrifugalmoment $Z = 0$. Macht man b zur Nulllinie, so liegt der Angriffspunkt B auf der Mittellinie RT im Abstande $\overline{SB} = \frac{i'^2}{\frac{1}{2}a} = \frac{2J'}{Fa}$ vom Schwerpunkte S. Nun ist, nach Seite 31, für die Achse ss und für rechtwinklige Koordinaten: $J = \frac{bh^3}{12} = \frac{ba^3 \sin^3\beta}{12}$, mithin $J' = J \operatorname{cosec}^2\beta = \frac{ba^3 \sin\beta}{12}$. Weiter ist $F = bh = ba \sin\beta$, also $\overline{SB} = \frac{a}{6}$. Ebenso lassen sich die den übrigen Seiten des Parallelogramms entsprechenden Kernpunkte bestimmen. Der Kern ist ein Parallelogramm, dessen Ecken auf den gewählten Koordinaten-Achsen liegen, und dessen Diagonalen die Längen $\frac{1}{3}a$ und $\frac{1}{3}b$ haben.

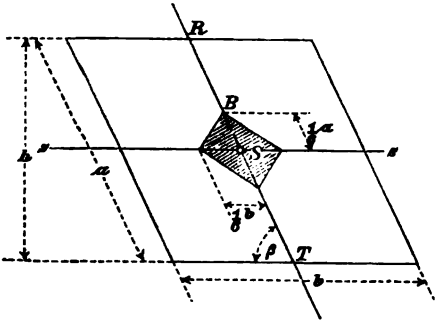


Fig. 80.

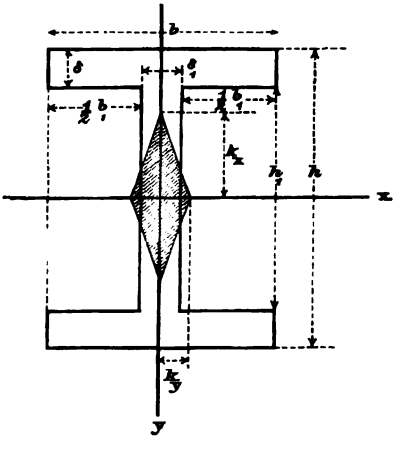


Fig. 81.

3. Der I-Querschnitt. Für die den Querschnitts-Seiten parallelen, in Fig. 81 mit x und y bezeichneten Schwerachsen, welche gleichzeitig Hauptachsen sind, findet man mit den angegebenen Bezeichnungen:

$$J_x = \frac{1}{12}(bh^3 - b_1h_1^3); \quad J_y = \frac{1}{12}(2\,\delta b^3 + h_1\,\delta_1^3).$$

Der Inhalt des Querschnitts ist: $F = bh - b_1h_1$. Der Kern ist ein Paral-

Digitized by Google

lelogramm, dessen Ecken auf den Hauptachsen liegen, und dessen halbe Diagonalen die Längen haben

$$k_x = \frac{2J_x}{Fh} \text{ und } k_y = \frac{2J_y}{Fb}.$$

§ 11.

Druckbelastung außerhalb des Kerns bei Ausschluß von Zugfestigkeit.

52. Lage der Nulllinie. Bisher wurden die Spannungen σ für den Fall einer den Querschnitt schneidenden Nulllinie unter der Voraussetzung bestimmt, daß der Längskraft N sowohl durch Druckspannungen als auch durch Zugspannungen das Gleichgewicht gehalten wird. Es kommt aber auch vor, daß Zugspannungen nicht entstehen können, beispielsweise dann, wenn sich ein Stab mit seinem Endquerschnitte gegen ein ebenes Widerlager stützt, ohne mit diesem irgendwie verbunden zu sein. Liegt hierbei der Angriffspunkt K des auf den Querschnitt vom Widerlager ausgeübten Druckes N außerhalb des Kerns, so trennt die Nulllinie nn den Querschnitt in zwei Teile, von denen der eine, den Punkt K enthaltende, durch Druckspannungen *(Pressungen)* beansprucht wird, während der andere spannungslos ist.

Der gleiche Fall liegt vor, wenn bei der Verteilung eines Druckes N über einen von der Nulllinie geschnittenen Querschnitt eines gemauerten Pfeilers die Annahme fehlender Zugfestigkeit gemacht wird, die zwar mit der Wirklichkeit nicht im Einklange steht, trotzdem aber bei der Beurteilung der Druckfestigkeit des Pfeilers erlaubt ist, weil sie für die Druckspannungen höhere Werte als die tatsächlich entstehenden liefert.

Bezeichnen wir nun den Abstand des Angriffspunktes K von der Nulllinie nn mit f, Fig. 82, die Entfernung eines zur nn parallelen, unendlich schmalen Querschnittsstreifens dF von der nn mit x und die in allen Punkten dieses Streifens gleich große Druckspannung (welche wir in diesem Paragraph positiv annehmen) mit σ, so lauten die beiden Gleichungen, welche bei fehlender Zugfestigkeit ausdrücken, daß

1) die Summe der Kräfte σdF gleich dem Drucke N ist,
2) die Summe der Momente der Kräfte σdF, bezogen auf die nn gleich dem Momente Nf des Druckes N ist:

$$(1) \quad N = \int \sigma dF \text{ und } Nf = \int x \sigma dF,$$

wobei sich die Integrale nur über denjenigen Teil des Querschnittes erstrecken, welcher mit dem Angriffspunkte K auf derselben Seite der Nulllinie liegt.

Digitized by Google

Die Pressung σ folgt dem Gesetze: $\sigma = Cx$, wo C eine Konstante ist, welche sich aus der Gleichung (1) ergibt.

Man erhält: $N = C\int x dF$, mithin:

$$(2) \quad C = \frac{N}{\int x dF} \text{ also } \sigma = \frac{Nx}{\int x dF},$$

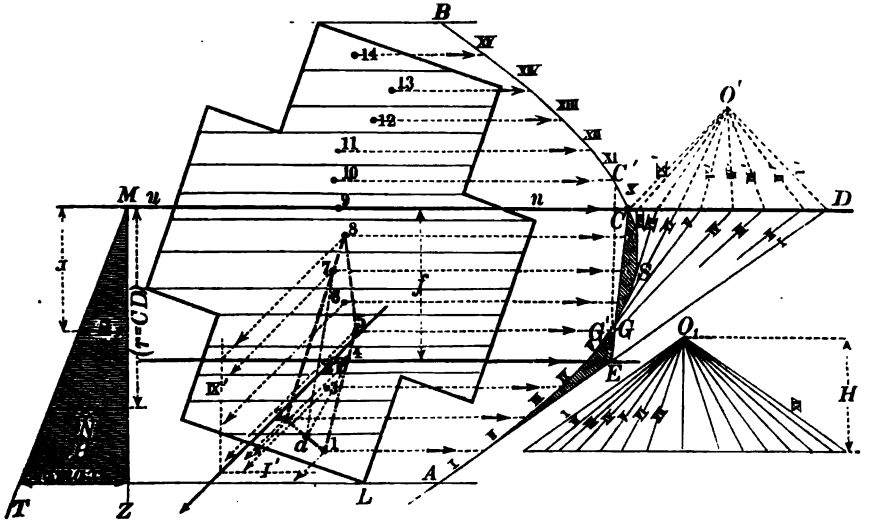


Fig. 82.

und hierauf, aus der zweiten der Gleichungen (1):

$$(3) \quad f = \frac{\int Cx^2 dF}{N} = \frac{\int x^2 dF}{\int x dF}.$$

Zähler und Nenner des für f gefundenen Bruches stellen beziehungsweise das Trägheitsmoment und das statische Moment des gedrückten Querschnittsteiles für die Achse nn vor; sie lassen sich mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmen. Hierzu zerlege man den ganzen Querschnitt in schmale, zur Nulllinie parallele Streifen, fasse deren Inhalte als Kräfte auf, welche in der Richtung nn wirken, zeichne zu ihnen mit der willkürlichen Polweite H (die eine Fläche vorstellt) das Seilpolygon $AGCB$ und bestimme die von diesem und der ersten Polygonseite AD auf der nn abgeschnittene

Digitized by Google

Strecke $\overline{CD} = r$*). Man findet dann (nach No. 15 bis 17) das gesuchte statische Moment $= Hr$ und (nach Gleichung 1 auf Seite 26) das gesuchte Trägheitsmoment $= 2H\mathfrak{F}$, unter $\mathfrak{F}$ den Inhalt der Fläche $AGCDA$ verstanden, welche von dem Seilpolygon und den Geraden CD und DA eingeschlossen wird. Die Gleichung (3) geht jetzt über in $f = \frac{2\mathfrak{F}}{r}$ und hieraus folgt $\frac{fr}{2} = \mathfrak{F}$, d. h.:

$$(4) \quad \Delta ECD = \mathfrak{F},$$

wobei E der Schnittpunkt einer durch K parallel zur nn gezogenen Geraden mit der ersten Seite des Seilpolygons ist. Aus der Gleich. (4) folgt, daß die Inhalte der beiden in Fig. 82 schraffierten Flächen AEG und GSC gleich groß sind, und es läßt sich daher die zu einem gegebenen Angriffspunkte K gehörige Nulllinie, *deren Richtung allerdings gegeben sein muß,* leicht finden, indem man nach Aufzeichnung des Seilpolygons und nach Bestimmung des Punktes E die Gerade EC so einträgt, daß jene Flächen-Gleichheit entsteht. Es kann dies durch Probieren oder kürzer dadurch erreicht werden, daß man eine Gerade EC' nach Augenmaß zieht und hierauf den Punkt C so bestimmt, daß

$$\Delta EC'C = \text{Fläche } C'SG' - \text{Fläche } G'EA$$

ist. Denn formt man diese Gleichung um in:

$$G'EA = C'SG' - \Delta EC'C$$

und fügt auf beiden Seiten die Fläche $G'GE$ hinzu, so erhält man in der Tat:

$$\text{Fläche } GEA = \text{Fläche } GSC.$$

Hat man die Nulllinie auf die beschriebene Weise bestimmt, so liegt der Angriffspunkt der Mittelkraft $\int \sigma dF$ sämtlicher Querschnittsbelastungen σdF, welche in den Schwerpunkten der entsprechenden Streifen dF angreifen, in der Geraden KE; er muß aber, damit zwischen den Kräften $\int \sigma dF$ und N Gleichgewicht besteht, mit dem Angriffspunkte K zusammenfallen, und hierzu ist nötig,

daß die Mittelkraft $\int \sigma dF$ der *in der Querschnittsebene nach irgend einer Richtung angenommenen* Kräfte σdF die Gerade KE im Punkte K schneiden muß.

---

*) Obgleich die Querschnittsstreifen von endlicher Breite sind, werden wir doch in der Folge für deren Inhalte die Bezeichnung dF beibehalten. Auch unterließen wir es, um die Fig. 82 nicht undeutlich zu machen, das Seilpolygon durch die einbeschriebene Seillinie zu ersetzen.

Digitized by Google

Ist dies nicht der Fall, so muß eine andere Richtung für die Nulllinie gewählt und das ganze Verfahren wiederholt werden.

Bei Aufsuchung jener Mittelkraft dürfen die Drücke $\sigma dF = Cx dF$ durch die ihnen proportionalen Strecken $\frac{x dF}{H}$ dargestellt werden, welche die Seiten des Seilpolygons $AGSC$ (nach No. 20) auf der Geraden nn abschneiden. Wählt man also den Pol O', zieht die Strahlen I', II', III' . . . ., denkt sich hierauf den Kräftezug CD samt dem Strahlenbüschel O' so gedreht, daß CD parallel der angenommenen Richtung der Drücke σdF ist und zeichnet das zugehörige Seilpolygon I', II', III' . . . ., so ist der Schnittpunkt der äußersten Seiten (I' u. IX') desselben ein Punkt der verlangten Mittelkraft. In der Figur 82 wurde die Drehung des Kräftezuges umgangen. Es wurden die Kräfte σdF unter 45° gegen die Gerade CD gerichtet angenommen und hierauf die Seilpolygonseiten I', II', III' . . . . (von denen, um die Figur nicht mit Linien zu überladen, nur I' u. IX' angegeben sind) unter 45° gegen die entsprechenden Seilstrahlen gezogen. Der Schnittpunkt R der Mittelkraft $\int \sigma dF$ mit der Geraden KE fällt so dicht an den Punkt K, daß man mit hinreichender Genauigkeit die Gerade nn als die dem Angriffspunkte K entsprechende Nulllinie ansehen darf.

Es bleibt jetzt noch zu erörtern, wie die Richtung der Nulllinie nn gewählt werden muß. Im allgemeinen ist man auf den Weg des Versuches angewiesen, und deshalb ist es wichtig, nach Annahme einer beliebigen Richtung der nn, schnell entscheiden zu können, ob überhaupt die Möglichkeit vorhanden ist, daß der gegebene Angriffspunkt K mit dem Punkte R zusammenfällt. Verbindet man zu diesem Zwecke die Schwerpunkte der gedrückten Querschnittsstreifen durch ein (in der Fig. 82 strichpunktiertes) Polygon, welches keinen einspringenden Winkel besitzt, mithin alle nicht auf ihm liegenden Schwerpunkte einschließt, so liegt der Mittelpunkt R aller Querschnitts-Belastungen σdF innerhalb dieses Polygons, und es muß deshalb auch der gegebene Punkt K innerhalb dieses Polygons liegen, wenn sein Zusammenfallen mit R möglich sein soll. Bei der in Fig. 82 gewählten Richtung der nn ist diese Bedingung erfüllt, und an diesem Ergebnisse wird nichts geändert, wenn auch die Nulllinie, deren Lage ja zunächst unbekannt ist, da die Wahl der Richtung der nn der Aufzeichnung des Seilpolygons voranzugehen hat, parallel mit sich selbst verschoben wird.

Man kann aber den Teil des Querschnitts in Fig. 82, innerhalb dessen der Punkt K liegen muß, auf einfache Weise noch enger begrenzen, indem man die auf die Flächenstreifen 1 und 2 wirkenden Belastungen σdF, welche wir mit P_1 und P_2 bezeichnen wollen, zu

Digitized by Google

einer Mittelkraft vereinigt, deren Angriffspunkt a auf der Geraden $\overline{12}$ liegt und diese so teilt, daß sich verhält: $\overline{1a} : \overline{2a} = P_2 : P_1$. Die Belastungen P_1 und P_2 sind den auf die Achse nn bezogenen statischen Momenten der entsprechenden Streifen proportional. Bezeichnet man also die Abstände der Schwerpunkte 1 und 2 von der nn mit x_1 und x_2 und verwandelt die Streifen 1 und 2 in Rechtecke, welche bei gleicher, beliebiger Grundlinie die Höhen z_1, z_2 haben, so folgt $P_2 : P_1 = \frac{x_2 z_2}{c} : \frac{x_1 z_1}{c}$, wo c eine willkürlich zu wählende Strecke bedeutet.

Die Strecken $\frac{x_2 z_2}{c}$ und $\frac{x_1 z_1}{c}$ lassen sich leicht durch Zeichnung finden, worauf die Lage des Punktes a bestimmt werden kann. Ist dies geschehen, so ersetzt man die Seiten $\overline{41}$, $\overline{12}$, $\overline{27}$ des in der Fig. 82 gezeichneten strichpunktierten Polygons durch die Seiten $\overline{4a}$ und $\overline{a7}$ und erhält dann eine wesentlich kleinere Fläche, innerhalb welcher der Punkt K liegen muß, wenn sein Zusammenfallen mit R möglich sein soll.

Ergibt sich nun, trotz aller Sorgfalt bei der Wahl der Richtung der nn, nachträglich eine unbefriedigende Übereinstimmung der Lagen von K und R, so muß die Nulllinie in eine neue Lage $n'n'$ (Fig. 83) gedreht werden, und hierbei empfiehlt es sich, den von der nn abgegrenzten Querschnittsteil, dessen Inhalt $= F$ sei und der kurz als Fläche F bezeichnet werden soll, zunächst *unverändert beizubehalten* und in der Nähe der Nulllinie, innerhalb der in der Fig. 83 schraffierten Fläche, Zugspannungen anzunehmen. Man bestimme den Schwerpunkt S der Fläche F (wobei zu beachten ist, daß die zur Geraden KE parallele Schwerlinie mit Hilfe des bereits in der Fig. 82 vorhandenen Seilpolygons $AGCB$ ermittelt werden kann) und verbinde die Punkte R und S durch eine Gerade; sie stellt die zur Nulllinie nn gehörige Kraftlinie vor. Wird die Fläche F auf ein schiefwinkliges Achsenkreuz (u, v) bezogen, dessen durch S gehende u-Achse parallel zur nn ist, und dessen v-Achse mit der Geraden RS zusammenfällt, so ist das Zentrifugalmoment $\int uv dF = 0$, und es folgt nach S. 59, daß bei einer Bewegung des Angriffspunktes R in die vorgeschriebene Lage K sich die Nulllinie um ihren Schnittpunkt T mit der Kraftlinie RS in eine solche Lage $n'n'$ dreht, daß sie auf der u-Achse die Strecke $\overline{SU} = u_s = \frac{i_s^2}{u_1}$ abschneidet, wobei $u_1 = \overline{RK}$ ist. Das auf die v-Achse bezogene Trägheitsmoment $J_s = F i_s^2$ wird am zweckmäßigsten mittels des *Mohr*schen Verfahrens bestimmt. Man zerlege

Digitized by Google

die Fläche F durch zur v-Achse parallele Sehnen in Teile, betrachte deren Inhalte als Kräfte, welche parallel zur v-Achse wirken, zeichne mit der in der Richtung der u-Achse gemessenen Polweite H', welche passend $= \frac{1}{2} F$ genommen wird eine Seillinie NQV und bestimme

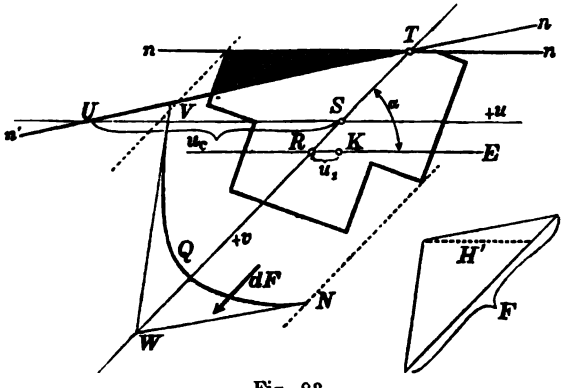


Fig. 83.

den Inhalt $\mathfrak{F}'$ der von dieser Linie und ihren äußersten Tangenten NW und VW eingeschlossenen Fläche. Man findet dann, nach Seite 26,

$$J_v = \frac{2H'\mathfrak{F}'}{\sin\alpha} = \frac{F'\mathfrak{F}'}{\sin\alpha} \text{ und hieraus } i_v^2 = \frac{\mathfrak{F}'}{\sin\alpha},$$

wo α den Winkel bedeutet, den die Achsen u und v miteinander bilden. Bringt man in der auf Seite 33—35 gezeigten Weise den Inhalt $\mathfrak{F}'$ auf die Form: $2\mathfrak{F}' = a_2 n$ und wählt die willkürliche Strecke $a_2 = \varepsilon u_1 \sin\alpha$, wobei ε eine beliebige Zahl vorstellen möge, so erhält man schließlich $u_v = \frac{\varepsilon}{2} n$.

Nach Festlegung der Geraden $n'n'$ ist die in der Fig. 82 dargestellte Konstruktion mit der verbesserten Richtung der Nulllinie zu wiederholen.

Zuweilen kann man die genaue Richtung der Nulllinie sofort angeben. Besitzt nämlich der zu untersuchende Querschnitt eine Symmetrieachse ss, Fig. 84, und enthält diese den Angriffspunkt K, so ist die Nulllinie senkrecht zur ss. Die Schwerpunkte sämtlicher zur nn parallelen Querschnittssehnen liegen auf der Geraden ss.

Ebenso leuchtet ein, daß einem auf der einen Diagonale eines

Digitized by Google

Rechtecks liegenden Angriffspunkte eine zur anderen Diagonale parallele Nulllinie entsprechen muß, Fig. 85.

53. Ermittelung der Druckspannung σ. Die auf Seite 87 abgeleitete Gleichung (2) liefert, wegen $\int x dF = Hr$ (wobei r = Strecke CD in Fig. 82), für die Druckspannung σ den Ausdruck

$$(5) \quad \sigma = \frac{N}{H}\frac{x}{r},$$

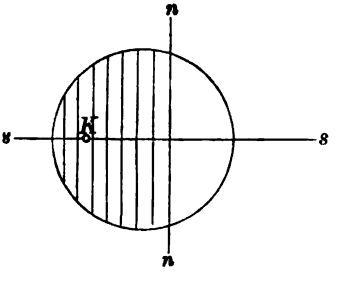


Fig. 84.

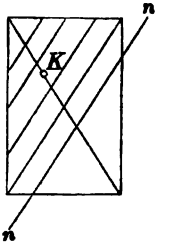


Fig. 85.

und hiernach ergibt sich im Abstande $x = r$ von der Nulllinie: $\sigma = \frac{N}{H}$. Durch diesen Wert ist die Gerade MT in Fig. 82 bestimmt, deren Ordinaten, bezogen auf eine zur Nulllinie senkrechte x-Achse gleich den Pressungen σ sind, und man ist nun im stande, den Wert σ_{max} für den äußersten Punkt L des Querschnitts anzugeben. Die willkürliche Polweite H wird man so wählen, daß sich der Ausdruck $\frac{N}{H}$ bequem berechnen läßt.

54. Das Rechteck, beansprucht durch einen Druck N, dessen Angriffspunkt auf einer Symmetrieachse liegt. Sind die Längen der Seiten des Rechtecks $= b$ und $= h$, und liegt der Angriffspunkt auf der zur Seite h parallelen Mittelachse, so ist die Nulllinie parallel zur Seite b. Bedeutet ξ den Abstand des Angriffspunktes K von der Seite LL (vergl. Fig. 86), so hat die nn von dieser Seite den Abstand 3ξ, weil, wegen der gleichen Breite der zur nn parallelen Querschnittsstreifen (bdx), eine durch K zur nn gezogene Parallele durch den Schwerpunkt S des Dreiecks MTZ gehen muß. Multipliziert man den Inhalt $\left(\frac{3\xi\sigma_1}{2}\right)$ dieses Dreiecks mit der Streifenbreite b, so

Digitized by Google.

erhält man die Summe aller auf die gedrückte Querschnittsfläche wirkenden Kräfte σdF. Diese Summe muß aber gleich N sein, und es folgt daher: $\frac{3\xi\sigma_1 b}{2} = N$, woraus sich die Formel ergibt:

$$(6) \quad \sigma_1 = \frac{2N}{3\xi b},$$

welche für die Berechnung von Gewölben, Pfeilern und Stützmauern besonders wichtig ist.

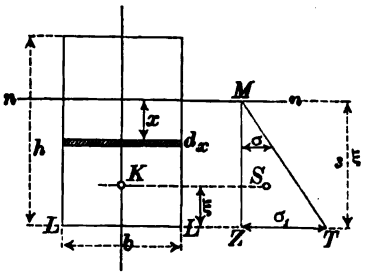


Fig. 86.

55. Untersuchung der Standsicherheit eines gemauerten runden Schornsteins. Zu den wichtigsten Anwendungen der in No. 52 und 53 abgeleiteten Gesetze gehört die Berechnung der durch Winddruck in den Querschnitten gemauerter Schornsteine hervorgerufenen Pressungen. Ist

G das Gewicht des Schaftes oberhalb des zu untersuchenden Querschnitts AB (Fig. 87),
H der wagerecht angenommene Winddruck,
M das Moment von H in Bezug auf AB,

so schneidet die Mittelkraft D aus G und H den Querschnitt AB im Abstande

$$(7) \quad c = \frac{M}{G}$$

vom Schwerpunkte. Liegt der Angriffspunkt K innerhalb des Kerns, so treten im Querschnitt nur Druckspannungen auf; der größte Wert derselben ist

$$(8) \quad \sigma = \frac{G}{F} + \frac{M}{W} = \frac{G}{F}\left(1 + \frac{c}{k}\right),$$

wo $k = \frac{W}{F}$ den Kernhalbmesser bedeutet.

Liegt K außerhalb des Kerns, so entstehen auf der Windseite Zugspannungen, die aber zweckmäßig vernachlässigt werden, weil auf ihre Mitwirkung nicht immer mit Sicherheit zu rechnen ist. Bedeutet dann, bezogen auf die Nulllinie nn,

J_n das Trägheitsmoment der gedrückten Querschnittsfläche,
S_n das statische Moment „ „ „
f den Abstand der nn vom Angriffspunkte K,
z den Abstand des stärkst gedrückten Querschnittsteilchens von der nn,

Digitized by Google

so ist die größte Druckspannung nach Gleichung (2)

$$(9) \quad \sigma = \frac{Gz}{S_n}$$

und der Abstand f, nach Gleichung (3),

$$(10) \quad f = \frac{J_n}{S_n}.$$

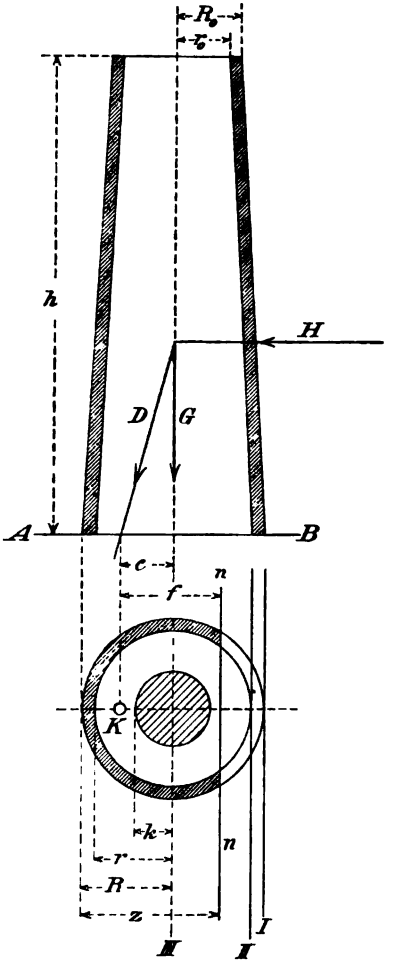


Fig. 87.

Erfährt die Einheit einer vom Winde rechtwinklig getroffenen Fläche den Druck w, so darf man für den Normaldruck w_1 auf die Einheit einer Fläche, welche mit der Windrichtung den Winkel α bildet, den Wert

$$(11) \quad w_1 = w \sin^2 \alpha$$

annehmen. Es ergibt sich dann der Winddruck auf einen Kreiszylinder vom Halbmesser R und der Höhe h, dessen Achse senkrecht zur Windrichtung ist, Fig. 88,

$$H = 2 w R h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \alpha \, d\alpha$$

$$(12) \quad H = \frac{2}{3} w \, 2Rh = \frac{2}{3} w \mathfrak{F},$$

wo $\mathfrak{F}$ die Projektion der Zylinderfläche senkrecht zur Windrichtung bedeutet.

Für den auf dem Querschnitt AB ruhenden Teil des Schornsteins findet man, wenn R_0 und R die äußeren Halbmesser des Mündungsquerschnitts und des Querschnitts AB bezeichnen, genügend genau

$$(13) \quad H = \frac{2}{3} w (R_0 + R) h.$$

Digitized by Google

Das statische Moment dieser Belastung in Bezug auf AB ist

$$(14) \quad M = \frac{2}{9} w h^2 (2R_0 + R).$$

Im deutschen Binnenlande genügt es in der Regel, $w = 125\,^k/_{qm} = 0{,}125\,^t/_{qm}$ anzunehmen, während an der freien Meeresküste mindestens mit $w = 0{,}150\,^t/_{qm}$ gerechnet werden sollte. Im zweiten Falle hält der Verfasser sogar die Annahme von $w = 0{,}200\,^t/_{qm}$ für ratsam, empfiehlt aber für diesen Ausnahmefall die Zulassung hoher Pressungen.

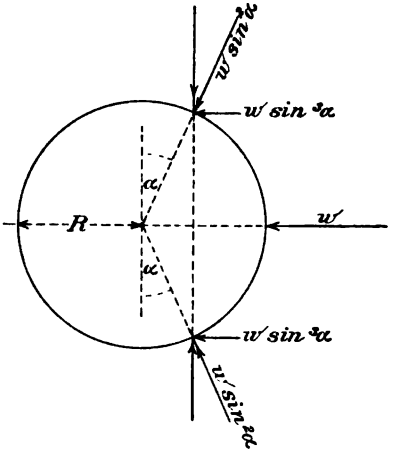


Fig. 88.

Besondere Vorsicht erheischt die Berechnung kleinerer und mittelgroßer Schornsteine. Infolge des geringen Gewichtes G kann es hier vorkommen, daß selbst bei einer recht kleinen gedrückten Fläche die Beanspruchung σ für den angenommenen Winddruck noch unterhalb der zulässigen Grenze bleibt, daß aber eine ganz geringe Steigerung dieser Windstärke genügt, um die Pressung weit über das zulässige Maß zu erhöhen. Ein solcher Schornstein bietet gewiß nicht die gewünschte Sicherheit.

Man erhält nun ein recht anschauliches Bild von dem Sicherheitsgrade, wenn man die Pressungen σ für verschiedene Windstärken w berechnet, die Werte w als Abscissen und die zugehörigen σ als Ordinaten aufträgt und auf diese Weise das Gesetz, nach welchem die σ mit den w zunehmen, durch eine Kurve darstellt (Fig. 91). Die Ermittelung dieser σ-Linie gestaltet sich am einfachsten, wenn die Wertepaare σ, w für solche Nulllinien-Lagen bestimmt werden, denen möglichst einfache Ausdrücke der Größen J_n, S_n und c entsprechen.

Solange die Nulllinie außerhalb des Querschnitts bleibt, ist die σ-Linie eine Gerade; sie ist bestimmt durch die im Falle $w = 0$ auftretende Pressung

$$(15) \quad \sigma_0 = \frac{G}{F}$$

und durch die Pressung

Digitized by Google

$$(16) \quad \sigma_I = \frac{2G}{F},$$

welche zu der den Querschnitt berührenden Nulllinie I (Fig. 87) gehört. Die Windstärke w_I, welche σ_I hervorbringt, wird aus der Gleichung

$$c = \frac{M}{G} = k$$

gefunden. Für den Kernhalbmesser k ergibt sich aus den Formeln

$$F = \pi (R^2 - r^2)$$

$$J = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) = \frac{F}{4} (R^2 + r^2)$$

$$W = \frac{J}{R}$$

der Wert

$$(17) \quad k = \frac{W}{F} = \frac{R^2 + r^2}{4R}.$$

Dringt die Nulllinie in den Querschnitt ein, so ist σ nicht mehr proportional w; die Steigung der σ-Linie nimmt stetig zu. Als äußerste Grenzlage der Nulllinie sollte man stets die durch den Schwerpunkt gehende Lage III (Fig. 87) ansehen, d. h. man sollte stets fordern, daß mindestens die Hälfte des Querschnitts zur Wirkung gelangt. Für diese Lage ist

$$J_n = \frac{1}{2} J \text{ und } S_n = \frac{2}{3} (R^3 - r^3) \text{ (vergl. Seite 40)}$$

$$(18) \quad c = \frac{J_n}{S_n} = \frac{J}{2S_n} = \frac{3\pi}{16} \frac{1 - \frac{r^4}{R^4}}{1 - \frac{r^3}{R^3}} R$$

$$\sigma = \frac{GR}{S_n}.$$

Setzt man

$$G = \sigma_0 F = \frac{\sigma_I F}{2} \text{ und } S_n = \frac{J}{2c_{III}} = \frac{FkR}{2c_{III}} = \frac{FR}{2} \frac{c_I}{c_{III}},$$

so erhält man die übersichtliche Formel

$$\frac{\sigma_{III}}{\sigma_I} = \frac{c_{III}}{c_I} = \frac{w_{III}}{w_I}$$

und erkennt, daß die Endpunkte der Ordinaten σ_I und σ_{III} der σ-Linie in einer durch den Ursprung gehenden Geraden liegen (Fig. 19). Drückt man $c_I = k$ und c_{III} mit Hilfe von 17 und 18 aus, so findet man

Digitized by Google

$$\frac{\sigma_{III}}{\sigma_I} = \frac{w_{III}}{w_I} = \frac{c_{III}}{c_I} = \frac{3\pi}{4} \frac{1 + \frac{r}{R}}{1 + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}}$$

und hierfür darf man genügend genau setzen

$$(19) \quad \frac{\sigma_{III}}{\sigma_I} = \frac{w_{III}}{w_I} = \frac{c_{III}}{c_I} = 2{,}5 - \frac{r}{R}.$$

Ein guter Näherungsausdruck für c_{III} ist auch

$$(20) \quad c_{III} = \frac{R}{2} + \frac{r}{4}.^*)$$

Zwischen den Nulllinien *I* und *III* nehme man noch die den inneren Kreis auf der Windseite berührende Nulllinie *II* an, Fig. 89. Den spannungslosen Querschnittsteil betrachte man als Parabelabschnitt, setze also mit den aus Fig. 90 ersichtlichen Bezeichnungen

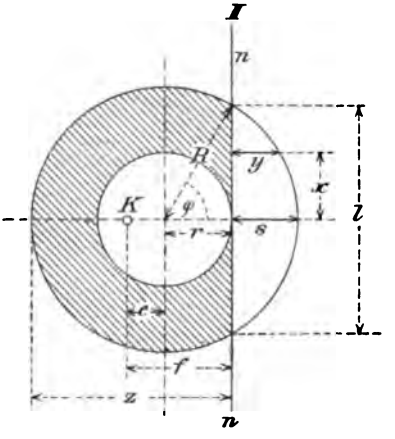


Fig. 89.

$$y = \frac{s\,(l^2 - 4x^2)}{l^2}$$

$$J_n = J + Fr^2 - 2\int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{y^3 dx}{3}$$

$$= \frac{\pi\,(R^4 - r^4)}{4} + \pi\,(R^2 - r^2)\,r^2 - \frac{16\,s^3 l}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$S_n = Fr + 2\int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{y^2 dx}{2} = \pi\,(R^2 - r^2)\,r + \frac{4\,s^2 l}{3 \cdot 5}$$

$$c = f - r = \frac{J_n}{S_n} - r.$$

Man findet dann, da $\frac{l}{2} = \sqrt{R^2 - r^2}$ ist,

$$\sigma = \frac{G\,(R + r)}{S_n} = \sigma_0 \frac{(R + r)\,F}{S_n}$$

*) Auf die Näherungsformel für c hat bereits Professor Lang in seinem Buche *Der Schornsteinbau* aufmerksam gemacht.

Digitized by Google

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\left(1+\frac{r}{R}\right)^2}{\frac{r}{R}\left(1+\frac{r}{R}\right) + \frac{8}{15\pi}\left(1-\frac{r}{R}\right)\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}$$

und erhält für

$\frac{r}{R} =$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{\sigma}{\sigma_0} =$	2,73*)	2,52	2,36	2,22	2,10.

während c für alle im Schornsteinbau vorkommenden Mauerstärken nur sehr wenig von

$$(21) \quad c = \frac{R}{2} \text{ **)}$$

abweicht. Zur Berechnung von σ für die Nulllinie *II* darf stets die einfache Formel

$$(22) \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} = 3{,}45 - 1{,}5\,\frac{r}{R}$$

benutzt werden; sie liefert für die oben angegebenen Werte von $r : R$ die Spannungsverhältnisse

$\frac{\sigma}{\sigma_0} =$	2,7	2,55	2,4	2,25	2,10.

Zahlenbeispiel. Der Schaft eines Schornsteines bestehe aus 6 Trommeln von 5^m Höhe (Fig. 90), deren Wandstärken (s)

0,16^m 0,21^m 0,26^m 0,31^m 0,36^m 0,41^m

und deren mittlere Durchmesser (d)

1,26^m 1,41^m 1,56^m 1,71^m 1,86^m 2,01^m

sind. Die Stärken s nehmen um das gleiche Maß $\Delta s = 0{,}05^m$ zu, die Durchmesser d um $\Delta d = 0{,}15^m$.

---

*) Setzt man oben für y die Ordinaten der Kreislinie ein, an Stelle der Parabelordinaten, so findet man

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\pi\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\left(1+\frac{r}{R}\right)}{\frac{1}{3}\sin\varphi\left(2+\frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{r}{R}\left(\pi - \pi\,\frac{r^2}{R^2} - \varphi\right)}$$

wo $\cos\varphi = \frac{r}{R}$. Für $\frac{r}{R} = 0{,}5$ erhält man $\frac{\sigma}{\sigma_0} = 2{,}71$. Je größer $\frac{r}{R}$ ist, desto kleiner ist der Fehler, der durch die Einführung der Parabelordinaten begangen wird.

**) Für $\frac{r}{R} = 0{,}5$ ergibt sich $c = 0{,}499\,R$ oder $0{,}488\,R$, je nachdem y nach der Parabel- oder Kreisgleichung berechnet wird. Je größer $\frac{r}{R}$ ist, desto genauer ist der Näherungswert $c = 0{,}5\,R$.

Digitized by Google

Das Gewicht des Schaftes, der aus dichten, schweren Lochsteinen in verlängertem Zementmörtel bestehen möge (einem Baustoff, der $1{,}9\,^t/_{cbm}$ wiegt) beträgt

$$G = 1{,}9 \cdot \pi \cdot 5{,}0\,[0{,}16 \cdot 1{,}26 + 0{,}21 \cdot 1{,}41 + 0{,}26 \cdot 1{,}56 + 0{,}31 \cdot 1{,}71 + 0{,}36 \cdot 1{,}86 + 0{,}41 \cdot 2{,}01] = 87{,}4^t.\text{*)}$$

Der unterste Querschnitt hat den Inhalt

$$F = \pi\,(R^2 - r^2) = \pi\,(1.26^2 - 0{,}85^2) = 2.72\ qm,$$

er erfährt infolge von G die Pressung

$$\sigma_0 = \frac{G}{F} = \frac{87{,}4}{2{,}72} = 32\,^t/_{qm} = 3{,}2\,^k/_{qcm}.$$

Der Winddruck erzeugt für den untersten Querschnitt das Moment

$$M = \frac{2}{9}\,w\,h^2\,(2\,R_0 + R) = \frac{2}{9}\,w\,30^2\,(2 \cdot 0{,}66 + 1{,}26)$$

$$M = 516\,w$$

und diesem entspricht

$$c = \frac{M}{G} = \frac{516\,w}{87{,}4}.$$

Zu einem bestimmten Abstande c gehört also die Windstärke

$$w = 0{,}17\,c.$$

Hat die Nulllinie die Lage I, so ist

$$c_I = k = \frac{R^2 + r^2}{4\,R} = \frac{1{,}26^2 + 0{,}85^2}{4 \cdot 1{,}26} = 0{,}458^m;$$

die zugehörige Windstärke beträgt

$$w_I = 0{,}17 \cdot 0{,}458 = 0{,}078\,^t/_{qm} = 78\,^{kg}/_{qm}$$

und die bei diesem Winddruck entstehende Pressung

$$\sigma_I = 2\,\sigma_0 = 6{,}4\,^{kg}/_{qcm}.$$

Für die Nulllinien-Lage II erhält man $\left(\text{mit } \frac{r}{R} = \frac{0{,}85}{1{,}26} = 0{,}675\right)$

$$c_{II} = \frac{1}{2}\,R = 0{,}63^m$$

$$w_{II} = 0{,}17 \cdot 0{,}63 = 0{,}107\,^t/_{qm} = 107\,^{kg}/_{qm}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_0\left(3{,}45 - 1{,}5\,\frac{r}{R}\right) = 3{,}2\,(3{,}45 - 1{,}5 \cdot 0{,}675) = 7{,}8\,^{kg}/_{qcm}$$

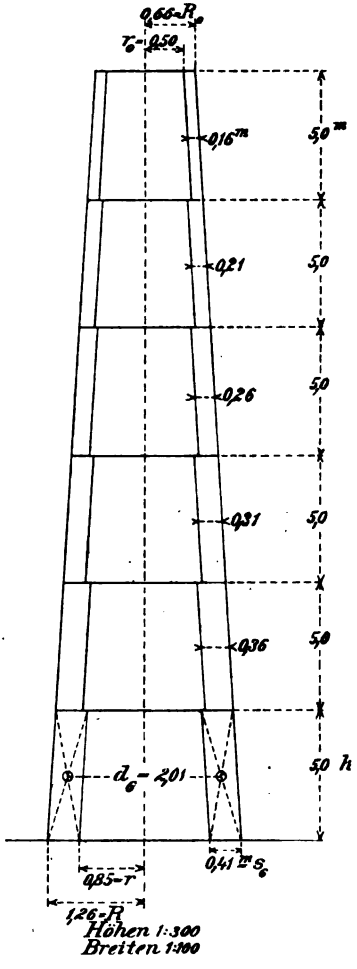


Fig. 90.

*) Sind die Trommeln gleich hoch und nehmen die Wandstärken um das gleiche Maß Δs zu, so findet man für das Gewicht G leicht den Ausdruck

Digitized by Google

und für die Lage *III*

$$\frac{\sigma_{III}}{\sigma_I} = \frac{w_{III}}{w_I} = 2{,}5 - \frac{r}{R} = 2{,}5 - 0{,}675 = 1{,}825$$

$$\sigma_{III} = 6{,}4 \cdot 1{,}825 = 11{,}7^{kg}/_{qcm}$$

$$w_{III} = 78 \cdot 1{,}825 = 142^{kg}/_{qm}.$$

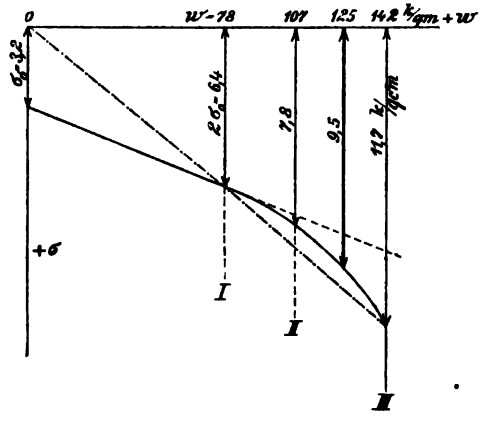


Fig. 91.

Der Verlauf der σ-Linie, Fig. 91, ist zufriedenstellend. Für den in der Regel als ausreichend zu erachtenden Winddruck von $125^{kg}/_{qm}$ ergibt sich die mäßig zu nennende Pressung von $\sigma = 9{,}5^{kg}/_{qcm}$ und selbst bei einem Winddruck von rund $140^{kg}/_{qm}$ entsteht nur eine Beanspruchung von $12^{kg}/_{qcm}$. In den oberen Querschnitten des Schaftes nehmen (im vorliegenden Falle) die Pressungen ab.

An der Hand der gefundenen Zahlenwerte möge noch die einfache von Hüppner aufgestellte hyperbolische Annäherungsformel

$$\sigma = 2\sigma_0 \frac{R-k}{R-c}$$

geprüft werden. Dieser Ausdruck ist so gebildet, daß sich für $c = k$ die Pressung $\sigma = 2\sigma_0$ ergibt und für $c = R$ der Wert $\sigma = \infty$. Im Falle $c = R$

$$G = \gamma\pi s_1 (R + r_0) h + \frac{1}{3}\gamma\pi\Delta s h (m-1)\left[3 r_0 + (R - R_0)\frac{2m + 0{,}5}{m} - \Delta s (m - 0{,}5)\right],$$

wo m die Anzahl der Trommeln bedeutet,
s_1 die Stärke der obersten Trommel
h die Höhe des Schaftes
r_0 den inneren Halbmesser des obersten Querschnitts
R_0 „ äußeren „ „ „ „
R „ „ „ „ untersten „
γ das Gewicht des Mauerwerks f. d. Raumeinheit.

Digitized by Google

wird bei fehlender Zugfestigkeit die wirksame Querschnittsfläche unendlich klein — ein Ergebnis das natürlich nur so zu deuten ist, daß die σ-Linie außerhalb ihres Geltungsbereiches eine Asymptote besitzt; denn bereits für Werte von c, die in der Nähe von R liegen, hat die Vernachlässigung der Zugfestigkeit keinen Sinn mehr. Hält man aber daran fest, daß die durch den Schwerpunkt gehende Nulllinie *III* die äußerste zu gestattende ist, so liefert die sehr übersichtliche Hüppnersche Formel brauchbare Werte. Im vorliegenden Falle wird

$$\sigma = 2 \cdot 3{,}2 \frac{1{,}26 - 0{,}458}{1{,}26 - c} = \frac{5{,}133}{1{,}26 - c}.$$

Für $c = c_{II} = 0{,}63^m$ ergibt sich $\sigma_{II} = 8{,}1^{kg}/_{qcm}$

„ $c = c_{III} = 0{,}84^m$ „ „ $\sigma_{III} = 12{,}0^{kg}/_{qcm}$,

d. s. Zahlen, die von den oben gefundenen fast gar nicht abweichen.

Für den Abstand z der Nulllinie von dem am stärksten gedrückten Querschnittsteilchen gibt Hüppner den Wert

$$z = 2R \frac{R - c}{R - k};$$

dieser wird gleich Null für $c = R$ und gleich $2R$ für $c = k$. Den Abständen $c_{II} = 0{,}63^m$ und $c_{III} = 0{,}84^m$ entsprechen die Strecken

$$z_{II} = 1{,}98^m \text{ und } z_{III} = 1{,}32^m,$$

welche von unseren Werten

$$z_{II} = R + r = 2{,}11^m \text{ und } z_{III} = R = 1{,}26^m$$

schon etwas mehr abweichen.

Hinsichtlich der zulässigen Pressungen σ werde noch hervorgehoben, daß die für Schornsteinbauten besonders geeigneten, schweren dichten Lochsteine, desgleichen gute Hartbrandsteine, beide in Kalk-Zementmörtel (Mischung: 1 Raumteil Portlandzement, 1 bis $2^1/_2$ Raumteile Kalk und 4 bis 9 Raumteile reiner scharfer Sand) mit 12 bis $30^{kg}/_{qcm}$ belastet werden dürfen. Je größer der Zementzusatz und je länger die Bauzeit ist, desto höher darf die Beanspruchung gewählt werden. Wird ein Schornstein in wenigen Tagen bei ungenügendem Zementzusatz in die Höhe getrieben, so schwebt er vor Erhärtung des Mörtels natürlich in Gefahr, von einem bald nach seiner Vollendung einsetzenden schweren Sturme umgeworfen zu werden; es wäre aber zu bedauern, wenn die Aufsichtsbehörden im Hinblick auf diese Möglichkeit an alle Schornsteine denselben Maßstab anlegen und auch bei sorgfältigster Ausführung und besonders für sehr hohe Schornsteine, die längere Zeit zu ihrer Errichtung bedürfen und deren Mörtel in den tieferen Schichten unter höherem Druck erhärtet und deshalb fester wird, nur die niedrigeren Werte σ gestatten wollten.

§ 12.

Schubspannungen und Hauptspannungen.

56. Schubspannungen. Auf die Ermittelung der durch die Querkraft Q hervorgerufenen Schubspannungen τ (vergl. Seite 56) soll in diesem Buche nur ganz kurz und für einen bestimmten Belastungszustand eingegangen werden, weil es sich hier um Untersuchungen handelt, welche der zeichnerischen Behandlung wenig zugänglich sind. Dies gilt besonders von dem Falle einer nicht durch den Schwerpunkt

Digitized by Google

des Querschnitts gehenden, den Stab somit auf Drehungsfestigkeit beanspruchenden Kraft Q.

Wir beschränken uns deshalb darauf, an der Hand bekannter Gesetze der Festigkeitslehre, die Schubspannungen in einem prismatischen Stabe darzustellen, welcher durch äußere Kräfte beansprucht wird, die in ein und derselben, durch die Stabachse gehenden, den Stab in zwei symmetrische Hälften trennenden Ebene liegen. Die Kraftlinie ist dann eine Symmetrieachse des Stabes; sie sei zur v-Achse gewählt und eine auf ihr senkrechte Schwerlinie zur u-Achse. Fig. 92. Die Schubspannung τ in irgend einem Punkte (u, v) des Querschnitts werde in die Seitenspannungen $\tau_v \perp v$ und $\tau_u \perp u$ zerlegt.

Wird die *Annahme* gemacht, das τ_u für alle Punkte einer zur u-Achse parallelen Sehne AB gleich groß ist und wird vorausgesetzt, daß am Umfange des Stabes keine äußeren Kräfte in der Richtung der Stabachse auftreten, daß also die Schubspannungen für alle Punkte der Oberfläche (des Mantels) gleich Null sind, so folgen τ_u und τ_v den Gesetzen:

$$(1) \quad \tau_u = \frac{QS}{2xJ}; \quad \tau_v = \tau_u \operatorname{tg} \varphi \frac{u}{x},$$

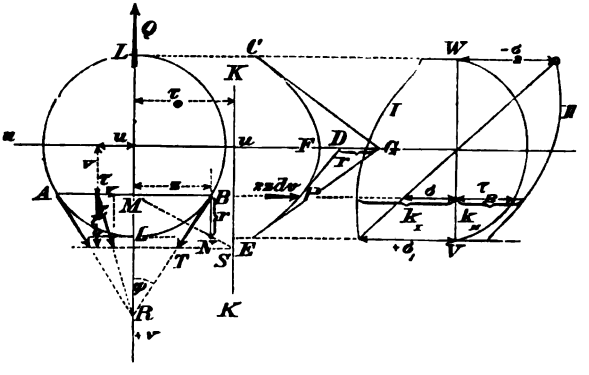


Fig. 92.

wobei $2x$ die Länge der Sehne AB,

S das auf die u-Achse bezogene statische Moment des einen der beiden durch die Sehne AB begrenzten Querschnittsteile (z. B. des Teils ALB)

J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts in Bezug auf die u-Achse und

φ den Winkel bedeutet, welchen die in B an den Querschnitt gelegte Tangente mit der v-Achse bildet.

Digitized by Google

Die zweite der Gleichungen (1) sagt aus, daß die Spannungen τ für sämtliche Punkte der Sehne AB durch den auf der v-Achse gelegenen Schnittpunkt R der in A und B an den Querschnitt gezogenen Tangenten gehen.

Denkt man den Querschnitt in unendlich schmale, zur v-Achse senkrechte Streifen zerlegt, betrachtet deren Inhalte $dF = 2z\,dv$ als Kräfte, welche in der Richtung der u-Achse wirken, und zeichnet mit der beliebigen Polweite H die Seillinie CFE jener Kräfte, so kann man das statische Moment S ermitteln, indem man an die Seillinie in ihrem Schnittpunkte P mit der Sehne AB eine Tangente PD legt und die Strecke $\overline{DG} = r$ bestimmt, die auf der u-Achse von der Geraden PD und den in der u-Achse sich treffenden äußersten Tangenten an die Seillinie abgeschnitten wird. Es ergibt sich dann $S = Hr$, ferner (nach No. 21) $J = 2H\mathfrak{F}$, wo $\mathfrak{F}$ den Inhalt der von der Seillinie CFE und den äußersten Tangenten EG und CG begrenzten Fläche bedeutet. Mit der Bezeichnung:

$$\tau_0 = \frac{Q}{4\mathfrak{F}}$$

ergibt sich

$$\tau_u = \tau_0 \frac{r}{z},$$

ein Wert, welcher sich nach Berechnung von τ_0 leicht darstellen läßt. Kennt man τ_u, so kann man auch τ angeben, da die Richtung dieser Spannung gegeben ist. Es genügt, für jede Sehne AB den größten Wert τ zu bestimmen, nämlich den in A oder B herrschenden. Zu diesem Zwecke ziehe man zur v-Achse in der Entfernung τ_0 eine Parallele KK, errichte in B auf der Sehne AB das Lot $\overline{BN} = r$, verbinde N mit dem Mittelpunkte M der AB und ziehe durch den Schnittpunkt S der beiden Geraden MN und KK eine Parallele zur u-Achse; die Parallele schneidet dann auf der Tangente BR die im Punkte B herrschende Schubspannung $\overline{BT} = \tau_B$ ab.

In dieser Weise wurden in der Fig. 92 die Schubspannungen τ_B für sämtliche Punkte des Querschnittsumfanges bestimmt und hierauf, von einer zur v-Achse parallelen Geraden WV aus, in den Verlängerungen der entsprechenden Sehnen AB als Ordinaten aufgetragen.

Die Annahme gleicher Spannungen τ_u für alle Punkte einer zur u-Achse parallelen Sehne ist um so zutreffender, je kürzer jene Sehne im Verhältnis zur Ausdehnung des Querschnitts in der Richtung von Q ist. Sie liefert also u. a. zuverlässige Ergebnisse, wenn es sich um die Schubspannungen τ im *Stege* des in der Fig. 93 dargestellten I-Querschnitts handelt, darf aber nicht auf die *Flanschen* dieses Querschnitts ausgedehnt werden. Da nämlich in allen Punkten des Umfanges

Digitized by Google

des Querschnitts die Schubspannungen tangential an den Umfang gerichtet sind, so ergibt sich für sämtliche Punkte der Geraden CD und EF in Fig. 93 die zur u-Achse senkrechte Spannung $\tau_u = 0$, und hieraus erkennt man ohne weiteres die Unmöglichkeit, daß in allen Punkten einer zur u-Achse parallelen und der Geraden CF unendlich nahen Sehne eine der ersten der Gleich. (1) genügende Schubspannung τ_u auftreten kann.*) Das Gleiche gilt für alle Querschnitte mit seitlichen, in der Richtung der v-Achse schmalen Ansätzen.

Aus diesem Grunde hat Winkler vorgeschlagen, bei der Berechnung der Spannungen τ in den Flanschen der I-Querschnitte (und in ähnlichen Fällen) von der Annahme konstanter Spannungen τ_v für alle Punkte einer zur u-Achse senkrechten Sehne AB auszugehen, welche Voraussetzung zu der Formel

$$\tau_v = \frac{QS'}{z'J}$$

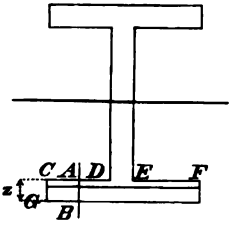


Fig. 93.

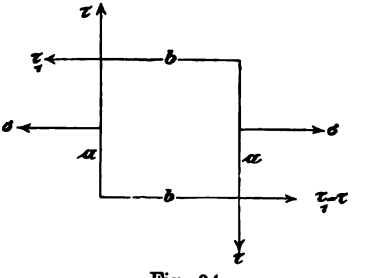


Fig. 94.

führt, unter S' das auf die u-Achse bezogene statische Moment des einen der beiden durch die Sehne AB begrenzten Querschnittsteile (z. B. des Teiles $ABGC$) verstanden und unter z' die Länge der Sehne AB. Es genügt aber, bei der Untersuchung der I-Querschnitte (und ähnlicher Querschnitte) die Spannungen τ im Stege zu ermitteln.

57. Hauptspannungen. Wir denken uns aus dem Stabe einen unendlich kleinen Würfel von den Kantenlängen a, b, c herausgetrennt. Fig. 94. Die eine Seitenfläche ac liege in der Ebene des zur Stabachse senkrechten Querschnitts und an der Stelle u, v. Die Kante a sei parallel zur Schubspannung τ, folglich Kante b parallel zur Normalspannung σ. Ändern sich die Spannungen stetig mit der Lage der

*) Die törichte Annahme, es gelte Gleichung (1) auch für den Flansch, trifft man immer noch in einzelnen Büchern und Abhandlungen, wobei dann für die Sehne DE zwei Werte τ_u herausgerechnet werden, weil sich dort die Breite $2z$ sprungweise ändert!

Digitized by Google

beanspruchten Fläche, so unterscheiden sie sich in den einander gegenüberliegenden Seitenflächen des Würfels nur um unendlich kleine Größen, welche in der folgenden Untersuchung vernachlässigt werden dürfen. Bei unstetigen Spannungen aber muß der Stab vorerst in einzelne Teile zerlegt werden, innerhalb welcher sowohl σ als auch τ stetig sind, und es muß dann der betrachtete Würfel vollständig innerhalb eines dieser Teile liegen.

Die in den beiden Flächen ac wirksamen Schubkräfte τac bilden ein Kräftepaar mit dem Arme b und dem Momente τacb. Soll der Würfel im Gleichgewichte sein, so müssen in den Seitenflächen bc Schubkräfte $\tau_1 bc$ auftreten, welche (ein Paar mit dem Arme a bildend) das Moment τacb aufheben. Dazu ist nötig, daß $\tau_1 bca = \tau acb$ also $\tau_1 = \tau$ ist, und daß die beiden Momente entgegengesetzten Drehungssinn haben.

Es soll nun untersucht werden, wie groß die Spannungen in den Seitenflächen eines Würfels (a', b', c') sind, der in den Würfel (a, b, c) so einbeschrieben ist, daß seine Kanten a' und b' mit a, und b den Winkel α bilden, während $c' \parallel c$ ist, und zwar möge diese Aufgabe in etwas allgemeinerer Form gelöst werden, insofern nämlich angenommen werden soll, daß auch in den Seitenflächen bc des Würfels (abc) Normalspannungen auftreten. Fig. 95.

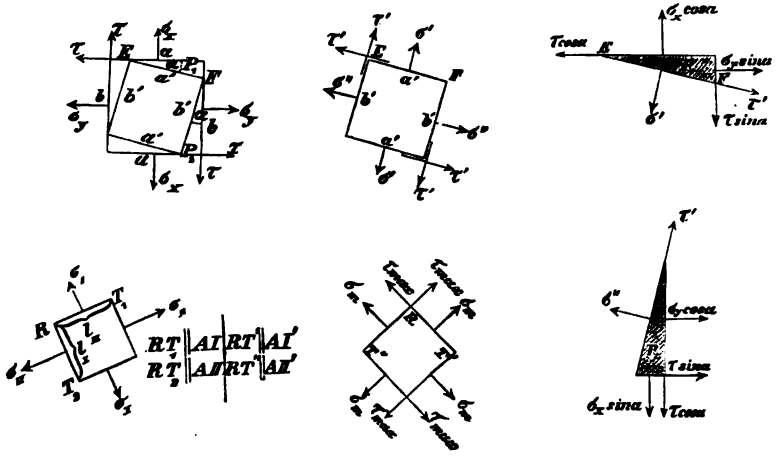


Fig. 95.

Wir bezeichnen die Spannungen für den Würfel (abc) mit $\sigma_x \sigma_y \tau$ und für den Würfel $(a'b'c')$ mit $\sigma' \sigma'' \tau'$; die letzteren ergeben sich aus den als bekannt angenommenen Spannungen σ_x, σ_y, τ durch Aufstellung

Digitized by Google

der Gleichgewichts-Bedingungen für die an den dreiseitigen Prismen (P_1) und (P_2) angreifenden Kräfte.

Wir betrachten zuerst das Prisma (P_1), setzen den Inhalt der in der Fig. 95 mit EF bezeichneten Seitenfläche desselben $= 1$ und erhalten dann, da die Inhalte der anderen Seitenflächen $= 1 \sin \alpha$ und $= 1 \cos \alpha$ sind, *durch Multiplikation der Spannungen mit den Flächen* die Belastungen σ', τ', $\sigma_x \cos \alpha$, $\tau \cos \alpha$, $\sigma_y \sin \alpha$, $\tau \sin \alpha$ dieser Flächen.

Es ließen sich nun σ' und τ' leicht in der Weise bestimmen, daß die bekannten Kräfte $\sigma_x \cos \alpha$, $\tau \cos \alpha$, $\sigma_y \sin \alpha$, $\tau \sin \alpha$ zu einem stetigen Zuge aneinander gesetzt werden, dessen Schlußlinie die das Gleichgewicht herstellende, auf die Fläche EF wirkende Mittelkraft ρ der Belastungen σ' und τ' angibt. Durch Zerlegung von ρ würde man σ' und τ' finden. Wir ziehen es aber vor, um auf eine bemerkenswerte Ähnlichkeit der vorliegenden Aufgabe mit einer früher gelösten schneller hinweisen zu können, die analytischen Ausdrücke für σ' und τ' anzugeben. Indem wir sämtliche Kräfte nach den Richtungen von σ' und τ' zerlegen und die Summen der nach den gleichen Richtungen wirkenden Seitenkräfte $= 0$ setzen, erhalten wir:

$$\sigma' - (\sigma_x \cos \alpha - \tau \sin \alpha) \cos \alpha - (\sigma_y \sin \alpha - \tau \cos \alpha) \sin \alpha = 0$$
$$\tau' - (\sigma_x \cos \alpha - \tau \sin \alpha) \sin \alpha + (\sigma_y \sin \alpha - \tau \cos \alpha) \cos \alpha = 0$$

und hieraus folgt dann

$$\sigma' = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau \sin 2\alpha$$
$$\tau' = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha.$$

In derselben Weise ergibt sich aus der Betrachtung des Prismas (P_2)

$$\sigma'' = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den auf Seite 45 für die Querschnittsmomente abgeleiteten Formeln (1), so erkennt man, daß zwischen den Spannungen σ', σ'', τ' und σ_x, σ_y, τ dieselben Beziehungen bestehen, wie zwischen den Querschnittsmomenten $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{x'y'}$ und J_x, J_y, J_{xy}. Aus den für die Hauptträgheitsmomente J_{max} und J_{min} auf Seite 46 erhaltenen Gleichungen (6) ergeben sich mithin für die *Hauptspannungen* σ_I und σ_{II} die Werte

$$\sigma_I = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$
$$\sigma_{II} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

und die Lage der von diesen Spannungen beanspruchten Flächen *I* und *II* ist bestimmt durch

Digitized by Google

$$(3)\quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

In den Flächen *I* und *II* ist $\tau = 0$. Aus der Fig. 56, Seite 50, folgt

$$\max J_{xy} = \overline{TM} = \frac{1}{2}(J_1 - J_2);$$

es ist also auch

$$(4)\quad \tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}),$$

und zwar entstehen die größten Schubspannungen in Flächen, die mit den Flächen *I* und *II* Winkel von 45° bilden.

Wir betrachten jetzt einen unendlich kleinen Würfel, dessen Seitenflächen durch die Hauptspannungen σ_I und σ_{II} beansprucht werden, und bezeichnen die Längen der zu diesen Spannungen parallelen Kanten mit l_I und l_{II}. Infolge von σ_I wird l_I um $\Delta' l_I = \frac{\sigma_I}{E} l_I$ verlängert (E = Elastizitätsmodul) und infolge von σ_{II} um $\Delta'' l_I = \frac{\sigma_{II} l_I}{mE}$ verkürzt, wo m einen Erfahrungswert bedeutet. Die gesamte Längenänderung ist

$$\Delta l_I = \frac{l_I}{E}\left(\sigma_I - \frac{1}{m}\sigma_{II}\right),$$

und ebenso ergibt sich

$$\Delta l_{II} = \frac{l_{II}}{E}\left(\sigma_{II} = \frac{1}{m}\sigma_I\right).$$

Diejenige allein und im Sinne l_I wirkende Spannung k_I, welche dieselbe Änderung Δl_I erzeugt, wie die beiden Spannungen σ_I und σ_{II} zusammen, ist

$$(5)\quad k_I = \sigma_I - \frac{1}{m}\sigma_{II} = \frac{m-1}{2m}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2},$$

und ebenso findet man

$$(6)\quad k_{II} = \sigma_{II} - \frac{1}{m}\sigma_I = \frac{m-1}{2m}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}.$$

Man erklärt den Stab für hinreichend fest, wenn k_I und k_{II} an keiner Stelle gewisse, durch die Erfahrung als zulässig befundene Werte überschreiten, muß dann aber bei der Beurteilung dieser Grenzwerte $\left(k_I = E\frac{\Delta l_I}{l_I}\right.$ und $\left.k_{II} = E\frac{\Delta l_{II}}{l_{II}}\right)$ darauf achten, daß es nicht gleichgültig ist, durch welche Ursachen die Verlängerungsverhältnisse

Digitized by Google

$\frac{\Delta l_I}{l_I}$ und $\frac{\Delta l_{II}}{l_{II}}$ hervorgerufen werden. Die allgemeine Anwendung solcher Zahlenwerte k, die nur aus der Beobachtung von nur auf Zug- oder Druckfestigkeit beanspruchten Stäben abgeleitet werden, kann beim Auftreten von Schubspannungen zu Ergebnissen führen, die mit der Erfahrung nicht im Einklange sind; sie sind höchstens zulässig, wenn die Spannungen τ eine so untergeordnete Bedeutung haben, wie bei den auf Biegungsfestigkeit beanspruchten, verhältnismäßig dünnen und langen Stäben.

Die Ziffer m ergibt sich nach der Molekulartheorie $= 4$, ist aber in Wirklichkeit für die verschiedenen Stoffe verschieden. Beispielsweise ist für Metalle nahezu $m = 3$. Für den in Fig. 94 dargestellten Fall ($\sigma_z = 0$) erhält man dann

$$(6) \quad \begin{cases} k_I = \frac{1}{3}\sigma + \frac{2}{3}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ k_{II} = \frac{1}{3}\sigma - \frac{2}{3}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \end{cases}$$

Hiernach lassen sich die Inanspruchnahmen k_I und k_{II} leicht durch Zeichnung finden, nachdem die Spannungen σ nach den in den §§ 9—10 entwickelten Verfahren mittels einer Geraden dargestellt worden sind. Der Wert $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten σ und 2τ.

In der Figur 92, welche eine durch den Schwerpunkt gehende Nulllinie der Spannungen σ voraussetzt, geben die der u-Achse parallelen, von der Geraden VW aus gemessenen Ordinaten der Linien I und II, die den Punkten des Querschnitts-Umfangs entsprechenden Werte k_I und k_{II} an. Die Schubspannung τ_0 wurde verhältnismäßig groß angenommen, und es entspricht deshalb die größte Inanspruchnahme nicht denjenigen Querschnittspunkten L, für welche σ am größten ist. Meistens jedoch ist $k_{max} = \sigma_{max}$ oder doch nur so wenig größer als σ_{max}, daß bei der Beurteilung der Festigkeit des Stabes von dem Einflusse der Schubspannungen τ abgesehen werden darf.

Digitized by Google

IV. Abschnitt.

Einleitung in die Theorie der ebenen Träger.

§ 13.

Allgemeines über die äußeren Kräfte.

Die auf einen Träger wirkenden äußeren Kräfte sind teils gegeben und sollen dann *Lasten* heißen, teils bestehen sie aus den zu suchenden, an den Auflagerstellen angreifenden *Stützenwiderständen*.

58. Die Lasten. Eine Last heißt eine *ständige (bleibende, ruhende)* oder eine *veränderliche (bewegliche)*, je nachdem sie stets oder nur zeitweise am Träger angreift. So bildet für einen Brückenträger sein Eigengewicht und das Gewicht von Fahrbahn und Querversteifung die ständige Belastung, während ein Eisenbahnzug, eine Schar von Lastwagen oder Menschengedränge als eine veränderliche Belastung zu betrachten ist.

Ein endliche, in einem Punkte angreifende Last wird *Einzellast* (auch *konzentrierte Last*) genannt, im Gegensatze zu der *auf eine Linie oder eine Fläche verteilten stetigen Last*.

In dem besonders häufigen Falle einer *gleichmäßig* auf eine Linie verteilten Belastung bezeichnen wir

die ständige Belastung der Längeneinheit der Linie mit g,

„ veränderliche „ „ „ „ „ „ p

und deuten bei der Bestimmung einer von der Belastung abhängigen Größe (z. B. eines Stützenwiderstandes, eines Momentes) durch einen Zeiger g oder p an, daß es sich nur um den Einfluß der ständigen oder der veränderlichen Belastung handelt.

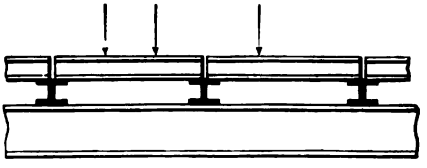


Fig. 96.

Kann die Belastung in jedem beliebigen Punkte des Trägers angreifen, so nennen wir sie eine *unmittelbare Belastung;* wirkt sie hingegen infolge der Anordnung von Zwischenträgern (Fig. 96) auf bestimmte Punkte *(Knotenpunkte)* des fraglichen Trägers, so ist sie eine *mittelbar* wirkende. Die in den Knotenpunkten angreifenden Lasten heißen

Digitized by Google

Knotenlasten, und ein zwischen zwei benachbarten Knotenpunkten gelegenes Trägerstück nennt man ein *Feld des Trägers*.

59. Auflager. Stützenwiderstände. Mittelgelenk. Ist es möglich, die durch die Lasten hervorgerufenen Stützenwiderstände ausschließlich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen zu finden, so wird der Träger ein *äußerlich statisch bestimmter Träger* genannt; im Gegenfalle ist er *äußerlich statisch unbestimmt*. Um diese Frage für einige der wichtigsten Trägerarten, vorbehaltlich einer späteren allgemeineren Untersuchung, zu entscheiden, betrachten wir zunächst die verschiedenen Arten der Auflagerung. Hierbei setzen wir voraus, *daß alle äußeren Kräfte in ein und derselben Ebene, der Kraftebene, liegen* und daß es bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen zulässig ist, die durch jene Kräfte und durch Temperaturänderungen erzeugten Formänderungen der Träger und Stützen zu vernachlässigen. Es dürfen dann alle Kräfte in denjenigen Lagen gedacht werden, welche sie im Falle vollkommen starrer Träger und Stützen einnehmen würden.

In den folgenden Untersuchungen wollen wir den Träger als aus einer oder mehreren *starren Scheiben* bestehend denken (vergl. die Figuren 97—104) und es dahingestellt sein lassen, ob er *vollwandig* oder *gegliedert* (d. h. aus Stäben zusammengesetzt) ist, oder ob er sowohl vollwandige als auch gegliederte Teile enthält. Bedingung ist nur, daß die gegliederten Scheiben ebenfalls starr sind, welcher Forderung beispielsweise durch die in den folgenden Figuren angenommenen Dreiecksysteme auch dann genügt wird, wenn die Stäbe an ihren Enden durch reibungslose Gelenke miteinander verbunden sind. In mehreren dieser Figuren sind gleichartig gestützte Träger aus vollen und gegliederten Scheiben einander gegenübergestellt worden.

Wird eine Scheibe in einem Punkte festgehalten, so nennen wir diesen Punkt ein *festes Auflagergelenk*, wobei das Wort *Gelenk* andeuten soll, daß sich die Scheibe bei einer etwa eintretenden Bewegung um jenen Punkt drehen kann.

Erfolgt die Stützung der Scheibe in einem Punkte, welcher sich auf einer gegebenen Geraden verschieben kann, diese Gerade aber nicht verläßt, so entsteht ein *bewegliches Auflagergelenk*. Der an dem letzteren angreifende Stützenwiderstand wirkt, wenn keine Reibung stattfindet, senkrecht zur Bahn des Gelenkes (vergl. Auflager *A* in Fig. 98); man braucht nur die *Größe* jenes Widerstandes anzugeben, während an einem festen Auflagergelenke *zwei* Unbekannte auftreten, nämlich *Größe und Richtung* des Stützenwiderstandes.

Wenn die Scheibe in einer Linie festgehalten wird, so ist außer der *Größe* und der *Richtung* des Stützenwiderstandes auch dessen *An-*

Digitized by Google

griffspunkt unbekannt. Wir bezeichnen eine derartige Auflagerung kurz als *feste Einspannung*.

Erfolgt hingegen die Stützung längs einer Linie, welche auf einer anderen widerstandslos gleiten kann, (z. B. B in Fig. 98) so liegt eine *bewegliche Einspannung* vor; der Stützenwiderstand wirkt rechtwinklig zur Auflagerbahn; er ist bestimmt, sobald seine Größe und sein Angriffspunkt gefunden sind.

Hängen zwei Scheiben in einem Punkte G zusammen, um welchen sie sich beim Eintreten einer Bewegung widerstandslos drehen können (Fig. 104), so nennen wir sie gelenkartig miteinander befestigt. G heißt ein *Mittelgelenk;* es wird in Wirklichkeit, ebenso wie die Auflagergelenke, mittels zylindrischer oder kugelförmiger Zapfen oder mit Hilfe von zwei aufeinander sich abwälzenden runden Teilen hergestellt, deren Reibungswiderstände in der Folge vernachlässigt werden sollen.

60. Stützung eines aus einer Scheibe gebildeten Trägers. Besteht der Träger aus *einer* Scheibe, und soll er äußerlich statisch bestimmt sein, so muß er in einer der folgenden Arten gestützt werden.

1. Der Träger wird an einer Stelle *fest eingespannt*. Fig. 97. Der Stützenwiderstand hat dann gleiche Größe aber entgegengesetzten Sinn wie die Mittelkraft R der Lasten und fällt mit R in dieselbe Gerade.

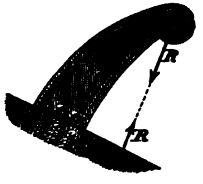


Fig. 97.

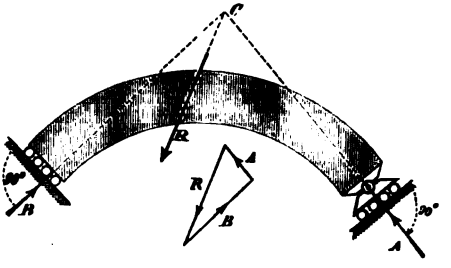


Fig. 98.

2. *Der Träger besitzt ein bewegliches Auflagergelenk (A)* und ist an einer Stelle *beweglich eingespannt*. Fig. 98. Die Stützenwiderstände sind senkrecht zu den Auflagerbahnen; ihre Richtungen sind somit bekannt. Von dem Widerstande A kennt man auch den Angriffspunkt, und es ist deshalb der Schnittpunkt C der Kräfte A und R gegeben. Sollen nun die drei Kräfte A, B, R miteinander im Gleichgewichte sein, so müssen sie sich in einem Punkte treffen, und hieraus

Digitized by Google

folgt, daß das Lot von C auf die Bahn des Lagers B die Richtung des Widerstandes B angibt. Die Unbekannten A und B können jetzt mittels eines Kräftedreiecks bestimmt werden.

3. *Der Träger erhält ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk*, an denen die Widerstände B und A angreifen. Fig. 99.

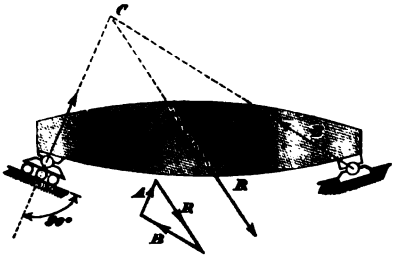


Fig. 99.

Von B kennt man den Angriffspunkt, von A Angriffspunkt und Richtung; letztere ist senkrecht zur Auflagerbahn und schneidet die Last R im Punkte C. Die Gerade BC gibt die Richtung des Widerstandes B an, und es können nun A und B mittels eines Kräftedreiecks gefunden werden.

4. *Der Träger erhält drei bewegliche Auflagergelenke*, deren zu den Auflagerbahnen senkrechte Widerstände A, B, C sich nicht in einem Punkte treffen. Fig. 100. Ihre Ermittelung erfordert die (in der Fig. 100 ausgeführte) Lösung der in No. 12 auf Seite 15 behandelten Aufgabe: drei der

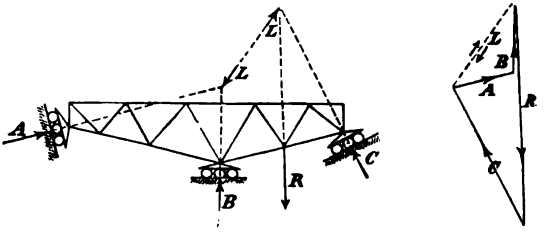


Fig. 100.

Lage nach bekannte Kräfte A, B, C zu bestimmen, welche einer gegebenen Kraft R das Gleichgewicht halten.

Am wichtigsten ist die dritte der angegebenen Stützungsarten. Ist bei dieser die Bahn des beweglichen Auflagergelenkes eine wagerechte Gerade, so rufen senkrechte Lasten nur senkrechte Stützenwiderstände hervor. Man nennt diesen Träger einen *Balken*. Fig. 101.

Die Anzahl der an den Auflagern auftretenden Unbekannten (nämlich Angriffspunkt, Richtung und Größe eines jeden Stützenwiderstandes) ist für sämtliche oben angegebenen Stützungsarten einer

Digitized by Google

Scheibe = 3; sie ist ebenso groß wie die Anzahl der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, welche für ein an einem starren Körper wirkendes ebenes Kräftesystem in der Weise aufgestellt werden können, daß die Kraftebene auf ein beliebiges Achsenkreuz (x, y)

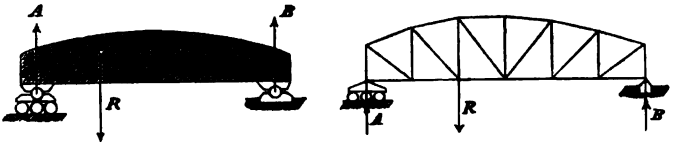


Fig. 101.

bezogen und jede Kraft nach den Richtungen der beiden Achsen zerlegt wird, worauf dann jede der folgenden drei Summen gleich Null gesetzt wird:

a) die Summe aller nach der Richtung der x-Achse wirkenden Seitenkräfte,
b) die Summe aller nach der Richtung der y-Achse wirkenden Seitenkräfte,
c) die Summe der auf irgend einen Drehpunkt bezogenen Momente sämtlicher Kräfte.

Treten an den Auflagern eines aus *einer* Scheibe bestehenden Trägers mehr als drei Unbekannte auf, so lassen sich die Stützenwiderstände nicht mehr mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen allein bestimmen; es entsteht ein äußerlich statisch unbestimmter Träger. Ein solcher ist z. B. der in Fig. 102 dargestellte *durchlaufende (kontinuierliche)*

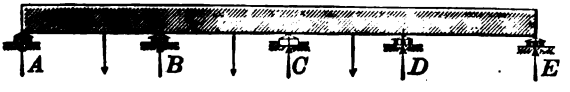


Fig. 102.

Balken, welcher *ein* festes und mehrere (mindestens 2) bewegliche Auflagergelenke besitzt; am ersteren treten zwei Unbekannte auf (nämlich Richtung und Größe des Stützenwiderstandes) und an jedem der letzteren eine Unbekannte (die Größe des Stützenwiderstandes). Im ganzen sind bei n Auflagern $(n + 1)$ Unbekannte zu bestimmen, und es fehlen, da diesen nur 3 Gleichgewichtsbedingungen gegenüberstehen, $n - 2$ Bedingungen, welche sich, wie wir später zeigen werden, aus der Betrachtung der Formänderung des Balkens ergeben.

Digitized by Google

Der Träger ist also hinsichtlich der äußeren Kräfte $(n-2)$-fach statisch unbestimmt.

61. Gelenkträger. Ein aus *mehreren* gelenkartig miteinander verbundenen Scheiben bestehender Träger kann auch bei beliebig vielen Stützen äußerlich statisch bestimmt sein. So kann z. B. der vorhin behandelte durchgehende Balken durch die Anbringung von $(n-2)$ Mittelgelenken, von denen aber ein zwischen zwei Auflagern liegender Trägerabschnitt höchstens 2 enthalten darf, statisch bestimmt gemacht werden. Die an den Auflagern auftretenden $n+1$ Unbe-

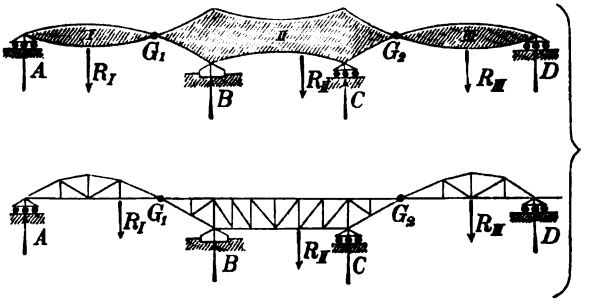


Fig. 103.

kannten können jetzt mittels der 3 allgemeinen und der $n-2$ infolge der Gelenke hinzutretenden besonderen Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden.

So ist z. B. der in Fig. 103 dargestellte Träger nur dann im Gleichgewicht, wenn die Mittelkraft aus dem Stützenwiderstande A und der Belastung R_I der Scheibe I durch das Gelenk G_1 geht, weil sich sonst diese Scheibe um G_1 drehen würde. Ebenso muß auch die Mittelkraft aus R_{III} und D durch das Gelenk G_2 gehen. Der Träger ist also äußerlich statisch bestimmt.

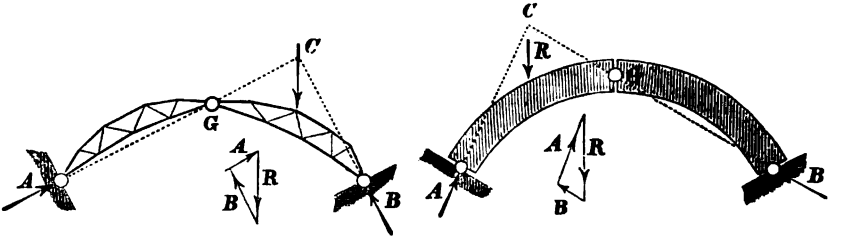


Fig. 104.

Ein zweites Beispiel für einen statisch bestimmten Gelenkträger ist der in Fig. 104 dargestellte. Er besteht aus zwei Scheiben,

Digitized by Google

welche bei A und B feste Auflagergelenke haben und durch ein Mittelgelenk G miteinander verbunden sind; man nennt ihn den *Bogen mit drei Gelenken*. Eine auf die linke Scheibe wirkende Last R ruft bei unbelasteter rechter Scheibe (welche jetzt gewichtslos zu denken ist) am rechten Auflager einen Stützenwiderstand B hervor, der durch das Scheitelgelenk gehen muß, weil sich im Gegenfalle die unbelastete rechte Scheibe um G drehen würde. Der linksseitige Stützenwiderstand geht durch den Schnittpunkt C der Kräfte R und B, ist also ebenfalls der Lage nach bekannt, weshalb sich A und B mittels eines Kräftedreiecks bestimmen lassen.

In gleicher Weise werden die von einer Belastung der rechten Scheibe herrührenden Kräfte A und B ermittelt.

§ 14.

Allgemeines über Einflußlinien.

62. Voraussetzungen und Erklärungen. Zu den wichtigsten der in den folgenden Abschnitten zu lösenden Aufgaben gehört die Untersuchung des Einflusses beweglicher, paralleler Lasten auf irgend eine derjenigen Unbekannten Z, um deren Ermittelung es sich bei der Berechnung eines Trägers handelt, und deren Art wir vorläufig unbestimmt lassen. Es sei also zunächst dahingestellt, ob Z einen Stützenwiderstand (wie beispielsweise in Fig. 105), oder ein Biegungsmoment, oder eine Querkraft u. s. w. bedeutet, hingegen werde vorausgesetzt:

1) daß der durch irgend eine Last P hervorgerufene Wert Z dieser Last proportional ist, mithin die Form $Z = P\eta$ annimmt, wo η einen von P unabhängigen Koeffizienten bedeutet,
2) daß der durch irgend ein Lastensystem erzeugte Wert Z gleich der Summe der von den einzelnen Lasten herrührenden Werte Z ist.

Entsprechen dann den einzeln aufgebrachten Lasten $P_1, P_2, P_3 \ldots$ in irgend welchen Lagen die Werte $Z = P_1\eta_1$; $Z = P_2\eta_2$; $Z = P_3\eta_3 \ldots$, so erzeugen die gleichzeitig in jenen Lagen wirkenden Lasten zusammen:

$$(1) \quad Z = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3 + \ldots .$$

Um Z zu bestimmen, empfiehlt es sich, den Einfluß η einer über den Träger wandernden Last $P = 1$ für alle möglichen Lagen dieser Last zu ermitteln und in der Richtungslinie der Last, von einer Geraden AB aus, als Ordinate aufzutragen (Fig. 105).

Die Endpunkte dieser Ordinaten bilden dann die *Einflußlinie für Z*; die von dieser Linie und jener Geraden begrenzte Fläche heißt die *Einflußfläche für Z*.

Digitized by Google

Ist die Einflußlinie gegeben, so ist man im stande, den durch irgend ein Lastensystem hervorgerufenen Wert Z zu finden. Man hat nur nötig, die den einzelnen Lasten P_1, P_2, P_3 .... entsprechenden Ordinaten η_1, η_2, η_3 .... der Einflußlinie zu messen, und hierauf die Gleichung (1) anzuwenden.

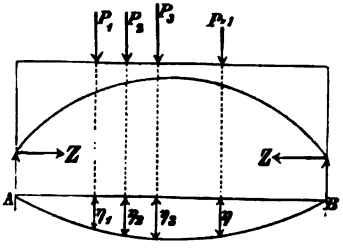


Fig. 105.

In der Folge wollen wir uns, der kürzeren Ausdrucksweise wegen, die Gerade AB wagerecht und die Lasten senkrecht denken.

63. Mittelbare Belastung. Meistens handelt es sich um Lasten, welche durch einfache Zwischenträger auf die Knotenpunkte des in Frage stehenden Trägers verteilt werden. Liegt dann zwischen zwei Knotenpunkten $(m-1)$ und m eine Last P im Abstande x von m (Fig. 106), so erhält man für die Knotenlasten P_{m-1} und P_m die Ausdrücke:

$$(2) \quad P_{m-1} = P\frac{x}{\lambda} \text{ und } P_m = P\frac{\lambda - x}{\lambda},$$

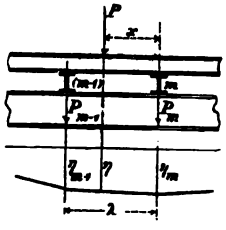


Fig. 106.

wobei λ die Feldweite bedeutet. Besitzt nun die für irgend einen Wert Z gezeichnete Einflußlinie unter $(m-1)$ und m die Ordinaten η_{m-1} und η_m und unter der Last P die Ordinate η, so muß offenbar sein:

$$P\eta = P_{m-1}\,\eta_{m-1} + P_m\,\eta_m$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf Gleich. (2):

$$(3) \quad \eta = \eta_{m-1}\frac{x}{\lambda} + \eta_m\frac{\lambda - x}{\lambda}.$$

Da dieser Ausdruck in Bezug auf die Veränderliche x vom ersten Grade ist, *so ist die Einflußlinie zwischen je zwei Knotenpunkten eine gerade Linie.*

64. Einfluß einer gleichmäßigen Belastung. Wird das Trägerstück $(x_2 - x_1)$ gleichmäßig mit p für die Längeneinheit belastet (Fig. 107) und bezeichnet η_x die an der Stelle x gemessene Ordinate der für irgend einen Wert Z gezeichneten Einflußlinie, so ist der Einfluß des Lastteilchens $p\,dx$ gleich $p\,dx \cdot \eta_x$ und derjenige der gesamten gleichmäßigen Belastung:

$$(4) \quad Z = p\int_{x_1}^{x_2} \eta_x\,dx = p\mathfrak{F}.$$

Digitized by Google

unter $\mathfrak{F}$ den Inhalt des zur Strecke $(x_2 - x_1)$ gehörigen, in der Fig. 107 schraffierten Teiles der Einflußfläche verstanden.

Im allgemeinen werden die Ordinaten η verschiedene Vorzeichen haben; man nennt dann die Punkte, in denen die Einflußlinie die Achse AB schneidet, *Belastungsscheiden* oder *Nullpunkte;* sie zerlegen

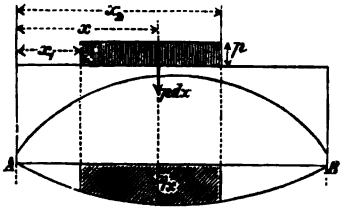


Fig. 107.

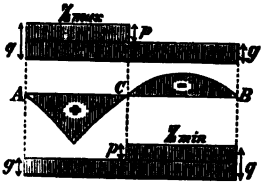


Fig. 108.

die AB in *positive* und *negative Beitragstrecken;* den Punkten der ersteren entsprechen positive Ordinaten η, denjenigen der letzteren negative η. Vergl. Fig. 108, in welcher AC eine positive und CB eine negative Beitragstrecke ist.

Besteht nun die gleichmäßige Belastung aus einer *ständigen* Last (g für die Längeneinheit) und einer *veränderlichen* Last (p für die Längeneinheit), so erhält man den größten positiven Wert Z (d. i. Z_{max}) oder den größten negativen Wert Z (d. i. Z_{min}), je nachdem man die veränderliche Belastung nur innerhalb der positiven Beitragstrecken oder nur innerhalb der negativen Beitragstrecken aufbringt, Fig. 108. Im ersten Falle ergibt sich, wenn

$\mathfrak{F}_+$ den Inhalt des positiven Teils der Einflußfläche,*)

$\mathfrak{F}_-$ „ „ „ negativen „ „ „

bedeutet, und wenn $p + g = q$ gesetzt wird,

$$(5) \quad \ldots \quad Z_{max} = q\mathfrak{F}_+ - g\mathfrak{F}_-$$

und im zweiten Falle folgt:

$$(6) \quad Z_{min} = g\mathfrak{F}_+ - q\mathfrak{F}_-.$$

Man nennt Z_{max} und Z_{min} die *Grenzwerte* von Z.**)

Bei mittelbarer Belastung und im Falle einer konstanten Feldweite λ, Fig. 109, ist häufig ein Näherungsverfahren zu empfehlen, welches darin besteht, daß bei der Berechnung von Z_{max} jeder Knotenpunkt, welchem ein positives η entspricht, mit $q\lambda$ belastet wird und jeder Knotenpunkt einer negativen Beitragstrecke mit $g\lambda$, während bei

*) Die an $\mathfrak{F}$ gesetzten Zeichen + und — sind keine *Vorzeichen,* sondern nur *Zeiger*; die $\mathfrak{F}$ sind absolute Werte.

**) Wird Z_{max} negativ, so stellt es den kleinsten negativen Wert von Z vor; ein positives Z_{min} bedeutet den kleinsten positiven Wert von Z.

Digitized by Google

der Ermittelung von Z_{min} die Lasten $q\lambda$ ersetzt werden durch Lasten $g\lambda$ und umgekehrt. Für den in Fig. 109 dargestellten Fall ergibt sich z. B.:

$$Z_{max} = q\lambda(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) - g\lambda(\eta_4 + \eta_5 + \eta_6 + \eta_7)$$
$$Z_{min} = g\lambda(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) - q\lambda(\eta_4 + \eta_5 + \eta_6 + \eta_7),$$

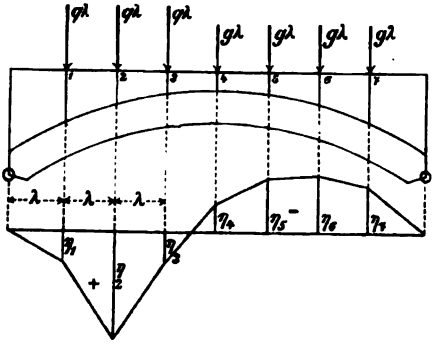


Fig. 109.

wobei η_1, η_2, η_3 . . . . die den Knotenpunkten 1, 2, 3 . . . . entsprechenden Ordinaten der Einflußlinie bedeuten. In der Folge bezeichnen wir mit

Σ_+ die Summe aller positiven, unter den Knotenpunkten gemessenen η, mit

Σ_- desgl. die Summe aller negativen η,

und erhalten die Formeln:

$$(7) \quad \begin{cases} Z_{max} = q\lambda\Sigma_+ - g\lambda\Sigma_- \\ Z_{min} = g\lambda\Sigma_+ - q\lambda\Sigma_-, \end{cases}$$

welche für Z_{max} und Z_{min} größere Werte liefern als die in Wirklichkeit entstehenden. Denn belastet man z. B. in Fig. 109 die positive Beitragstrecke mit q für die Längeneinheit und die negative mit g, so ergibt sich die Belastung (P_3) des Knotenpunktes 3 kleiner als $q\lambda$ und diejenige (P_4) vom Knotenpunkt 4 größer als $g\lambda$. Eine Verkleinerung von P_3 und eine Vergrößerung von P_4 haben aber eine Verkleinerung von Z zur Folge, so daß der aus Gleich. (7) gefundene Wert Z_{max} sich größer ergeben muß als der genaue Wert aus Gleich. (5), und auf dieselbe Weise überzeugt man sich, daß der in Gleich. (7) für ($-Z_{min}$) angegebene Klammerausdruck größer ist als der entsprechende Wert in Gleich. (6).

Der nur von der ständigen Last abhängige Teil von Z ist:

$$(8) \quad Z_g = g(\mathfrak{F}_+ - \mathfrak{F}_-)$$

und, bei gleich langen Feldern:

$$(9) \quad Z_g = g\lambda(\Sigma_+ - \Sigma_-).$$

Digitized by Google

Die aus (8) und (9) berechneten Werte stimmen genau miteinander überein.

65. Einfluß verschiebbarer Einzellasten. Werden die Werte Z_{max} und Z_{min} für den Fall gesucht, daß sich über den Träger eine Schar von Einzellasten bewegt, beispielsweise ein Eisenbahnzug, so gelangt man im allgemeinen am schnellsten durch Probieren zum Ziele, indem man die für verschiedene Stellungen des Belastungszuges bestimmten Werte Z miteinander vergleicht. Dabei wird man tunlichst nur die positiven oder nur die negativen Beitragstrecken belasten, je nachdem es sich um die Ermittelung von Z_{max} oder Z_{min} handelt. Den Belastungszug zeichne man auf einen Papierstreifen, um ihn bequem gegen die Einflußlinie verschieben zu können.

Ist die Einflußlinie ein Polygon mit nicht zu großer Seitenzahl, so findet man die gefährlichste Stellung des Belastungszuges auch ziemlich schnell mit Hilfe der folgenden Untersuchung.

Es seien, Fig. 110, α_1, α_2, α_3 .... die Neigungswinkel der den Strecken AC, CD, DE .... entsprechenden Seiten des Einflußpolygons und R_1, R_2, R_3 .... die Mittelkräfte der auf jenen Strecken liegenden Lasten. Wird der Lastenzug um ξ nach rechts verschoben, so zwar, daß die Lasten, welche vor der Verschiebung einer bestimmten Strecke

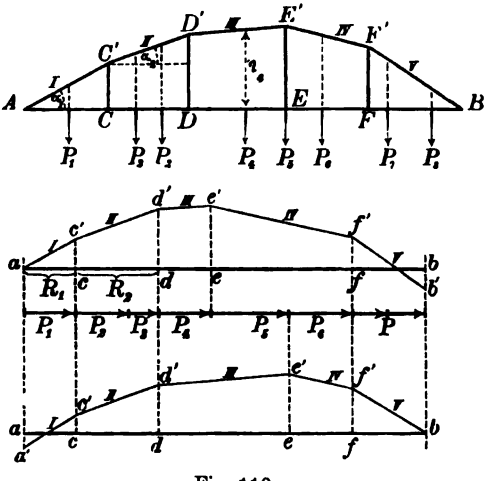


Fig. 110.

angehören, auch nach der Verschiebung innerhalb dieser Strecke angreifen, so wächst die Ordinate η

für jede Last der Strecke AC um $\xi \operatorname{tg} \alpha_1$

„ „ „ „ „ CD „ $\xi \operatorname{tg} \alpha_2$, u. s. w.

und es nimmt mithin der Wert Z zu um

$$(10) \quad \Delta Z = (R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 + \ldots .)\, \xi.$$

Digitized by Google

Will man den vorstehenden Klammerausdruck durch Zeichnung finden, so reihe man die Kräfte R_1, R_2, R_3, ... auf einer Wagerechten ab aneinander, mache also $\overline{ac} = R_1$, $\overline{cd} = R_2$, $\overline{de} = R_3$, ... und trage vom Punkte a aus ein Polygon auf, dessen Seiten *I*, *II*, *III* .... den gleichbezeichneten Seiten des Einflußpolygons parallel sind, und dessen Ecken auf den in den Punkten c, d, e .... errichteten Loten cc', dd', ee' .... liegen. Es schneidet dann dieses Polygon, welches wir einen *Parallelenzug* nennen wollen, auf dem Lote in b die Strecke

$$\overline{bb'} = R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 + \ldots .$$

ab. Ist $\overline{bb'}$ *positiv*, d. h. liegt b' *oberhalb* b, so wird infolge der vorgenommenen Verschiebung des Lastenzuges der Wert Z vergrößert, und es beweist dies dann, daß die zuerst angenommene Stellung dieses Zuges nicht die gefährlichste war.

Auf gleiche Weise findet man, daß der Wert Z infolge einer Verschiebung des Zuges nach *links* vergrößert oder verkleinert wird, je nachdem der Endpunkt a' eines durch b gelegten Parallelenzuges oberhalb oder unterhalb a liegt.

In der Fig. 110 wurde eine Last, nämlich P_5, unter einer Ecke des Einflußpolygons angenommen; sie muß dann der Strecke EF oder der Strecke DE zugewiesen werden, je nachdem der Lastenzug nach rechts oder nach links verschoben wird. Bei der ersten Verschiebung ergab sich b' unterhalb b, bei der zweiten a' unterhalb a; mithin ist die gezeichnete Stellung des Lastenzuges die gefährlichste.

Man muß bei der Wahl der Zugstellung natürlich auch darauf achten, daß die schwersten Lasten in der Nähe der größten Ordinaten η liegen; denn es lassen sich im allgemeinen für verschiedene Zugstellungen Parallelenzüge zeichnen, welche der Bedingung: b' *unterhalb* b *und* a' *unterhalb* a genügen. Ferner leuchtet ein, daß bei der gefährlichsten Stellung des Zuges stets eine Last bei einer Ecke der Einflußlinie liegen muß. Denn, ist dies nicht der Fall, so sind die Mittelkräfte R bei einer Verschiebung des Zuges nach rechts dieselben, wie bei der Verschiebung nach links, und es unterscheiden sich dann die Werte ΔZ für zwei entgegengesetzte Bewegungen nur durch das Vorzeichen; der einen Verschiebung muß also ein positives ΔZ entsprechen.

66. Verkehrsbelastung der Eisenbahnbrücken. Die Einflußlinien sind besonders wichtig für die Berechnung der Eisenbahnbrücken. Als regelmäßige Betriebsbelastung ist ein Zug aus zwei Lokomotiven in ungünstigster Stellung, bald vorwärts-, bald rückwärtsfahrend (Fig. 111 bis 114) mit einer unbeschränkten Anzahl einseitig angehängter Güterwagen anzusehen, wobei man nicht nötig hat, sich streng an die genauen Radstände und Achslasten der schwersten auf der Bahn-

Digitized by Google

linie verkehrenden Fahrzeuge zu halten, weil die in Rechnung gestellten Belastungen sich stets auf die stillstehende Lokomotive beziehen, während sie bei der fahrenden Maschine veränderlich sind und einem ziemlich verwickelten Gesetze folgen, dessen Berücksichtigung bei statischen Untersuchungen ausgeschlossen ist. Für die Annahme gut abgerundeter Werte spricht aber auch die Vielheit der vorkommenden Abmessungen und Gewichtsverteilungen von Lokomotiven schwerster Bauart und der Umstand, daß Radstand und Achslast Werte sind, die sich bei Neubeschaffungen ändern.

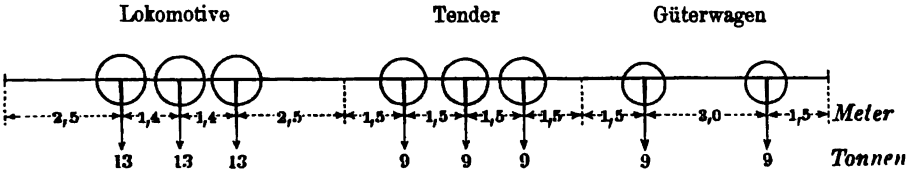


Fig. 111.

Die in Fig. 111 angegebenen Radstände und Achsbelastungen entsprachen bei der Drucklegung der zweiten Auflage dieses Buches (1887) den damals an eiserne Brücken zu stellenden Anforderungen; sie ergaben sich durch Abrundung der zu jener Zeit für die preußischen Staatsbahnen angenommenen Normal-Güterzuglokomotive und wurden allen Zahlenbeispielen dieses Buches zu Grunde gelegt. Dabei wurde, abweichend von dem jetzt herrschenden Gebrauch, mit drei Lokomotiven gerechnet und, für den Fall voller Belastung der Brücke, zu beiden Seiten der Lokomotiven eine Reihe von Güterwagen aufgestellt. Eine Umrechnung dieser Zahlenbeispiele für die neuen Auflagen hielt der Verfasser für überflüssig, weil die Zahlenbeispiele nur dazu dienen sollen, die Anwendung des vorgetragenen Lehrstoffes zu erläutern und das Verständnis der allgemeinen Gesetze zu fördern. Für alle neu hinzugetretenen Zahlenbeispiele sind dagegen Belastungen gewählt worden, die den gesteigerten Ansprüchen der Neuzeit genügen.

Die Achslasten sind so erheblich gestiegen, die Radstände dabei kleiner geworden, daß selbst Brücken, die nur wenige Jahrzehnte im Betrieb sind, heute bereits umgerechnet und verstärkt werden müssen.

Zunächst wurden vom preußischen Minister der öffentlichen Arbeiten durch Erlaß vom 15. September 1895 für die Berechnung der Brücken die in Fig. 112 angegebenen Achsenbelastungen vorgeschrieben. Rundet man diese Werte ab und führt man für die einzelnen Fahrzeuge eine möglichst gleichförmige Gewichtsverteilung

Digitized by Google

ein, so gelangt man zu den in Fig. 113 dargestellten Lasten, welche in ihrer Wirkung auf die Brücke den in jener preußischen Verordnung vorgesehenen Lasten gleichwertig sind.

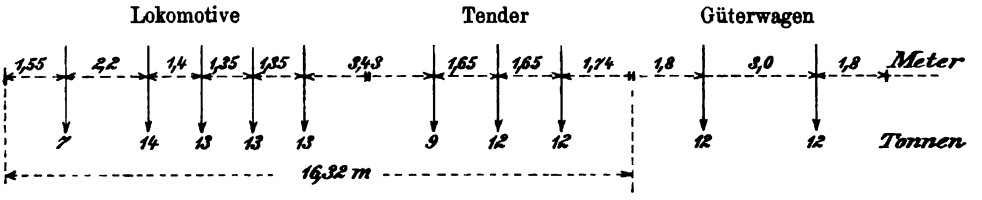


Fig. 112.

Es empfiehlt sich aber, die Belastung der Lokomotivachse auf mindestens 16' zu erhöhen und, falls mit vierachsigen Lokomotiven

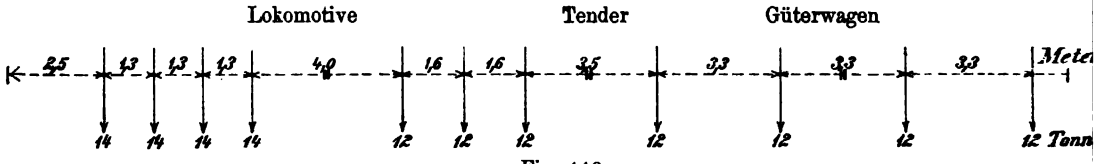


Fig. 113.

gerechnet wird, den Radstand auf 1,2^{m} herabzusetzen, Fig. 114, eine Annahme, die bei den neu hinzutretenden Zahlenbeispielen gemacht wurde.

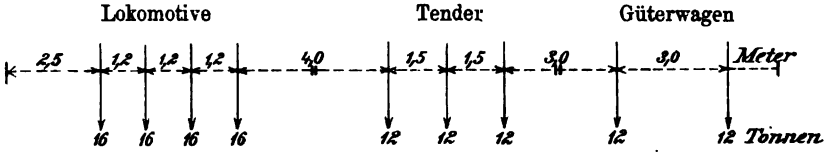


Fig. 114.

Die neuesten, während der Drucklegung der dritten Auflage dieses Buches veröffentlichten Vorschriften sind im Anhange zusammengestellt worden.

Digitized by Google

V. Abschnitt.

Querkräfte und Angriffsmomente für den einfachen Balken.

§ 15.

Ständige, unmittelbar wirkende Belastung.

a. Einzellasten.

67. Stützenwiderstände. Auf einen an den Enden gestützten wagerechten Balken AB, Fig. 115, wirken die senkrechten Lasten P_1, P_2, P_3, P_4. Die Widerstände A und B der Stützen sind senkrecht gerichtet. Um sie zu bestimmen, reihe man die Lasten P auf einer Geraden DE aneinander, ziehe von einem beliebigen Pole O aus die Seilstrahlen I, II, III, IV, V und zeichne nach den bekannten Regeln das Seilpolygon. Es schneidet die Auflagersenkrechten in den Punkten a und b, welche durch die *Schlußlinie* s verbunden werden. Eine vom Pole zu der Linie s gezogene Parallele zerlegt die Lastensumme $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ in die aufwärts gerichteten Auflagerkräfte A und B. Der Beweis ist in No. 11 (Seite 14) nachzusehen.

68. Querkräfte. Der Balken werde durch einen an irgend einer Stelle C (Fig. 115) geführten senkrechten Schnitt in zwei Teile zerlegt.

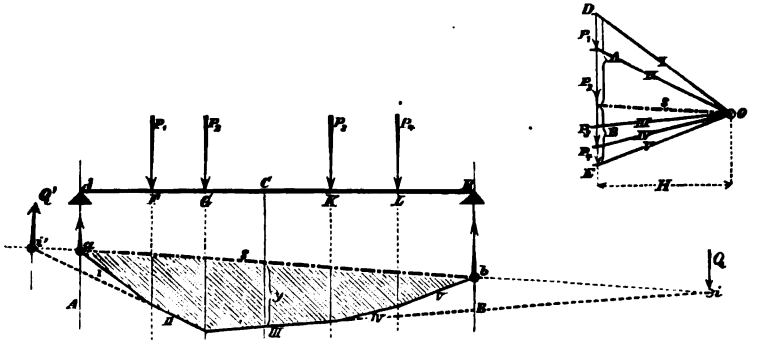


Fig. 115.

Die Mittelkraft aus den am *linken* Teile angreifenden Kräften A, P_1 und P_2 ist, *wenn die Richtung nach oben positiv angenommen wird:*

$$Q = A - P_1 - P_2;$$

Digitized by Google

sie heißt *Querkraft für den Querschnitt C* (auch *Vertikalkraft* oder *Transversalkraft*) und sucht das linke Balkenstück gegen das festgehalten gedachte rechte Stück in senkrechter Richtung zu verschieben, welche Bewegung durch die im Querschnitte C hervorgerufenen Schubspannungen verhindert wird. Vergl. Seite 101.

Im Kräfteplane wird Q als die auf dem Kräftezuge zwischen den Seilstrahlen s und III gelegene Strecke gewonnen, und zwar ist Q negativ, d. h. nach unten gerichtet, wenn $P_1 + P_2 > A$, d. h. wenn beim hängenden Seilpolygone (wie in Fig. 115) der Strahl III unterhalb s liegt. Man beachte auch, daß die Strahlen s und III den Seilpolygonseiten entsprechen, welche der bei C geführte Schnitt trifft, und daß Strahl III im Kräfteplane unterhalb s liegt, sobald sich die entsprechenden Seilpolygonseiten in einem rechts von C gelegenen Punkte i schneiden. Durch diesen Punkt i geht die Kraft Q; sie ist gleich groß für alle Schnitte zwischen P_2 und P_3.

Für die Schnitte zwischen P_1 und P_2 ergibt sich die Querkraft: $Q' = A - P_1$; sie ist positiv, weil sich die Seilpolygonseiten s und II links vom Querschnitte schneiden.

Bezeichnet man die Strecke, welche Seilpolygon und Schlußlinie auf der Senkrechten durch den fraglichen Querschnitt abschneiden, mit y, so darf man den Satz aussprechen:

Die Querkräfte sind positiv, so lange die Strecken y wachsen, dagegen negativ bei abnehmenden y.

Man nennt y die auf die Schlußlinie bezogene Ordinate des Seilpolygons.

Will man Q als die Summe der auf das rechte Balkenstück wirkenden Kräfte auffassen, so hat man folgendes zu beachten.

Da vorhin die Querkraft Q für den Querschnitt C durch die Gleichung

$$Q = A - P_1 - P_2$$

erklärt wurde und sich aus der Bedingung

$$A + B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

die Gleichung $A - P_1 - P_2 = -B + P_3 + P_4$

ergibt, so muß man jetzt setzen:

$$Q = -B + P_3 + P_4,$$

d. h. *man muß am rechten Balkenstücke die Richtung nach unten als die positive einführen.*

69. Momente. Das Moment der am Teile AC angreifenden Kräfte A, P_1, P_2 in Bezug auf den Schwerpunkt des Querschnittes C nennt man das *Angriffsmoment (auch Biegungsmoment oder kurz das*

Digitized by Google

Moment) für den Querschnitt C; es werde positiv angenommen, sobald es im Sinne des Uhrzeigers dreht und ist, nach No. 15 auf Seite 18, gleich dem Produkte aus der Polweite H und der Ordinate y des Seilpolygons; es ergibt sich für sämtliche Querschnitte positiv, sobald, wie in Fig. 115, alle Lasten nach unten gerichtet sind. Liegt nämlich die Mittelkraft Q aus A, P_1 und P_2 rechts von C, so ist sie nach den früheren Ausführungen abwärts gerichtet, also rechts um C drehend; liegt sie links von C, so ist sie aufwärts gerichtet und dreht dann ebenfalls rechts um C.

Man sagt auch: das Moment M ist positiv, sobald die elastische Linie, d. i. die Linie, welche die Achse des belasteten Balkens bildet, nach oben hohl ist (⌣). Bei einem an den Enden unterstützten, nur durch abwärts gerichtete Lasten beanspruchten Balken ist dies an allen Stellen der Fall, es ist also hier durchweg

$$M = + Hy.$$

Betrachtet man M als das auf C bezogene Moment der am rechten Balkenstücke angreifenden Kräfte, so muß man die Drehung im Sinne des Uhrzeigers negativ annehmen; denn die Mittelkraft der am Teile BC wirksamen Kräfte ist der Mittelkraft aus den Kräften links von C entgegengesetzt gleich.

Die Bestimmung der Momente M mit Hilfe des Seilpolygons hat zuerst *Culmann* gezeigt. Daher nennt man auch die vom Seilpolygone und von der Schlußlinie begrenzte (in Fig. 115 schraffierte) Fläche die *Culmannsche Momentenfläche.*

Zahlenbeispiel. Der Balken habe die Länge $\overline{AB} = 5^m$ (vergl. Fig. 115) und werde durch die Angriffspunkte der Lasten in Teile von den Längen: $\overline{AF} = 0{,}8^m$; $\overline{FG} = 1{,}2^m$; $\overline{GK} = 0{,}9^m$; $\overline{KL} = 1{,}4^m$; $\overline{LB} = 0{,}7^m$ zerlegt. Die Lasten seien: $P_1 = 2000^k$; $P_2 = 2500^k$; $P_3 = 800^k$; $P_4 = 1200^k$. Wählt man dann die (willkürliche) Polweite: $H = 2000^k$, so erhält man $y_{max} = 2{,}48^m$ (unter Last P_2), und es wird das größte Biegungsmoment: $M = Hy_{max} = 2000 \cdot 2{,}48 = 4960^{km}$. Besitzt der Balken einen konstanten Querschnitt, so sind seine größten Beanspruchungen nach Seite 60 (mit Vernachlässigung des Einflusses der Querkräfte):

$$\sigma_1 = \frac{Me_1}{J}; \quad \sigma_2 = -\frac{Me_2}{J}.$$

Die Stützenwiderstände sind $A = 3680^k$; $B = 2820^k$.
Dem Leser wird empfohlen, die Zeichnung auszuführen.

b. Stetige Belastung.

70. Wenn die Lasten in unendlich kleinen Abständen voneinander wirken, so geht das Seilpolygon in eine krumme Linie über. Es ist dies der Fall bei einer stetigen Belastung (Fig. 116); denn eine solche

Digitized by Google

besteht aus unendlich vielen unendlich kleinen Einzellasten, die einander unendlich nahe sind. Um nun die Seillinie zu ermitteln, ersetze man die stetige Belastung durch eine Reihe von in endlichen Entfernungen wirkenden Einzellasten, zeichne zu diesen ein Seilpolygon und beschreibe in dieses eine Kurve.

So wurde in Figur 116 die gleichförmig verteilte Last P durch die drei Einzellasten $\frac{1}{3}P$ ersetzt, indem die *Belastungsfläche* durch

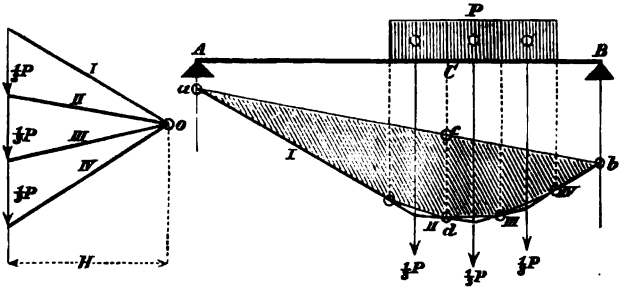


Fig. 116.

senkrechte Schnitte in drei Streifen zerlegt wurde. Für einen an der Grenze zweier Streifen befindlichen Querschnitt liefert das Seilpolygon die genaue Momentenordinate $\overline{cd} = y$; denn, wenn man beispielsweise das Moment der links von C wirkenden Kräfte in Bezug auf C bildet, so darf man die stetige Belastung $\frac{1}{3}P$ im Schwerpunkte vereinigen. Es folgt hieraus:

> Die senkrechten Schnitte, welche die Belastungsfläche in Streifen zerlegen, treffen das Seilpolygon in den Berührungspunkten der in das Seilpolygon einzubeschreibenden Kurve.

Vergl. auch Seite 32.

§ 16.

Ständige mittelbare Belastung.

71. Beliebige Belastung. Werden die Lasten P_1, P_2, P_3 . . . . durch einfache Zwischenträger auf den Balken AB übertragen, Fig. 117, so entstehen Auflagerkräfte A und B, welche, falls die äußersten Querträger über den Stützen liegen, ebensogroß sind, als wenn die Lasten

Digitized by Google

unmittelbar auf den Balken wirken. Denn es ist z. B. $A = \frac{M_B}{l}$, wobei M_B die Summe der statischen Momente sämtlicher Lasten P in Bezug auf den Drehpunkt B bedeutet, und man erhält für M_B denselben Wert, wenn man einmal die Lasten P und ein zweites Mal die in den Knotenpunkten angreifenden Seitenkräfte derselben einführt, weil das Moment einer Mittelkraft stets gleich der Summe der Momente ihrer Seitenkräfte ist.

Aus dem gleichen Grunde ist das Moment der links von irgend einem Knotenpunkte angreifenden Kräfte, bezogen auf diesen Knotenpunkt, unabhängig von der Art der Verteilung der Lasten durch die Zwischenträger, und es folgt daher der Satz:

Für alle durch Knotenpunkte gelegten Querschnitte stimmen die Momente für unmittelbare und für mittelbare Belastung überein.

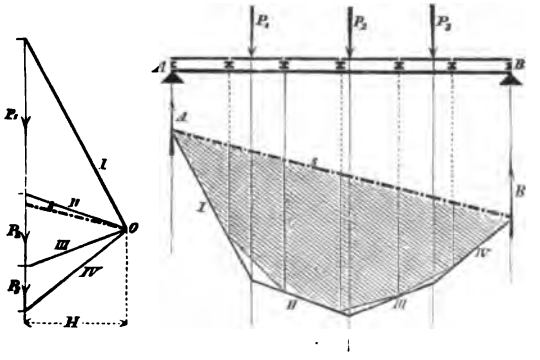


Fig. 117.

Hiernach ist man im stande, die Momentflächen für eine mittelbare Belastung zu finden, ohne erst die in den Knotenpunkten angreifenden Lasten zu bestimmen. Man zeichne das Seilpolygon für die unmittelbare Belastung und beschreibe in dieses ein Polygon, dessen Ecken senkrecht unter den Knotenpunkten liegen, und welches dann mit der Schlußlinie die gesuchte Momentenfläche einschließt.

72. Querkräfte für einen gänzlich und gleichmäßig belasteten Balken. Wir lösen an dieser Stelle noch die für die Folge wichtige Aufgabe, die Querkräfte für die Querschnitte eines nach Fig. 118 gleichmäßig mit g für die Längeneinheit belasteten Balkens zu bestimmen.

Digitized by Google

Die Angriffspunkte der Querträger seien mit $0, 1, 2 \ldots (m-1)$, $m \ldots$ bezeichnet, x_m und x'_m seien die Abstände des Punktes m von den Auflagern A und B, λ_m die Länge des $m$ten Feldes, x''_m der Abstand der Mitte des Feldes von der Mitte des Balkens. Um die Querkraft für einen durch das $m$te Feld geführten Schnitt zu finden, beachte man, daß die Belastung $g\lambda_m$ dieses Feldes zur Hälfte auf den Punkt $(m-1)$ und zur Hälfte auf den Punkt m

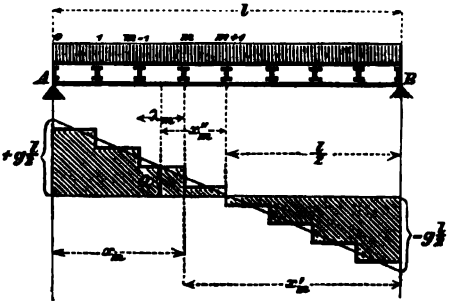


Fig. 118.

übertragen wird, daß also am linken Balkenstücke die Kraft $A = \frac{1}{2} gl$ nach aufwärts und die Lasten gx_{m-1}, sowie $\frac{1}{2} g\lambda_m$ nach abwärts wirken. Daher ist

$$(1) \quad Q = \frac{gl}{2} - gx_{m-1} - \frac{g\lambda_m}{2} = gx''_m,$$

und zwar gilt dieser Wert für jeden durch das $m$te Feld geführten Schnitt. Zieht man eine Gerade, deren Ordinaten für $x = 0$ und $x = l$ beziehungsweise $\left(+\frac{1}{2} gl\right)$ und $\left(-\frac{1}{2} gl\right)$ sind, so erhält man Q als die unter der Feldmitte gemessene Ordinate dieser Geraden. Für die rechte Balkenhälfte wird Q negativ. Innerhalb eines Feldes ist Q konstant.

§ 17.

Einflußlinien. Grenzwerte von Q und M bei gleichförmiger ständiger und beweglicher Belastung.

a. Querkräfte für unmittelbare Belastung.

73. Einflußlinie. Eine im Abstande a von A und b von B am Balken AB angreifende Einzellast P ruft Stützenwiderstände A und B hervor, die durch die Momentengleichungen

$$Al - Pb = 0$$

und

$$Bl - Pa = 0$$

bestimmt sind. Man erhält

$$(1) \quad \begin{cases} A = \frac{Pb}{l} \\ B = \frac{Pa}{l} \end{cases}$$

Digitized by Google

das sind Werte die proportional P sind. Die Gleichungen der Einflußlinien für A und B lauten also

$$(2) \quad \eta = 1\frac{b}{l} \text{ und } \eta = 1\frac{a}{l}.$$

Die „A-Linie“ ist also eine gerade Linie, welche bei B die Ordinate 0 und bei A die Ordinate 1 hat. Die „A-Fläche“ ist ein rechtwinkliges Dreieck von der Höhe 1.

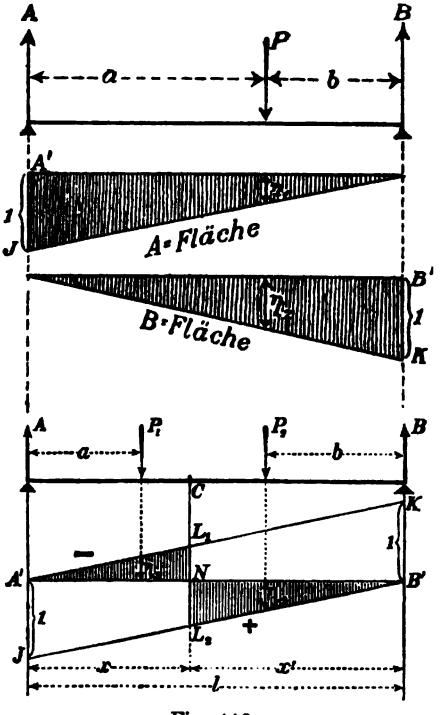


Fig. 119.

Die B-Linie ist das Spiegelbild der A-Linie.

Es sei nun C ein beliebiger Querschnitt des Balkens, und es greife nur eine zwischen A und C gelegene Last P_1 an. Dann findet man durch Betrachtung des Balkenstückes CB für die Querkraft den Wert

$$Q = -B$$

und erkennt, daß die Einflußfläche für Q rechts von C mit der B-Fläche zusammenfällt; nur ist ihr Vorzeichen das entgegengesetzte.

Ganz ebenso findet man, daß links von C die Einflußlinie für Q mit der A-Fläche zusammenfällt. Denn wenn nur P_2 am Balken angreift, erhält man durch Betrachtung des Trägerstückes AC für Q den Wert $Q = +A$.

Digitized by Google

Die in Fig. 119c schraffierte Fläche ist mithin die Einflußfläche für Q. Die Lasten P_1 und P_2 erzeugen zusammen

$$(3) \quad Q = -P_1\eta_1 + P_2\eta_2.$$

Wir wollen nun die Einflußlinie $A'L_1L_2B'$ benutzen, um im Anschluß an die Untersuchungen im § 15 diejenigen Grenzwerte ${}_{max}Q$ und ${}_{min}Q$ zu bestimmen, welche infolge einer gleichmäßigen Belastung entstehen. Der Einfluß beweglicher Einzellasten soll später auf anderem Wege (d. h. ohne die Benutzung der Einflußlinie) ermittelt werden.

74. Bestimmung von ${}_{max}Q$ und ${}_{min}Q$ bei gleichförmiger Belastung. Vergl. Fig. 119 und 120. Wir setzen voraus:

eine ständige Belastung $= g$ für die Längeneinheit von AB,
„ bewegliche „ $= p$ „ „ „ „ „ AB,

bezeichnen mit

l die Stützweite,
x den Abstand des Querschnitts C vom Auflager A,
x' „ „ „ „ C „ „ B,
x'' „ „ „ „ C von der Balkenmitte,

und erhalten dann $\left(\text{wegen } \overline{NL_2} = \overline{A'J}\,\frac{x'}{l} = 1\,\frac{x'}{l}\right)$:

1) den Inhalt des positiven Teiles der Einflußfläche:

$$\mathfrak{F}_2 = \Delta B'NL_2 = \overline{NL_2}\,\frac{x'}{2} = \frac{x'^2}{2l},$$

2) den Inhalt des negativen Teiles der Einflußfläche:

$$\mathfrak{F}_1 = \Delta A'NL_1 = \frac{x^2}{2l}.$$

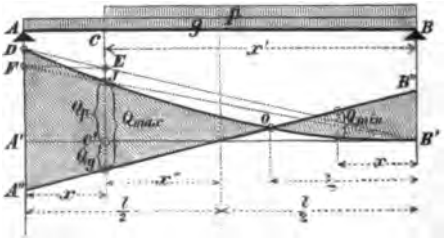


Fig. 120.

Wir untersuchen getrennt den Einfluß Q_p der beweglichen Last und den Einfluß Q_g der ständigen Last.

Der Wert ${}_{max}Q_p$ entsteht, wenn nur die positive Beitragsstrecke x' mit p belastet wird, Fig. 119. Man erhält (nach Gleich. 4 auf Seite 116):

$$(4) \quad {}_{max}Q_p = p\mathfrak{F}_2 = \frac{px'^2}{2l}$$

Digitized by Google

und kann diesen Wert durch die Ordinate $C'J$ einer Parabel $B'OJD$ darstellen, welche für $x' = 0$ und $x' = l$ beziehungsweise die Ordinaten 0 und $\frac{1}{2} pl$ besitzt, und deren Scheitel bei B' liegt. Man mache auf der linken Auflager-Senkrechten: $A'D = \frac{1}{2} pl$, ziehe $B'D$, ferner durch den Schnittpunkt E dieser Geraden mit der Senkrechten durch C die Wagerechte EF und bringe die Gerade $B'F$ mit der Senkrechten durch C in J zum Schnitt. Es ist dann J ein Punkt der Parabel, weil

$$\overline{C'E} = \overline{A'D}\frac{x'}{l}; \quad \overline{C'J} = \overline{A'F}\frac{x'}{l} = \overline{A'D}\frac{x'^2}{l^2} = \frac{px'^2}{2l}.$$

Der Einfluß der ständigen Last ist nach Gleich. (8) auf Seite 118:

$$(5) \quad Q_g = g(\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1) = g\frac{(x'-x)(x'+x)}{2l} = gx''.$$

Dieser Wert wird durch die Ordinate einer Geraden $A''B''$ dargestellt, welche für $x'' = \pm\frac{l}{2}$ die Ordinaten $\pm\frac{gl}{2}$ besitzt. Die positiven Ordinaten dieser Geraden wurden in der Fig. 120 unterhalb der $A'B'$ aufgetragen, damit die Werte Q_p und Q_g bequem addiert werden konnten. Es sind bei dieser Anordnung der Zeichnung die senkrechten Abstände der Geraden $A''B''$ von der Parabel DJB' gleich den Kräften

$$_{max}Q = {}_{max}Q_p + Q_g.$$

Für den Balkenquerschnitt senkrecht über O ist ${}_{max}Q = 0$; für die Querschnitte rechts hiervon ist ${}_{max}Q$ negativ.

Betrachtet man jetzt das Spiegelbild der Fig. 120, so wird der Balken nur links vom Querschnitte C eine bewegliche Belastung aufweisen. Da nun diesem Belastungszustande die Querkraft ${}_{min}Q$ entspricht, so folgt, daß der Wert ${}_{min}Q$ für den Querschnitt C gleich ist dem im Abstande x vom Auflager B gemessenen senkrechten Abstande der Parabel $B'JD$ von der Geraden $A''B''$. Man muß jedoch das Vorzeichen ändern, da vorhin Q als Mittelkraft des nur mit g belasteten *linken* Balkenstückes (AC) dargestellt worden ist und bei der Betrachtung des Spiegelbildes dieses nur mit g belastete Stück rechts von C liegt. Vergl. Seite 124. Es folgt hieraus, daß ${}_{min}Q$ positiv ist für $x < \xi$ und negativ für $x > \xi$.

b. Querkräfte für mittelbare Belastung.

75. Einflußlinie. Es sei C ein beliebiger Querschnitt des Balkenfeldes F_1F_2, Fig. 121. Links von F_1 wirke auf den Balken an irgend einer Stelle eine Last P_1, rechts von F_2 eine Last P_2. Wo auch der

Digitized by Google

Querschnitt C zwischen F_1 und F_2 liegen möge, stets ist die Querkraft

$$Q = A - P_1$$

oder

$$Q = -B + P_2,$$

je nachdem das Trägerstück links oder rechts von C betrachtet wird. Es empfiehlt sich deshalb von der Einflußfläche für die *Querkraft des Feldes* zu sprechen. Die Gestalt dieser Fläche folgt ohne weiteres aus dem in No. 63 bewiesenen allgemeinen Satze.

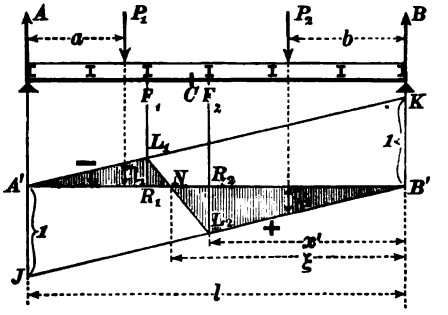


Fig. 121.

Außerhalb des Feldes F_1F_2 stimmt die Einflußlinie für Q mit der in No. 73, unter Voraussetzung einer unmittelbaren Belastung, gefundenen überein, und innerhalb jenes Feldes ist sie nach Seite 116 eine Gerade, welche durch die beiden senkrecht unter F_1 und F_2 gelegenen Punkte L_1 und L_2 bestimmt ist. Mithin ist die in der Fig. 121 schraffierte Fläche die gesuchte Einflußfläche für Q; wir werden dieselbe wieder benutzen, um den Einfluß einer gleichförmigen Belastung festzustellen.

76. Bestimmung von $_{max}Q$ und $_{min}Q$ für gleichförmige Belastung. Der Inhalt $\mathfrak{F}_2$ des positiven Teiles der Einflußfläche ist mit den aus der Fig. 121 ersichtlichen Bezeichnungen

$$\left(\text{und wegen } \overline{R_2L_2} = \overline{A'J}\frac{x'}{l} = 1\frac{x'}{l}\right):$$

$$\mathfrak{F}_2 = \triangle NL_2B' = \overline{R_2L_2}\,\frac{\xi}{2} = \frac{x'\xi}{2l},$$

und man erhält deshalb die durch die bewegliche Belastung allein hervorgerufene größte positive Querkraft:

$$(6) \quad {}_{max}Q = p\mathfrak{F}_2 = \frac{pl}{2}\cdot\frac{x'}{l}\cdot\frac{\xi}{l}\ ^*);$$

sie entsteht, sobald nur die positive Beitragstrecke $B'N$ mit p belastet wird und läßt sich leicht durch Zeichnung finden.

Zu diesem Zwecke bestimmt man, Fig. 122, mit Hilfe von zwei beliebigen Parallelen AK und BJ den Nullpunkt N des fraglichen Feldes und legt durch N und durch F_2 die Senkrechten I und II. Nun trägt man, von einer Wagerechten $A'B'$ aus, auf der Senkrechten $A'A$ die Kraft $p\frac{l}{2} = \overline{A'D}$ auf, bringt die Gerade $B'D$ mit II in E zum Schnitt,

*) Man findet auch leicht die Formel ${}_{max}Q = \frac{px'^2}{2(l-\lambda)}$ wo λ die Feldweite bedeutet.

Digitized by Google

zieht die Wagerechte EF und bestimmt den Schnittpunkt H der Geraden FB' mit der Senkrechten I. Man erhält:

$$\overline{C'H} = \overline{A'F}\frac{\xi}{l} = \overline{E'E}\frac{\xi}{l} = \overline{A'D}\frac{x'}{l}\frac{\xi}{l} = \frac{pl}{2}\frac{x'}{l}\frac{\xi}{l},$$

$$\text{also } \overline{C'H} = {}_{max}Q_p.$$

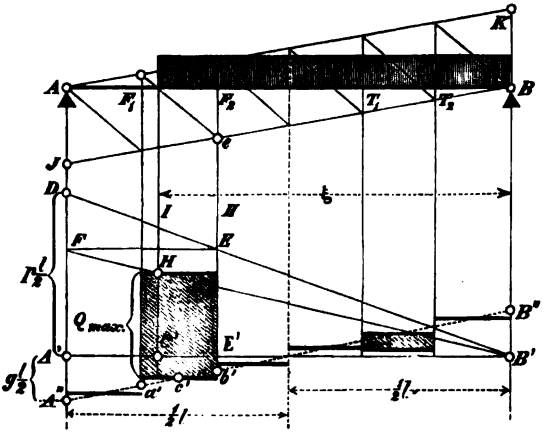


Fig. 122.

Zu dem Werte ${}_{max}Q_p$ ist noch die von der ständigen Last herrührende Querkraft Q_g zu fügen. Dazu macht man (nach No. 71) $\overline{A'A''} = \overline{B'B''} = \frac{1}{2}gl$ und zieht die Gerade $A''B''$, welche die das betrachtete Feld begrenzenden Senkrechten in a' und b' schneidet. Die Ordinate des Halbierungspunktes c' der Strecke $a'b'$ ist dann gleich Q_g, sie ist positiv, sobald sie unterhalb $A'B'$ liegt. Nun findet man:

$${}_{max}Q = {}_{max}Q_p + Q_g.$$

Auf die gleiche Weise werden die ${}_{max}Q$ für sämtliche Felder ermittelt. Innerhalb eines Feldes ist Q konstant. Auf der rechten Hälfte des Balkens ist Q_g negativ; es kann dann (wie im Felde $T_1 T_2$ in Fig. 122) ${}_{max}Q$ negativ werden.

Um die Querkraft ${}_{min}Q$ zu bestimmen, welche in dem betrachteten Felde entsteht, sobald nur die Strecke AN mit p belastet ist, wird das Spiegelbild des Balkens in derselben Weise wie eben untersucht, und schließlich wird das Vorzeichen der so gewonnenen Kraft Q umgekehrt. Vergl. den Schluß von No. 74. Ist der Balken symmetrisch in Bezug auf die Mitte, so genügt es natürlich, für sämtliche Felder die Kräfte ${}_{max}Q$ zu ermitteln, aus denen dann die ${}_{min}Q$ durch Umkehrung der Vorzeichen gefolgert werden können. Zur Erläuterung diene das folgende

Digitized by Google

Zahlenbeispiel. Für den in Fig. 122 gezeichneten Balken wurde $l = 18^m$, $\lambda = 3^m$, $g = 1{,}2^t$ und $p = 4{,}8^t$ für das Meter angenommen. Es ist dann $\overline{A'D} = \frac{pl}{2} = 48{,}2^t$, $\overline{A'A''} = \overline{B'B''} = \frac{gl}{2} = 10{,}8^t$, welche Werte im Maßstabe: $20^t = 10^{mm}$ aufgetragen wurden. Nach Ausführung der oben beschriebenen Konstruktion ergab sich für das 1te Feld:

$$^{max}Q_1 = +45{,}00^t \quad | \quad ^{max}Q_2 = +14{,}76^t \quad | \quad ^{max}Q_3 = -3{,}96^t$$
$$^{max}Q_2 = +28{,}44^t \quad | \quad ^{max}Q_4 = +3{,}96^t \quad | \quad ^{max}Q_5 = -9{,}00^t,$$

und aus diesen Werten folgt, da der Balken in Bezug auf eine Senkrechte durch seine Mitte symmetrisch ist:

$$^{min}Q_1 = +9{,}00^t \quad | \quad ^{min}Q_2 = -3{,}96^t \quad | \quad ^{min}Q_5 = -28{,}44^t$$
$$^{min}Q_2 = +3{,}96^t \quad | \quad ^{min}Q_4 = -14{,}76^t \quad | \quad ^{min}Q_6 = -45{,}00^t.$$

Es sind also im 1ten und 2ten Felde die Querkräfte nur positiv, im 5ten und 6ten nur negativ, während sich für die beiden Mittelfelder je nach dem Belastungszustande positive oder negative Werte Q ergeben.

c. Momente für unmittelbare Belastung.

77. **Einflußlinie.** Gesucht sei die Einflußlinie für das Moment M an der Stelle C des Balkens AB, Fig. 123. Greift am Balken zunächst nur eine rechts von C gelegene Last P_2 an, so wirkt am Trägerstück AC nur eine einzige äußere Kraft, der Stützenwiderstand A. Es entsteht dann an der Stelle das Moment

$$(7) \quad M = Ax$$

und man erkennt, daß die Einflußlinie für M zwischen B und C aus einer Geraden $B'C'$ besteht, die man erhält, wenn man die Ordinaten der in Fig. 119 dargestellten A-Linie mit x multipliziert, wenn man also bei A statt der Ordinate $A'J = 1$ die Ordinate $A'J = x$ aufträgt. Ganz ebenso verfährt man mit einer links von C angreifenden Last P_2. Sie erzeugt an der Stelle C das Moment

$$M = Bx'.$$

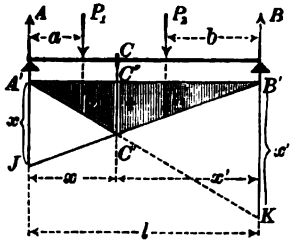


Fig. 123.

Die Einflußlinie besteht also zwischen A und C aus einer Geraden $A'C'$, welche bestimmt ist durch die Strecke $B'K = x'$. Die beiden Geraden $B'J$ und $A'K$ schneiden sich senkrecht unter C. Es genügt also die Auftragung einer der beiden Strecken $A'J$ oder $B'K$ zur Bestimmung der Einflußfläche für M.

Die Lasten P_1 und P_2 erzeugen

$$M = P_1\eta_1 + P_2\eta_2.$$

Digitized by Google

78. Moment $_{max}M$ infolge gleichmäßiger Belastung. Das größte Moment für irgend einen Balkenquerschnitt C entsteht bei gänzlicher Belastung des Balkens durch $p + g = q$ für die Längeneinheit. Der Inhalt der Einflußfläche ist (vergl. Fig. 123): $\mathfrak{F} = \overline{C'C''}\,\frac{l}{2}$ und wegen $\overline{C''C''} = \overline{A'J}\,\frac{x'}{l} = \frac{xx'}{l}$:

$$\mathfrak{F} = \frac{xx'}{2}.$$

Man erhält somit:

$$(8) \quad {}_{max}M = q\mathfrak{F} = \frac{qxx'}{2},$$

und kann hiernach das Moment $_{max}M$ für den an der Stelle x gelegenen Querschnitt durch die Ordinate CJ einer Parabel $AJSB$ (Fig. 124) darstellen, welche für $x = x' = \frac{1}{2}\,l$ die Ordinate $\overline{NS} = \frac{1}{8}\,ql^2$ besitzt.

Zieht man nach Auftragen von NS die Gerade SA, welche das in C auf der AB errichtete Lot in E schneidet, hierauf die Wagerechte EF bis zur linken Auflagersenkrechten und verbindet F mit S durch eine Gerade, so bestimmt diese auf der CE den Parabelpunkt J. Denn es ist:

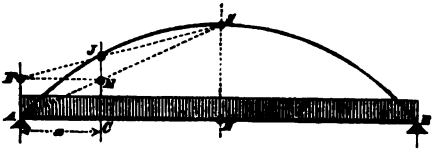


Fig. 124.

$$\overline{CE} : \overline{NS} = x : \frac{1}{2}\,l, \text{ also } \overline{CE} = \frac{qlx}{4}, \text{ ferner}$$

$$\overline{JE} = \overline{FA}\,\frac{\frac{1}{2}\,l - x}{\frac{1}{2}\,l} = \overline{CE}\,\frac{l - 2x}{l}, \text{ also}$$

$$\overline{JC} = \overline{EC} + \overline{JE} = \overline{EC}\left(1 + \frac{l - 2x}{l}\right) = \frac{qxx'}{2}.$$

d. Momente für mittelbare Belastung.

79. Einflußlinie. Fig. 125. Liegt der fragliche Querschnitt C zwischen zwei Querträgern F_1 und F_2, so bestimme man zunächst die Einflußfläche $A'C'B'$ für das Moment M unter der Voraussetzung unmittelbarer Belastung und stumpfe dieses Dreieck durch eine Gerade L_1L_2

Digitized by Google

ab, deren Endpunkte senkrecht unter den Querträgern F_1 und F_2 liegen. So lange nämlich die über den Balken wandernde Einzellast links von F_1 oder rechts von F_2 liegt, stimmen die dem Querschnitte C entsprechenden Momente für mittelbare und für unmittelbare Belastung überein; zwischen F_1 und F_2 aber muß die Einflußlinie eine Gerade sein.

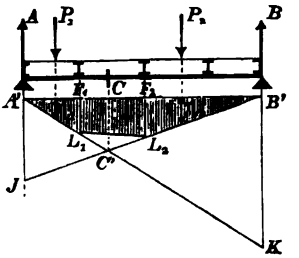


Fig. 125.

80. Momente $_{max}M$ für gleichmäßige Belastung. Die Momentenkurve für mittelbare gleichmäßige Belastung ist nach § 16 ein Polygon, welches in die für die unmittelbare Belastung gefundene Parabel ASB (Fig. 124) so einbeschrieben wird, daß seine Ecken in den Senkrechten durch die Knotenpunkte liegen. Es genügt also, die den Knotenpunkten entsprechenden Parabelpunkte zu bestimmen und diese durch gerade Linien zu verbinden.

§ 18.

Die veränderliche Belastung besteht aus einem verschiebbaren System von Einzellasten.

a. Mittelbare Belastung.

(Fig. 126, 128, 129, 130 auf Tafel I.)

Die Ermittelung der durch ein verschiebbares System von Einzellasten hervorgerufenen Momente und Querkräfte kann mit Hilfe der im § 17 gefundenen Einflußlinie nach dem im § 14 mitgeteilten allgemeinen Verfahren erfolgen; jedoch ist es zweckmäßiger, einen anderen Weg einzuschlagen, der hier an der Hand eines Zahlenbeispiels beschrieben werden soll.

Es handele sich um eine zweigleisige Eisenbahnbrücke mit zwei Hauptbalken. Die Stützweite sei $l = 36^m$ und die Feldweite $\lambda = 3{,}6^m$, Fig. 126. Die veränderliche Belastung bestehe aus einem von drei Lokomotiven geführten Güterzuge (Anordnung Fig. 111). Jeder der beiden Balken trägt die Belastung eines Gleises, hat also die Achsen-

Digitized by Google

belastungen aufzunehmen. Die ständige Belastung sei mit Hilfe der Erfahrungsformel

$$g = 27{,}5\,l + 750 = 27{,}5 \cdot 36 + 750 = 1740^{k} = 1{,}74^{t} \text{ f. d. Meter}$$

Balkenlänge gefunden.*)

81. **Querkräfte.** In No. 75 auf Seite 132 (vergl. auch Fig. 121) wurde nachgewiesen, daß in einem Balkenfelde die größte positive Querkraft Q entsteht, sobald nur Lasten rechts von der im fraglichen Felde gelegenen Belastungsscheide wirken. Fährt nun von B aus ein Güterzug vor, mit drei vorwärtsgehenden Lokomotiven an der Spitze, so erhält man in den meisten Fällen ${}_{max}Q$, wenn die erste Last bei dem das fragliche Feld rechts begrenzenden Querträger liegt. Diese Laststellung wollen wir in der Folge die *Grundstellung* nennen. Handelt es sich nun beispielsweise um das 5te Balkenfeld (Fig. 126), so ist der Eisenbahnzug zunächst von B aus bis zum Querträger 5 vorzuschieben. Links von dem durch dieses Feld an irgend einer Stelle geführten Schnitte ss greift nur der linke Stützenwiderstand A_5 an, und es ergibt sich ${}_{max}Q_{p5} = A_5$, wobei der Zeiger p daran erinnern soll, daß bis jetzt nur der Einfluß der Verkehrslast berücksichtigt worden ist. Aus der Momentengleichung für den Stützpunkt B folgt (mit den aus der Fig. 126 ersichtlichen Bezeichnungen, und da rechts vom Schnitte ss 9 Lasten auf den Balken wirken):

$$A_5 l - \sum_{1}^{9} Pb = 0; \quad A_5 = \frac{1}{l} \sum_{1}^{9} Pb,$$

und dieser Wert A_5 läßt sich auf eine sehr einfache Weise durch Zeichnung bestimmen. Dazu trägt man den Eisenbahnzug in der Richtung von A nach B fahrend und mit der ersten Achse bei B stehend auf und reiht die Lasten P_1, P_2 .... in der in Fig. 126 angegebenen Weise auf der Senkrechten durch den linken Stützpunkt aneinander. Nun wählt man im Abstande l von dem Kräftezuge den Pol O und zeichnet zu den Lasten ein Seilpolygon, dessen Seiten I und II mit den Seilstrahlen I und II zusammenfallen. Es ist dann nach No. 17 auf Seite 20 das Produkt $l \cdot \overline{ab}$ aus der Polweite l und der beim Querträger 5 gemessenen Ordinate $\overline{ab}$ des Seilpolygons gleich dem auf die Achse ab bezogenen Momente der rechts von ab gelegenen Lasten P_1, P_2, ... P_9 des von A nach B vorgerückten

*) Würde jedes Gleis durch zwei, bezüglich der Gleismitte symmetrisch liegende Balken gestützt, so kämen auf jeden Balken nur die Raddrücke der Fahrzeuge und die ständige Last $g = \frac{1}{2} \cdot 1{,}74 = 0{,}87^{t}$.

Digitized by Google

Zuges. Bezeichnet man also die Entfernung dieser Lasten von der ab mit $b'_1, b'_2 \ldots\ldots$, so erhält man $l \cdot \overline{ab} = \sum_1^9 Pb'$ und (wegen $b'_1 = b_1$; $b'_2 = b_2 \ldots\ldots$):

$$\overline{ab} = \frac{1}{l} \sum_1^9 Pb = A_5.$$

Wir werden mit A_m stets denjenigen Widerstand bezeichnen, welcher am linken Auflager durch die von B aus bis zum Querträger m vorgeschobene Verkehrslast hervorgerufen wird, und erhalten dann, falls $_{max}Q_p$ bei der Grundstellung entsteht, ganz allgemein für das m^{te} Feld:

$$_{max}Q_{pm} = A_m.$$

Das Seilpolygon in Fig. 126, dessen bei den Querträgern gemessene Ordinaten gleich den Stützenwiderständen A_m sind, nennen wir das *A-Polygon.*

Liegt die zweite Achse des von B vorrückenden Zuges beim Querträger 5, und bezeichnet man mit e_1 den ersten Radstand, so übt die erste Last P_1 auf den Querträger 4 den Druck $P_1 \frac{e_1}{\lambda}$ aus, und es wird die Querkraft für das 5te Balkenfeld: $Q' = A - P_1 \frac{e_1}{\lambda}$. Dabei wird A durch die bei der Last P_1 gemessene Ordinate $a'b'$ des A-Polygons dargestellt; von derselben ist die Strecke $P' = \frac{P_1 e_1}{\lambda}$, deren Ermittelung ohne weiteres aus der Fig. 126 zu ersehen ist, abzuziehen. Ist $Q' > A_5$, so ergibt sich $_{max}Q_{p5} = Q'$. So wird z. B. im ersten Felde Q ein Maximum, sobald die zweite Achse über dem Querträger 1 liegt.

Stellt man die dritte Achse des Zuges über den Querträger m, Fig. 127, so erfährt der Querträger $(m-1)$ die Belastung $P_1 \frac{e_1 + e_2}{\lambda_m} + P_2 \frac{e_2}{\lambda_m}$, und es entsteht für sämtliche Querschnitte des m^{ten} Feldes die Querkraft:

$$Q'' = A - P_1 \frac{e_1 + e_2}{\lambda_m} - P_2 \frac{e_2}{\lambda_m} = A - P \frac{e_1 + e_2}{\lambda_m},$$

Digitized by Google

wobei $P = P_1 + P_2 \frac{e_2}{e_1 + e_2}$ und A gleich der unter P_1 gemessenen Ordinate des A-Polygons. Die Ermittelung der Kräfte P und Q'' ist aus der Fig. 127 zu ersehen. Ist $Q'' > Q' > A_m$, so ist $_{max}Q_{pm} = Q''$.

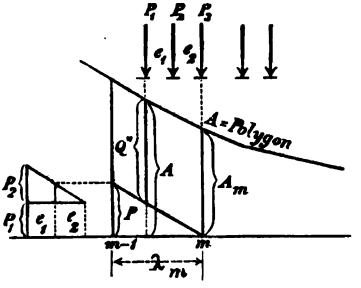


Fig. 127.

Ein noch weiteres Vorschieben des Zuges in das fragliche Feld ist überflüssig; schon der Fall, daß die dritte Achse über m stehen muß, ist sehr selten; er tritt nur ein bei verhältnismäßig großer Feldweite.

Um ein einfaches analytisches Kennzeichen für die gefährlichste Laststellung hinsichtlich $_{max}Q_{pm}$ zu finden, bezeichnen wir die Summe aller auf dem Balken sich befindenden Lasten mit ΣP und die Summe der im fraglichen Felde liegenden (einschließlich der über m) mit $\overset{1}{\Sigma} P$. Haben dann die im m^{ten} Felde liegenden Lasten von m die Abstände c_1, c_2 . . ., so ergibt sich $Q_m = \frac{1}{l}\Sigma Pb - \frac{1}{\lambda_m}\overset{1}{\Sigma} Pc$. Verschiebt man den Zug um die unendlich kleine Strecke ξ nach links, so geht über: b in $b + \xi$ und c in $c + \xi$; es wächst also Q_m um $dQ_m = \xi\left[\frac{1}{l}\Sigma P - \frac{1}{\lambda_m}\overset{1}{\Sigma} P\right]$.

Hieraus folgt aber, daß Q_m infolge der Verschiebung vergrößert wird, falls $\frac{1}{l}\Sigma P > \frac{1}{\lambda_m}\overset{1}{\Sigma} P$, d. h.

$$(1) \qquad \frac{\Sigma P}{\overset{1}{\Sigma} P} > \frac{l}{\lambda_m}$$

ist. Die Grundstellung ist also die gefährlichste, sobald $\frac{\Sigma P}{P_1} < \frac{l}{\lambda_m}$ ist. Im Gegenfalle stellt man die 2te Last über m und sieht nach, ob $\frac{\Sigma P}{P_1 + P_2} < \frac{l}{\lambda_m}$ ist; wird auch diese Ungleichung nicht erfüllt, so stellt man die Last P_2 über m u. s. w.

Für das 5te Feld ist bei der Grundstellung $\Sigma P = 105^t$, mithin $\frac{\Sigma P}{P_1} = \frac{105}{13} < \frac{l}{\lambda} = 10$; es ist also diese Stellung die gefährlichste.

Man könnte auch den Wert $Q_m = \frac{1}{l}\Sigma Pb - \frac{1}{\lambda_m}\overset{1}{\Sigma} Pc$ ermitteln, indem man den Ausdruck $\frac{1}{\lambda_m}\overset{1}{\Sigma} Pc$ in ähnlicher Weise mit Hilfe eines Seilpolygons (Polweite λ_m) bestimmt, wie den Ausdruck $A = \frac{1}{l}\Sigma Pb$. Das oben gezeigte Verfahren führt aber schneller zum Ziele, namentlich bei verschieden langen Feldern, da die vorhin eingeführte Kraft $P = P_1 + P_2 \frac{e_2}{e_1 + e_2}$ unabhängig von

Digitized by Google

der Feldweite ist, mithin nur einmal bestimmt zu werden braucht. Wie sich dieses Verfahren für den Fall erweitern läßt, daß mehr als 2 Lasten im Felde λ_m liegen, bedarf keiner näheren Auseinandersetzung.

Die von der ständigen Belastung herrührenden Querkräfte Q_g können mit Hilfe des in No. 72 Seite 105 beschriebenen Verfahrens bestimmt werden, worauf sich ${}_{max}Q = {}_{max}Q_p + Q_g$ ergibt. Es wurde, um die Fig. 126 möglichst übersichtlich zu halten, von der vollständigen Darstellung der Querkräfte abgesehen. Man findet eine solche auf Tafel III, wo sie zur Ermittelung der Spannkräfte in den Wandgliedern eines Balkens mit parallelen Gurtungen benutzt wird. Dafür sind dort alle Hilfslinien für die Konstruktion des Seilpolygons fortgelassen worden.

82. Momente. Als veränderliche Belastung sollen Güterzuglokomotiven angenommen werden, von denen zwei mit ihren Vorderteilen gegeneinander gekehrt sind; vor und hinter dieselben werden Lastwagen gestellt.*)

Um zunächst die Momente M_1, M_2, M_3 . . . . für die den Querträgern 1, 2, 3 . . . . entsprechenden Querschnitte zu bestimmen, wurde in Fig. 128 auf Tafel I für einen Zug, der länger als die Stützweite 36^m ist, ein Seilpolygon gezeichnet. Die von links nach rechts bezifferten 22 Lasten wurden in der Reihenfolge 22, 21, 20, ... , 1 auf einer Senkrechten aneinander gesetzt und zwar im Maßstabe $2' = 1^{mm}$; die Polweite H wurde $= 4\lambda = 4 \cdot 3{,}6 = 14{,}4^m$ gewählt, so daß also, da der Längenmaßstab $1^m = 4^{mm}$ lautet, $H = 4 \cdot 14{,}4 = 57{,}6^{mm}$ ist. Faßt man H als eine Kraft auf, so ist $H = 57{,}6 \cdot 2 = 115{,}2'$.**)

Um das für den Querschnitt 1 durch die veränderliche Belastung hervorgerufene Moment M_{p1} zu erhalten, wurde der Balken AB so über den Lastenzug gestellt, daß eine schwere Last (hier die 7to) bei dem fraglichen Querschnitte liegt. Hierauf wurden die Auflagersenkrechten in a und b mit dem Seilpolygon zum Schnitt gebracht und die Punkte a und b durch die Schlußlinie s_1 verbunden. Die auf der Senkrechten durch 1 von dem Seilpolygon und der Geraden s, abgeschnittene Strecke y_{p1} gibt mit H multipliziert das Moment M_{p1}. Man überzeugt sich leicht, daß dieses Moment verkleinert wird, sobald man

*) Wir beschränken uns hier auf diesen Fall. Zuweilen kommt es vor, daß drei vorwärtsgehende Maschinen etwas größere Momente erzeugen, so daß es im allgemeinen nötig ist, die folgenden Untersuchungen zweimal durchzuführen.

**) Im allgemeinen empfiehlt es sich, für H eine bequeme Zahl zu wählen; doch werden wir später auch Aufgaben zu lösen haben, bei denen es besser ist, H als ein Vielfaches der Feldweite anzunehmen. Um dann Tafel I benutzen zu können, wurde die obige Wahl getroffen.

Digitized by Google

den Träger nach links oder nach rechts gegen den Zug verschiebt, daß also das gewonnene Moment das größte ist, welches für den Querschnitt 1 entsteht. Wenn man nämlich die Lasten links von irgend einem Querschnitte C zur Mittelkraft P_a vereinigt, Fig. 129, und die Lasten rechts von C zur Mittelkraft P_b, während man mit P' die in C' angreifende Last bezeichnet, so erzeugt P_a an der rechten Stütze den Widerstand $P_a \frac{a}{l}$ und daher für C das Moment $P_a \frac{a}{l} x'$, ähnlich P_b das Moment $P_b \frac{b}{l} x$ und P' das Moment $P' \frac{xx'}{l}$, so daß

$$M = \frac{x}{l} P_b b + \frac{x'}{l} P_a a + \frac{xx'}{l} P'$$

wird. Verschiebt man nun den Zug um die unendlich kleine Streck ξ nach links, so geht M über in

$$\begin{aligned} M + dM &= \frac{x}{l} P_b (b + \xi) + \frac{x'}{l} P_a (a - \xi) + \frac{x'}{l} P' (x - \xi) \\ &= \frac{x}{l} P_b b + \frac{x'}{l} P_a a + \frac{xx'}{l} P' + \frac{\xi x}{l} P_b - \frac{\xi x'}{l} (P_a + P_b) \\ &= M + \frac{\xi}{l} [x P_b - x' (P_a + P')] \end{aligned}$$

und es muß, wenn der Zuwachs dM des Momentes negativ sein soll,

$$x P_b < x' (P_a + P')$$

werden, d. h.

$$(2) \quad \frac{P_b}{P_a + P'} < \frac{x'}{x}.$$

Ebenso folgt, daß einer Verschiebung nach rechts

$$(3) \quad \frac{P_b + P'}{P_a} > \frac{x'}{x}$$

entsprechen muß. Ist nun (Fig. 128) $\overline{EE'}$ gleich der Summe der auf dem Träger $\overline{AB}$ befindlichen Lasten (d. i. hier gleich der Summe der Lasten 6 bis 20) und zieht man $\overline{EF} = l = 36^m$, macht auf dieser Geraden $\overline{EJ} = x' = 32{,}4^m$**), verbindet F mit E' und zieht $JN \parallel FE'$, so muß JN die über dem fraglichen Querschnitte liegende Last P' treffen. Es ist nämlich dann $\overline{EG} = P_b$, $\overline{GK} = P'$, $\overline{KE'} = P_a$ und es folgt:

*) Am einfachsten verfährt man, statt die nachfolgende Betrachtung anzustellen, dem Träger verschiedene Lagen gegen den Zug zuzuweisen, für diese Lagen y_{p1} zu ermitteln und die Ergebnisse zu vergleichen.

**) In Fig. 128 wurde $\overline{EF} = \frac{1}{8} l$ und $\overline{EJ} = \frac{1}{8} x'$ gemacht.

Digitized by Google

$$\frac{\overline{EN}}{\overline{NE'}} = \frac{x'}{x} \text{ also } \frac{\overline{EG}}{\overline{GE'}} < \frac{x'}{x} \text{ und } \frac{\overline{EK}}{\overline{KE'}} > \frac{x'}{x},$$

d. h.
$$\frac{P_b}{P_a + P'} < \frac{x'}{x} \text{ und } \frac{P_b + P'}{P_a} > \frac{x'}{x}.$$

In derselben Weise überzeugt man sich, daß das größte Moment entsteht

für	Querschnitt	2,	wenn	Last	No.	7	über	2	steht,
„	„	3,	„	„	„	7	„	3	„
„	„	4,	„	„	„	9	„	4	„
„	„	5,	„	„	„	10	„	5	„

In Fig. 128 wurden, um die Zeichnung nicht undeutlich zu machen, nur die Schlußlinien s_1, s_2 und s_5, sowie die Ordinaten y_{p1}, y_{p2} und y_{p5} eingetragen. Die anderen y_p wurden ähnlich ermittelt und in Figur 130 als Ordinaten des Momentenpolygons aufgetragen.

Zu den Werten y_p sind die der ständigen Belastung (g) entsprechenden Ordinaten y_g zu fügen. Nach Seite 134 u. 135 sind die Momente M_g gleich den Ordinaten einer Parabel vom Pfeile $\frac{1}{8} g l^2$. Wird $H = 115{,}2^t$ gesetzt, so ist $\frac{1}{8}\frac{g l^2}{H} = \frac{1{,}74 \cdot 36^2}{8 \cdot 115{,}2} = 2{,}45^m$ der Pfeil der die y_g liefernden Parabel. Diese ist in Fig. 130 dargestellt worden. Für die Ordinaten

$$y = y_p + y_g$$

und die Momente $M = Hy$ ergeben sich die Werte

$$y_1 = 3{,}53^m \quad M_1 = 115{,}2 \cdot 3{,}53 = 407^{tm}$$
$$y_2 = 6{,}09^m \quad M_2 = 115{,}2 \cdot 6{,}09 = 702^{tm}$$
$$y_3 = 7{,}97^m \quad M_3 = 115{,}2 \cdot 7{,}97 = 918^{tm}$$
$$y_4 = 9{,}03^m \quad M_4 = 115{,}2 \cdot 9{,}03 = 1040^{tm}$$
$$y_5 = 9.46^m \quad M_5 = 115{,}2 \cdot 9{,}46 = 1090^{tm}.$$

Verbindet man die Endpunkte der Ordinaten y durch gerade Linien und sieht davon ab, daß ein Teil der ständigen Belastung, nämlich das Eigengewicht des Balkens, unmittelbar wirkend ist, so erhält man für alle zwischen den Querträgern gelegenen Querschnitte etwas zu große Momente. Für den Querschnitt C (Fig. 130) zwischen 3 und 4 ist z. B.

$$y = y_3 + (y_4 - y_3)\frac{\xi}{\lambda} = y_3\frac{\xi'}{\lambda} + y_4\frac{\xi}{\lambda}.$$

Da nun im allgemeinen y_3 und y_4 bei verschiedenen Laststellungen Maxima werden, so wird durch gleichzeitiges Einführen von $_{max}y_3$ und $_{max}y_4$ in die vorstehende Gleichung der Wert y zu groß gefunden. Der hierbei begangene Fehler ist aber stets unbedeutend; er wird auch

Digitized by Google

durch den von der Vernachlässigung der unmittelbaren Wirkung des Trägergewichtes herrührenden Fehler verkleinert.

Will man für einen zwischen zwei Querträgern $(m-1)$ und (m) gelegenen Balkenquerschnitt C die größte Ordinate y_p genauer bestimmen, Fig. 131, so muß man den Balken so unter den Lastenzug stellen, daß eine der schwersten Lasten über $(m-1)$ oder über (m) liegt. Außer der Schlußlinie s ist noch die dem Feld λ entsprechende Schlußlinie s' einzutragen, worauf y_p als die Strecke gefunden wird, welche die Geraden s und s' auf der Senkrechten durch C abschneiden. Es folgt dies aus dem früher bewiesenen Gesetze, daß das Momentenpolygon für mittelbare Belastung ein dem Seilpolygone für unmittelbare Belastung einbeschriebenes Polygon ist; seine Ecken liegen senkrecht unter den Querträgern. Die gefährlichste Stellung des Lastenzuges findet man am schnellsten durch Probieren. Der Träger wird gegen den Zug verschoben, und die Ergebnisse für verschiedene Stellungen werden miteinander verglichen.

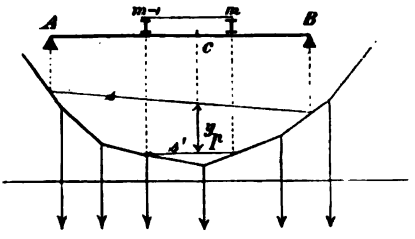


Fig. 131.

b. Unmittelbare Belastung.

83. Querkräfte. Entsteht für irgend einen Querschnitt die größte positive Querkraft, sobald die erste Last des vom rechten Auflager aus vorrückenden Lastenzuges am fraglichen Querschnitte (und zwar unmittelbar rechts von demselben) liegt, so ist $_{max}Q_p$ gleich dem linken Stützenwiderstande A, also z. B. für den Querschnitt 5 in Fig. 126: $_{max}Q_p = A_5$. Rückt die zweite Last bis an diesen Querschnitt, so entsteht bei unmittelbarer Belastung: $Q_p = A - P_1$, wobei A die bei P_1 gemessene Ordinate $(a'b')$ des A-Polygons bedeutet. Ist $A - P_1 > A_5$, so ist $_{max}Q_p = A - P_1$, vorausgesetzt, daß der Zug nicht noch weiter nach A hin verschoben werden muß.

Der Fall einer unmittelbaren Belastung kommt nur bei verhältnismäßig kurzen Trägern vor, und es ergibt sich dann bei denjenigen Belastungen, für welche Eisenbahn- und Straßenbrücken berechnet zu werden pflegen, stets $_{max}Q$ gleich der unter dem fraglichen Querschnitte gemessenen Ordinate des A-Polygons.

84. Momente für bestimmte Querschnitte. Größtes Maximalmoment. Die Ermittelung der Momente $_{max}M$ für bestimmte Quer-

Digitized by Google

schnitte wurde bereits in No 82 erledigt (vergl. die Berechnung von M_1, M_2 . . . .). Wird aber *das größte aller Maximalmomente* gesucht, so muß ein anderer Weg eingeschlagen werden, da die Lage des Querschnitts, welchem dieses Moment entspricht, zunächst unbekannt ist, *und weil ferner die veränderliche und die ständige Last nicht mehr getrennt behandelt werden dürfen.*

In Fig. 132 haben wir, der größeren Deutlichkeit wegen, angenommen, daß es sich um einen kurzen Träger mit einer verhältnismäßig großen gleichförmigen Belastung g handelt, und daß nur zwei verschiebbare Einzellasten P_1 und P_2 in Betracht kommen. CD ist größer als die Stützweite AB des Trägers. Die gleichförmige Be-

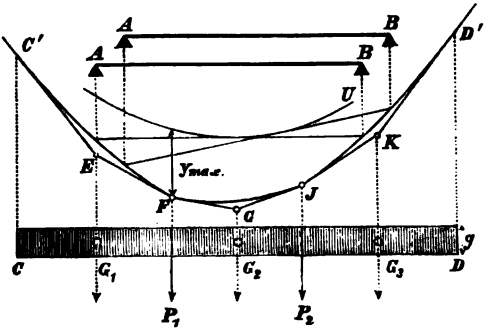


Fig. 132.

lastung wurde durch senkrechte, mit den Einzellasten zusammenfallende Schnitte in drei Streifen zerlegt, deren Gewichte G_1, G_2, G_3 sein mögen; sodann wurde zu den Einzellasten G_1, P_1, G_2, P_2, G_3 mit der beliebigen Polweite H das Seilpolygon $C'GD'$ gezeichnet. Rundet man dessen Ecken $C'EF$, FGJ, JKD durch Parabelbögen ab, welche die jene Ecken bildenden Seilpolygonseiten in den Punkten C', F, J, D' berühren, so bilden diese Bögen (vergl. Seite 32) das Seilpolygon für die aus der gleichmäßigen Belastung und den Einzellasten zusammengesetzte Belastung. Die Parabelbögen bestimmt man am zweckmäßigsten mit Hilfe von Tangenten nach dem in der Fig. 133 dargestellten Verfahren. Die Seiten FG und GJ der abzurundenden Ecke wurden in gleiche Teile zerlegt

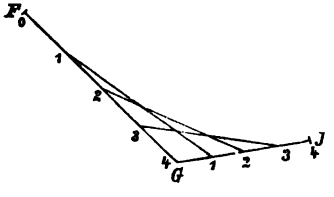


Fig. 133.

Digitized by Google

und die gleich bezeichneten Teilpunkte durch gerade Linien verbunden. Diese Geraden sind Tangenten an die gesuchte Parabel.

Nach Aufzeichnung des Seilpolygons gibt man dem zu untersuchenden Balken verschiedene Stellungen gegen das Lastensystem und bestimmt die zugehörigen Schlußlinien sowie die von diesen umhüllte Linie U. Ist dann y_{max} der größte senkrechte Abstand der Linie U vom Seilpolygon, so erhält man das größte Maximalmoment:

$$M = Hy_{max}.$$

c. Berechnung der Stützenwiderstände und Momente infolge der Belastung durch einen Eisenbahnzug mit Hilfe von Tabellen.

85. Stützenwiderstand A_m. Es sei ein Eisenbahnzug vom Auflager B aus bis zu irgend einem Querschnitte (Knotenpunkte) m vorgerückt (Fig. 134). Die Lasten seien mit $P_1, P_2, \ldots P_n$ bezeichnet, ihre Abstände von B mit b_1, $b_2 \ldots b_n$ und die Abstände der Lasten von der letzten Last mit $c_1, c_2 \ldots$. Der Widerstand der linken Stütze wird:

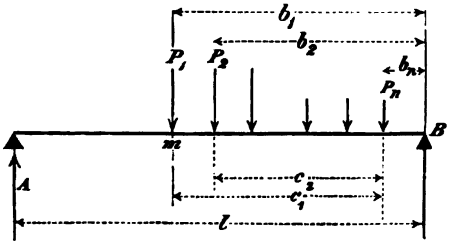


Fig. 134.

$$A_m = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2 + \ldots + P_n b_n}{l} = \frac{\sum_1^n Pb}{l} = \frac{\sum_1^n P(b_n + c)}{l}$$
$$= \frac{1}{l}\left(b_n \sum_1^n P + \sum_1^n Pc\right),$$

und mit der kurzen Bezeichnung:

$$\sum_1^n P = \mathfrak{P}_n, \quad \sum_1^n Pc = \mathfrak{S}_n:$$

$$A_m = \frac{1}{l}(\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n).$$

Die Werte $\mathfrak{P}_n$ und $\mathfrak{S}_n$ können für einen bestimmten Lastenzug ein für allemal berechnet werden. Dazu beachte man, daß zwischen den statischen Momenten $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{S}_{n+1}$ die Beziehung

$$\mathfrak{S}_{n+1} = \mathfrak{S}_n + \mathfrak{P}_n e_n$$

besteht, wobei e_n den Abstand der Last P_n von der Last P_{n+1} bedeutet.

Digitized by Google

Für den von uns angenommenen Güterzug Fig. 114 ergeben sich, je nach der Stellung der beiden den Zug führenden Lokomotiven die in den Tabellen I, II und III aufgeführten Werte. Die erste Spalte gibt die Anzahl n der Lasten an und die zweite den Abstand c_1 der Last P_1 von der Last P_n, das ist die ***Zuglänge.***

Die Ansätze für die Berechnung der ersten Zahlenwerte $\mathfrak{S}$ lassen wir hier folgen. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_1 &= 16^t & \mathfrak{S}_1 &= 0\\
\mathfrak{P}_2 &= 32^t & \mathfrak{S}_2 &= 0 + 16 \cdot 1{,}2 = 19{,}2^{tm}\\
\mathfrak{P}_3 &= 48^t & \mathfrak{S}_3 &= 19{,}2 + 32 \cdot 1{,}2 = 57{,}6^{tm}\\
\mathfrak{P}_4 &= 64^t & \mathfrak{S}_4 &= 57{,}6 + 48 \cdot 1{,}2 = 115{,}2^{tm}\\
\mathfrak{P}_5 &= 76^t & \mathfrak{S}_5 &= 115{,}2 + 64 \cdot 4{,}0 = 371{,}2^{tm}.
\end{aligned}$$

Beispiel. Die Stützweite des Balkens AB sei $52{,}2^m$. Ein von zwei vorwärts fahrenden Lokomotiven geführter Güterzug (Tabelle I) rückt von B aus um $47{,}7^m$ vor. Es ergibt sich dann $c_1 = 46{,}2^m$, $b_n = 47{,}7 - 46{,}2 = 1{,}5^m$, $\mathfrak{P}_n = 284^t$, $\mathfrak{S}_n = 7650{,}4^{tm}$

$$Al = 284 \cdot 1{,}5 + 7650{,}4 = 8076{,}4^{tm}$$
$$A = \frac{8076{,}4}{52{,}2} = 155^t.$$

86. Momente. Steht die r^{te}-Achse eines von B aus vorrückenden Eisenbahnzuges über dem Knotenpunkte m, Fig. 135, so ist das Angriffsmoment für den durch m gelegten Querschnitt

$$\mathfrak{M}_m = A x_m - \mathfrak{S}_r$$

wo

$$A = \frac{\sum_1^n Pb}{l}.$$

Verschiebt man den Zug um die unendlich kleine Strecke db nach links, so wächst A um $\sum_1^n P \cdot db$ und $\mathfrak{M}_m$ um

$$d\mathfrak{M}_m = db\left[\frac{\sum_1^n P}{l} x_m - \sum_1^r P\right],$$

und es muß daher, wenn $\mathfrak{M}_m$ abnehmen soll, wenn also die angenommene Zugstellung die gefährlichste sein soll,

$$\sum_1^n P \frac{x_m}{l} < \sum_1^r P$$

sein, d. h.

$$\leftarrow \quad \text{(I)} \qquad \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_r} < \frac{l}{x_m}.$$

Ebenso findet man, daß $\mathfrak{M}_m$ infolge einer kleinen Verschiebung des Eisenbahnzuges nach rechts abnimmt, sobald

$$\longrightarrow \quad \text{(II)} \qquad \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_{r-1}} > \frac{l}{x_m}$$

ist. Die beiden Ungleichungen (I) und (II) müssen also erfüllt sein, wenn die Zugstellung den größten Wert $\mathfrak{M}_m$ hervorbringen soll. Es lassen sich im allgemeinen verschiedene Zugstellungen angeben, welche die Bedingungen I und II befriedigen; doch weichen dann die Ergebnisse $\mathfrak{M}_m$ nur wenig voneinander ab.

Digitized by Google

Beispiel. Ein Balken von 80^{m} Stützweite wird durch die Knotenpunkte in 16 gleichlange Felder zerlegt. Für den ***mittelsten Knotenpunkt*** $m = 8$ erhält man, entsprechend der in Fig. 135 angegebenen Zugstellung mit Hilfe von Tabelle III:

$$n = 26 \qquad r = 13$$

$$\longleftarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{26}}{\mathfrak{P}_{13}} = \frac{344}{184} < \frac{l}{x_8} = 2{,}0$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{26}}{\mathfrak{P}_{12}} = \frac{344}{168} > 2{,}0$$

$$b_m = 1{,}8^{m}, \quad \mathfrak{S}_{26} = 12121{,}6^{tm}, \quad \mathfrak{S}_{13} = 2124{,}8^{tm}$$

$$\mathfrak{M}_m = \frac{x_m}{l}(\mathfrak{P}_n b_m + \mathfrak{S}_n) - \mathfrak{S}_r$$

$$\mathfrak{M}_8 = \frac{1}{2}(344 \cdot 1{,}8 + 12121{,}6) - 2124{,}8 = 4246^{tm}.$$

Für den ***Knotenpunkt*** *7* findet man, Fig. 136, Tabelle III.

$$n = 27 \qquad r = 12$$

$$\longleftarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{27}}{\mathfrak{P}_{12}} = \frac{356}{168} < \frac{l}{x_7} = \frac{16}{7}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{27}}{\mathfrak{P}_{11}} = \frac{356}{152} > \frac{16}{7}$$

$$b_m = 2{,}6, \quad \mathfrak{S}_{27} = 13153{,}6, \quad \mathfrak{S}_{12} = 1923{,}2$$

$$\mathfrak{M}_7 = \frac{7}{16}(356 \cdot 2{,}6 + 13153{,}6) - 1923{,}2 = 4286^{tm}.$$

Knotenpunkt *6*. Die zweite Maschine wird vorwärts fahrend angenommen, die erste bleibt rückwärts fahrend, Fig. 137, Tabelle II.

$$n = 27 \qquad r = 10$$

$$\longleftarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{27}}{\mathfrak{P}_{10}} = \frac{356}{148} < \frac{l}{x_6} = \frac{8}{3}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{27}}{\mathfrak{P}_{9}} = \frac{356}{132} > \frac{8}{3}$$

$$b_m = 2{,}8^{m}, \quad \mathfrak{S}_{27} = 13228, \quad \mathfrak{S}_{10} = 1240{,}4,$$

$$\mathfrak{M}_6 = \frac{3}{8}(356 \cdot 2{,}8 + 13228) - 1240{,}4 = 3094^{tm}.$$

Knotenpunkt *5*, Fig. 138, Tabelle II.

$$n = 28 \qquad r = 8$$

$$\longleftarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{28}}{\mathfrak{P}_{8}} = \frac{368}{116} < \frac{l}{x_5} = \frac{16}{5} = 3{,}2$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{28}}{\mathfrak{P}_{7}} = \frac{368}{100} > 3{,}2$$

$$b_m = 2{,}4^{m}, \quad \mathfrak{S}_{28} = 14296, \quad \mathfrak{S}_{8} = 942{,}8$$

$$\mathfrak{M}_5 = \frac{5}{16}(368 \cdot 2{,}4 + 14296) - 942{,}8 = 3801^{tm}.$$

Digitized by Google

Knotenpunkt 4, Fig. 138, Tabelle II.

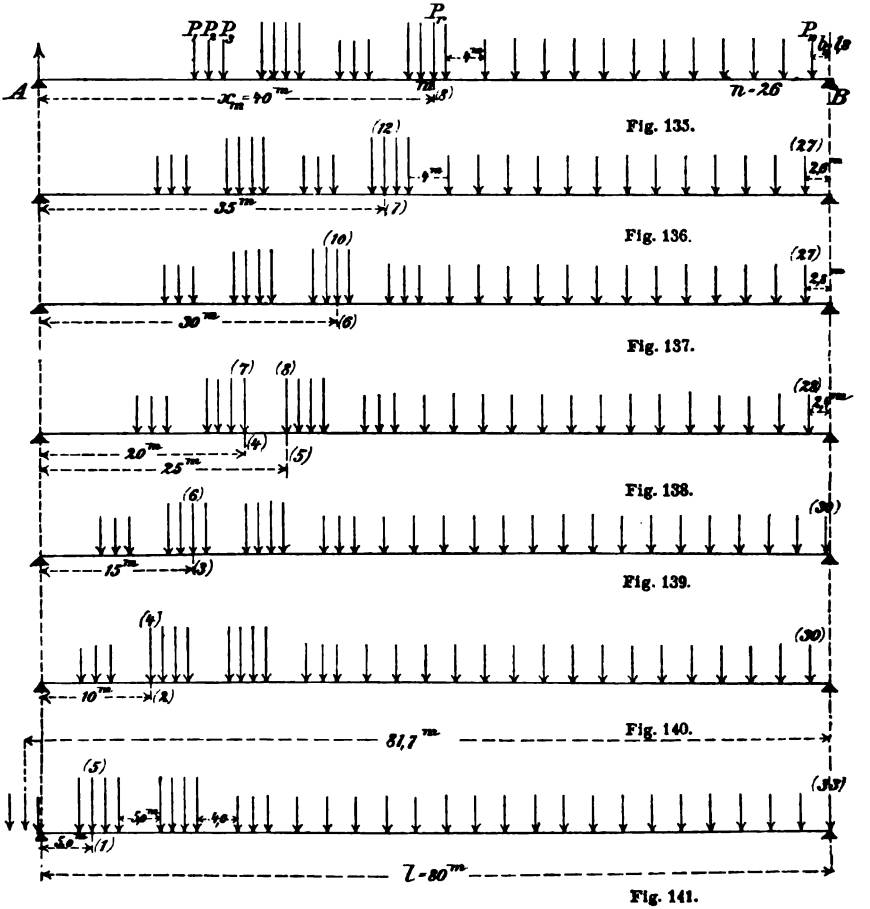
$$n = 28 \qquad r = 6$$

$$\longleftarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{28}}{\mathfrak{P}_7} = \frac{868}{100} < \frac{l}{x_4} = 4$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{28}}{\mathfrak{P}_6} = \frac{868}{84} > 4$$

$$b_n = 2{,}4^{tm},\ \mathfrak{S}_{28} = 14296,\ \mathfrak{S}_7 = 442{,}8$$

$$\mathfrak{M}_4 = \frac{1}{4}(368 \cdot 2{,}4 + 14296) - 442{,}8 = 3352^{tmm}.$$



Digitized by Google

Knotenpunkt 3, Fig. 139, Tabelle II.

$$n = 30 \qquad r = 6$$

$$\longleftarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{30}}{\mathfrak{P}_6} = \frac{392}{84} < \frac{l}{x_3} = \frac{16}{3}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{29}{}^{*})}{\mathfrak{P}_5} = \frac{380}{68} > \frac{16}{3}$$

$$b_n = 0{,}2^{m}, \quad \mathfrak{S}_{30} = 16540, \quad \mathfrak{S}_6 = 342{,}0$$

$$\mathfrak{M}_3 = \frac{3}{16}(392 \cdot 0{,}2 + 16540) - 342{,}0 = 2774^{tm}.$$

Knotenpunkt 2, Fig. 140, Tabelle II.

$$n = 30 \qquad r = 4$$

$$\longleftarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{30}}{\mathfrak{P}_4} = \frac{392}{52} < \frac{l}{x_2} = 8{,}0$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{30}}{\mathfrak{P}_5} = \frac{392}{36} > 8{,}0$$

$$b_n = 2{,}8^{m}, \quad \mathfrak{S}_{30} = 16540, \quad \mathfrak{S}_4 = 198{,}0$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{1}{8}(392 \cdot 2{,}8 + 16540) - 198{,}0 = 2007^{tm}.$$

Knotenpunkt 1, Fig. 141, Tabelle II. Der Tender der ersten Maschine hat die Brücke verlassen.

$$n = 33 \qquad r = 5, \ \mathfrak{P}_{33} = 428, \ \mathfrak{P}_5 = 68, \ \mathfrak{P}_3 = 36$$

$$\longleftarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{33} - \mathfrak{P}_3}{\mathfrak{P}_5 - \mathfrak{P}_3} = \frac{392}{32} < \frac{l}{x_1} = 16$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\mathfrak{P}_{29} - \mathfrak{P}_3}{\mathfrak{P}_4 - \mathfrak{P}_3} = \frac{392 - 12}{16} > 16$$

$$b_n = 0, \quad \mathfrak{S}_n = 20176$$

$$Al = 20176 - 36 \cdot 81{,}7 = 17234{,}8^{tm}$$

$$\mathfrak{M}_1 = Ax - 16 \cdot 1{,}2 = \frac{1}{16}\,17234{,}8 - 19{,}2 = 1058^{tm}$$

---

*) Die letzte Achse liegt so nahe am Auflager *B*, daß sie infolge einer kleinen endlichen Verschiebung des Zuges nach rechts den Träger verläßt.

Digitized by Google

Tabelle I.

	Lokomotive				Tender			Lokomotive				Tender			Güterwagen			
Tonnen	16	16	16	16	12	12	12	16	16	16	16	12	12	12	12	12	12	12
Meter	1,2	1,2	1,2	4,0	1,5	1,5	4,0	1,2	1,2	1,2	4,0	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0	

n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$	n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$
1	0	16	0	31	76,2	404	17 790,4
2	1,2	32	19,2	32	79,2	416	19 002,4
3	2,4	48	57,6	33	82,2	428	20 250,4
4	3,6	64	115,2	34	85,2	440	21 534,4
5	7,6	76	371,2	35	88,2	452	22 854,4
6	9.1	88	485,2	36	91,2	464	25 210,4
7	10,6	100	617,2	37	94,2	476	25 602,4
8	14,6	116	1 017,2	38	97,2	488	27 030,4
9	15,8	132	1 156,4	39	100,2	500	28 494,4
10	17,0	148	1 314,8	40	103,2	512	29 994,4
11	18,2	164	1 492,4	41	106,2	524	31 530,4
12	22,2	176	2 148,4	42	109,2	536	33 102,4
13	23,7	188	2 412,4	43	112,2	548	34 710,4
14	25,2	200	2 694,4	44	115,2	560	36 354,4
15	28,2	212	3 294,4	45	118,2	572	38 034,4
16	31,2	224	3 930,4	46	121,2	584	39 750,4
17	34,2	236	4 602,4	47	124,2	596	41 502,4
18	37,2	248	5 310,4	48	127,2	608	43 290,4
19	40,2	260	6 054,4	49	130,2	620	45 114,4
20	43,2	272	6 834,4	50	133,2	632	46 974,4
21	46,2	284	7 650,4	51	136,2	644	48 870,4
22	49,2	296	8 502,4	52	139,2	656	50 802,4
23	52,2	308	9 390,4	53	142,2	668	52 770,4
24	55,2	320	10 314,4	54	145,2	680	54 774,4
25	58,2	332	11 274,4	55	148,2	692	56 814,4
26	61,2	344	12 270,4	56	151,2	704	58 890,4
27	64,2	356	13 302,4	57	154,2	716	61 002,4
28	67,2	368	14 370,4	58	157,2	728	63 150,4
29	70,2	380	15 474,4	59	160,2	740	65 334,4
30	73,2	392	16 614,4	60	163,2	752	67 554,4

Digitized by Google

Tabelle II.

	Tender			Lokomotive				Lokomotive				Tender			Güterwagen			
Tonnen	12	12	12	16	16	16	16	16	16	16	16	12	12	12	12	12	12	12
Meter	1,5	1,5	4,0	1,2	1,2	1,2	5,0	1,2	1,2	1,2	4,0	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0	

n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$	n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$
1	0	12	0	31	77,2	404	17 716
2	1,5	24	18	32	80,2	416	18 928
3	3,0	36	54	33	83,2	428	20 176
4	7,0	52	198	34	86,2	440	21 460
5	8,2	68	260,4	35	89,2	452	22 780
6	9,4	84	342	36	92,2	464	24 136
7	10,6	100	442,8	37	95,2	476	25 528
8	15,6	116	942,8	38	98,2	488	26 956
9	16,8	132	1 082	39	101,2	500	28 420
10	18,0	148	1 240,4	40	104,2	512	29 920
11	19,2	164	1 418	41	107,2	524	31 456
12	23,2	176	2 074	42	110,2	536	33 028
13	24,7	188	2 338	43	113,2	548	34 636
14	26,2	200	2 620	44	116,2	560	36 280
15	29,2	212	3 220	45	119,2	572	37 960
16	32,2	224	3 856	46	122,2	584	39 676
17	35,2	236	4 528	47	125,2	596	41 428
18	38,2	248	5 236	48	128,2	608	43 216
19	41,2	260	5 980	49	131,2	620	45 040
20	44,2	272	6 760	50	134,2	632	46 900
21	47,2	284	7 576	51	137,2	644	48 796
22	50,2	296	8 428	52	140,2	656	50 728
23	53,2	308	9 316	53	143,2	668	52 696
24	56,2	320	10 240	54	146,2	680	54 700
25	59,2	332	11 200	55	149,2	692	56 740
26	62,2	344	12 196	56	152,2	704	58 816
27	65,2	356	13 228	57	155,2	716	60 928
28	68,2	368	14 296	58	158,2	728	63 076
29	71,2	380	15 400	59	161,2	740	65 260
30	74,2	392	16 540	60	164,2	752	67 480

Digitized by Google

Tabelle III.

	Tender			Lokomotive				Tender			Lokomotive				Güterwagen		
Tonnen	12	12	12	16	16	16	16	12	12	12	16	16	16	16	12	12	1
Meter	1,5	1,5	4,0	1,2	1,2	1,2	4,0	1,5	1,5	4,0	1,2	1,2	1,2	4,0	3,0	3,0	3,0

n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$	n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$
1	0	12	0	31	77,2	404	17 641,6
2	1,5	24	18	32	80,2	416	18 853,6
3	3,0	36	54	33	83,2	428	20 101,6
4	7,0	52	198	34	86,2	440	21 385,6
5	8,2	68	260,4	35	89,2	452	22 705,6
6	9,4	84	342,0	36	92,2	464	24 061,6
7	10,6	100	442,8	37	95,2	476	25 453,6
8	14,6	112	842,8	38	98,2	488	26 881,7
9	16,1	124	1 010,8	39	101,2	500	28 345,6
10	17,6	136	1 196,8	40	104,2	512	29 845,6
11	21,6	152	1 740,8	41	107,2	524	31 381,6
12	22,8	168	1 928,2	42	110,2	536	32 953,6
13	24,0	184	2 124,8	43	113,2	548	34 561,6
14	25,2	200	2 345,6	44	116,2	560	36 205,6
15	29,2	212	3 145,6	45	119,2	572	37 885,6
16	32,2	224	3 781,6	46	122,2	584	39 601,6
17	35,2	236	4 453,6	47	125,2	596	41 353,6
18	38,2	248	5 161,6	48	128,2	608	43 141,6
19	41,2	260	5 905,6	49	131,2	620	44 965,6
20	44,2	272	6 685,6	50	134,2	632	46 825,6
21	47,2	284	7 501,6	51	137,2	644	48 721,6
22	50,2	296	8 353,6	52	140,2	656	50 653,6
23	53,2	308	9 241,6	53	143,2	668	52 621,6
24	56,2	320	10 165,6	54	146,2	680	54 625,6
25	59,2	332	11 125,6	55	149,2	692	56 665,6
26	62,2	344	12 121,6	56	152,2	704	58 741,6
27	65,2	356	13 153,6	57	155,2	716	60 853,6
28	68,2	368	14 221,6	58	158,2	728	63 001,6
29	71,2	380	15 325,6	59	161,2	740	65 185,6
30	74,2	392	16 465,6	60	164,2	752	67 405,6

Digitized by Google

87. Fortsetzung. Überschreitet die Abscisse x des Querschnitts bei einem Balken von größerer Stützweite einen bestimmten Wert, so liegt bei der das Moment ${}_{max}M_m$ erzeugenden Laststellung eine Güterwagenachse über m. Man erhält in diesem Falle für ${}_{max}M_m$ einen besonders einfachen Ausdruck, wenn man die Güterwagen durch eine gleichförmige Belastung p, welche etwa 2,5 m hinter der letzten Lokomotivachse beginnt, ersetzt.

Mit den aus Fig. 142 ersichtlichen Bezeichnungen findet man nach dem auf Seite 141 zur Berechnung von M angegebenen Verfahren

$$M = \frac{x}{l} \cdot \frac{p x'^2}{2} + \frac{x'}{l} \left[\Sigma P (\xi - e) + \frac{p (x^2 - \xi^2)}{2} \right]$$

$$= \frac{p x x'}{2} - \frac{x'}{l} \Sigma P e + \frac{x'}{l} \left(\xi \Sigma P - \frac{p \xi^2}{2} \right).$$

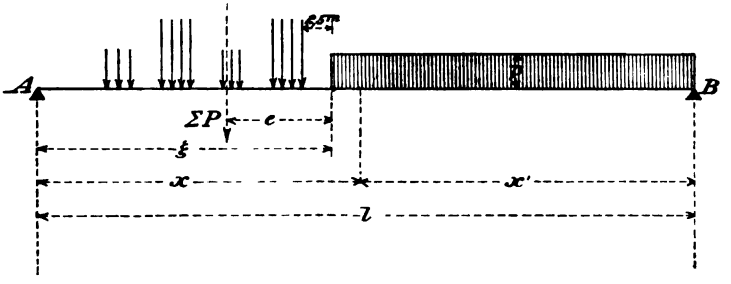


Fig. 142.

M wird ein Maximum, sobald ξ den festen, von der Lage des Querschnitts m unabhängigen Wert

$$(1) \quad \xi = \frac{\Sigma P}{p}$$

annimmt; es entsteht

$$(2) \quad M_{max} = \frac{p x x'}{2} + \frac{x'}{l} \left(\Sigma P \frac{\xi}{2} - \Sigma P e \right).$$

Für die von uns gewählte Zuganordnung (Tabelle III) ist

$$\Sigma P = 200^t, \quad p = \frac{12{,}0^t}{3{,}0^m} = 4{,}0^t/_m, \quad \xi = 50^m,$$

woraus zunächst folgt, daß $x \geqq 50^m$ sein muß, damit Formel (2) angewendet werden darf. Ferner ist

$$\Sigma P e = \mathfrak{S}_{14} + \mathfrak{P}_{14} 2{,}5 = 2845{,}6 + 200 \cdot 2{,}5 = 2845{,}6^{tm}$$

$$\Sigma P \frac{\xi}{2} - \Sigma P e = 5000 - 2845{,}6 = 2154{,}4^{tm},$$

und es ergibt sich daher die einfache Gleichung

$${}_{max}M = 2 x x' + 2154{,}4 \frac{x'}{l}.$$

Als *Beispiel* wählen wir eine Brücke von 140 m Spannweite und 5 m Feldweite. Wir erhalten

$${}_{max}M = 2 x x' + 15{,}4 x'$$

Digitized by Google

und finden für

$$x = 50^m, \quad 55^m, \quad 60^m, \quad 65^m, \quad 70^m$$
$$M = 10390^{tm}, \quad 10660^{tm}, \quad 10830^{tm}, \quad 10900^{tm}, \quad 10880^{tm}.$$

Das größte M entsteht bei $x = 65^m$; es unterscheidet sich aber nicht wesentlich von dem in der Mitte erhaltenen Werte.

Wir führen noch an, daß das durch die Formel (2) gegebene Moment für

$$(3) \quad x'' = \frac{l}{2} - x = \frac{\Sigma P \frac{\xi}{2} - \Sigma Pe}{pl}$$

ein Maximum wird, und daß sich dieses größte aller Maximalmomente auf die einfache Form

$$(4) \quad {}_{max}(M_{max}) = \frac{p x'^2}{2}$$

bringen läßt. Unseren Belastungsannahmen entspricht insbesondere

$$x'' = \frac{538{,}6}{l} \text{ und } {}_{max}(M_{max}) = 2 x'^2,$$

also beispielsweise für

$l =$	120^m	und $l =$	140^m
$x'' =$	$4{,}49^m$	$x'' =$	$3{,}85^m$
$x' =$	$64{,}49^m$	$x' =$	$73{,}85_m$
$M =$	8310^{tm}	$M =$	10910^{tm}.

Die Formeln (3) und (4) leisten gute Dienste, wenn die Wirkungen verschiedener Lokomotivgewichte und Belastungen p schnell miteinander verglichen werden sollen. Nimmt man z. B. zwei rückwärtsfahrende Lokomotiven mit den in Fig. 113 (S. 122) angegebenen Achslasten und Radständen an, ferner $p = \frac{12{,}0}{3{,}3} = \frac{40}{11}{}^{tm}$, so erhält man

$$\Sigma P = 2 \cdot 56 + 2 \cdot 36 = 184^t, \quad \xi = \frac{184 \cdot 11}{40} = 50{,}6^m,$$

$$\Sigma Pe = 56\left(2{,}5 + 1{,}3 + \frac{1{,}3}{2}\right) + (36 + 56 + 36) \cdot 19{,}55 = 2751{,}60^{tm},$$

$$\Sigma P \frac{\xi}{2} - \Sigma Pe = 1903{,}6,$$

mithin $$x'' = \frac{523{,}5}{l} \text{ und } {}_{max}(M_{max}) = \frac{20}{11} x'^2,$$

also für

$l =$	120^m	und $l =$	140^m
$x'' =$	$4{,}36^m$	$x'' =$	$3{,}74^m$
$M =$	7530^{tm}	$M =$	9890^{tm}.

88. Größtes Moment M für unmittelbare Belastung. Wird die genaue Berechnung des größten Momentes für unmittelbare Belastung verlangt, so dürfen Verkehrslast und Eigenlast nicht getrennt behandelt werden. Für weitgespannte Brücken ist also nicht der durch Gleich. (2) gegebene Wert M, sondern, wegen $M_g = \frac{g x x'}{2}$, der Wert

$$M_{max} = (p + g)\frac{x x'}{2} + \frac{x'}{l}\left(\Sigma P \cdot \frac{\xi}{2} - \Sigma Pe\right)$$

Digitized by Google

zu einem Maximum zu machen. Man findet dann

$$x'' = \frac{1}{2} - x = \frac{\Sigma P \frac{\xi}{2} - \Sigma P e}{(p+g)\,l} \quad \text{und}$$

$$_{max}(M_{max}) = (p+g)\frac{x''^2}{2}.$$

Unmittelbare Belastung kommt indes nur bei kürzeren Trägern vor, z. B. den Schienenträgern von Eisenbahnbrücken, sobald die Schienen unmittelbar auf den Trägern liegen oder sobald dicht nebeneinander liegende Querschwellen oder Langschwellen angeordnet sind.*) Der Einfluß des Eigengewichts spielt dann eine so untergeordnete Rolle, daß es sich empfiehlt, das Maximalmoment infolge der Verkehrslast allein zu berechnen und hierzu das vom Eigengewichte in der Mitte des Trägers hervorgerufene Moment $\frac{1}{8} g l^2$ zu addieren. Bezeichnet, Fig. 143,

$\mathfrak{S}_m$ das statische Moment der links vom fraglichen Querschnitt m gelegenen Achslasten, bezogen auf m,

ΣP die Mittelkraft aus sämtlichen Achslasten,

c den Abstand der ΣP vom Auflager B,

s „ „ „ ΣP „ Querschnitte m,

so ist das Moment für den Querschnitt m

$$M = \Sigma P \frac{c}{l} x - \mathfrak{S}_m.$$

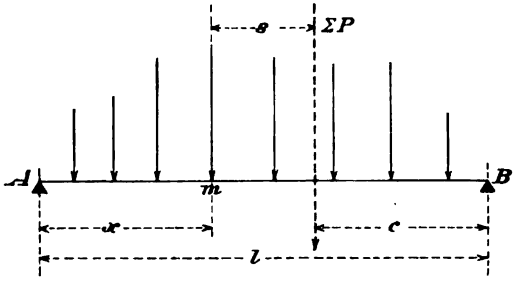


Fig. 143.

Der Wert

$$cx = (l - s - x)\,x$$

wird ein Maximum, sobald

$$l - s = 2x$$

ist. Daraus folgt

$$(5) \quad c = x:$$

*) Sehr oft rechnet man selbst bei größeren Schwellenabständen mit unmittelbarer Belastung, weil man sich nicht an bestimmte Lagen der Schwellen binden will. Aus diesem Grunde werden auch — wenn die Querschwellen fehlen — die zwischen Schiene und Träger liegenden Unterlagsplatten vernachlässigt.

Digitized by Google

d. h. der Querschnitt m und die Mittelkraft ΣP müssen von der Trägermitte gleich weit entfernt sein. Im allgemeinen wird man probeweise verschiedene Lasten über m annehmen und die berechneten Werte

$$(6) \quad {}_{m}M = \Sigma P \frac{x^2}{l} - \mathfrak{S}_m$$

miteinander vergleichen; in der Regel aber unterliegt die Wahl dieser Last keinem Zweifel.

Beispiel. Liegt die Stützweite zwischen rund 5^m und 11^m, so kommen für die ungünstigste Laststellung nur 4 Lokomotivachsen in Betracht, Fig. 144. Es ergibt sich dann

$$x = c = \frac{l}{2} - \frac{1{,}2}{4} = \frac{l}{2} - 0{,}3, \quad \Sigma P = 64^t, \quad \mathfrak{S}_m = 16 \cdot 1{,}2 = 19{,}2^{tm},$$

$$M = \frac{64\left(\frac{l}{2} - 0{,}3\right)^2}{l} - 19{,}2,$$

$$(I) \quad M = 16\,l - 38{,}4 + \frac{5{,}76}{l}.$$

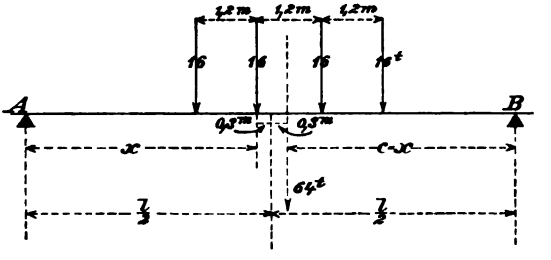


Fig. 144.

Ist die Stützweite so gering, daß bei der das größte Moment erzeugenden Laststellung nicht mehr alle 4 Achsen der Lokomotive auf der Brücke liegen, so ist es ratsam, die Achslasten etwas größer anzunehmen, um dem Umstande Rechnung zu tragen, daß einzelne Achsen infolge der Bewegung der Maschine stärker belastet werden. Wir empfehlen, mit der Achslast 17^t oder 18^t oder 20^t zu rechnen, je nachdem sich nur 3 oder nur 2 Achsen oder nur eine Achse auf der Brücke befinden. Für diese drei Belastungsfälle findet man leicht die Gleichungen:

$$(II) \quad M = 12{,}75\,l - 20{,}4,$$

$$(III) \quad M = 9\,l - 10{,}8 + \frac{3{,}24}{l},$$

$$(IV) \quad M = 5\,l.$$

Bis zu $l = 2{,}35^m$ liefert Gleich. IV das größte Moment, von $l = 2{,}35^m$ bis $2{,}86^m$ ist III anzuwenden und von $l = 2{,}86^m$ bis $5{,}2^m$ Formel II. Auf den Umstand, daß die Stützweite bereits mit $l = 4{,}8^m$ den vierfachen Radstand erreicht, nehmen wir keine Rücksicht, damit die Gültigkeitsbereiche der vier Gleichungen stetig ineinander übergehen.

Digitized by Google

§ 19.

Verwertung der Einflußlinien des einfachen Balkens.

89. Bei der Ermittelung der von beweglichen Einzellasten hervorgerufenen Momente und Querkräfte haben wir von den Einflußlinien keinen Gebrauch gemacht. Es wäre auch umständlich, Größen, deren Bestimmung mit Hilfe des Seilpolygons nur das Abgreifen einer einzigen Strecke und die Multiplikation derselben mit einem festen Werte, der Polweite, erfordert, durch Angabe des Einflusses der einzelnen Lasten darstellen zu wollen, und hieran ändert auch der leicht zu beweisende, die Benutzung der Einflußlinien erleichternde Satz nichts, daß eine Lastengruppe innerhalb einer Strecke, der eine gerade Einflußlinie entspricht, durch ihre Mittelkraft ersetzt werden darf. Trotzdem sind die Einflußlinien des einfachen Balkens von großem Nutzen. Ganz abgesehen von den Diensten, die sie uns im zweiten Bande unseres Buches bei der Berechnung statisch unbestimmter Träger leisten werden, gestatten sie häufig eine schnelle Zurückführung anderer Aufgaben auf die Berechnung der Momente und Querkräfte einfacher Balken. So werden wir bei der Untersuchung statisch bestimmter Träger häufig auf Einflußflächen stoßen, welche aus einem Dreieck ACB (Fig. 145) bestehen, oder aus einem Viereck AL_1L_2B, das aus einem Dreieck ACB durch Abschneiden der Spitze entstanden ist, Fig. 146. Bezeichnet

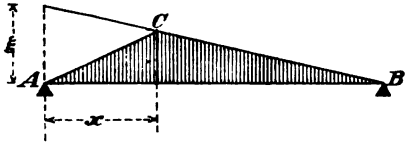


Fig. 145.

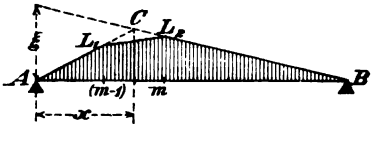


Fig. 146.

man dann mit x die Entfernung des Punktes C von der Lotrechten durch A und mit ξ die Strecke, welche die Gerade BC auf jener Lotrechten abschneidet, so kann man die Größe Z, deren Einflußlinie das Dreieck ACB ist, in der Weise finden, daß man für den Querschnitt C eines einfachen Balkens das Moment $\mathfrak{M}$ mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmt und hierauf mit $\xi : x$ multipliziert. Denn wäre $\xi = x$, so würde das Dreieck ACB vollständig mit der in Fig. 123, Seite 134 dargestellten Einflußfläche für M übereinstimmen.

Hat die Einflußfläche für Z die Form AL_1L_2B, so ermittele man mit Hilfe des in Fig. 131, Seite 143 angegebenen Verfahrens das

Digitized by Google

Moment $M = Hy$ für den zwischen den Querträgern $(m-1)$ und m gelegenen Querschnitt C eines einfachen Balkens AB und multipliziere es wieder mit $\xi : x$. In beiden Fällen erhält man also Z in der Form

$$Z = \frac{\xi}{x} M = \frac{\xi}{x} Hy.$$

Auch die Berechnung von M mit Hilfe von Tabellen leistet häufig vortreffliche Dienste bei der Auswertung derartiger Größen Z.

90. Für viele Untersuchungen wird es sich als nützlich erweisen, die Aufgabe der Berechnung des Momentes M durch die folgende Fragestellung zu erweitern. Das Feld F_1F_2 des Balkens AB (Fig. 147) wird

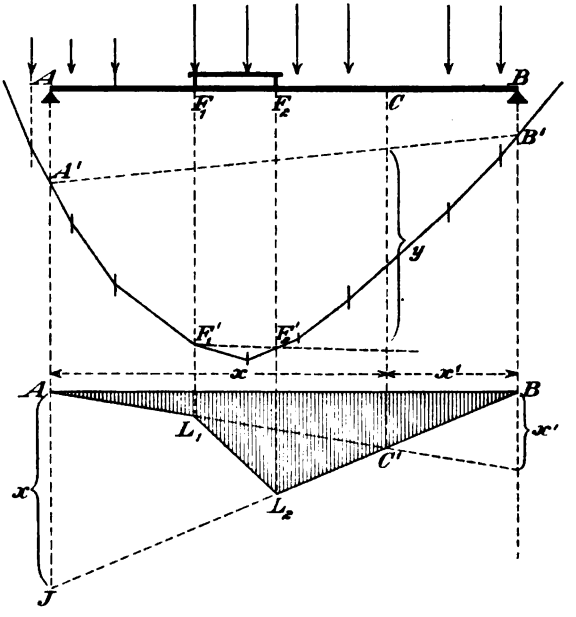


Fig. 147.

durchschnitten. Gesucht ist das Moment M der am Balkenstück AF_1 angreifenden äußeren Kräfte in Bezug auf einen Punkt C, der zwischen F_2 und B liegt.

Stellt man den Träger unter das die Lasten verbindende Seilpolygon und trägt man die Schlußlinien $A'B'$ und $F_1'F_2'$ ein, so sind diese Linien die äußersten Seilpolygonseiten für die an AF_1 angreifenden äußeren Kräfte. Sie schneiden auf der Lotrechten durch C die Strecke y ab und man erhält daher

$$M = Hy.$$

Digitized by Google

Die Einflußlinie für M aber wird folgendermaßen erhalten. Solange die über den Träger wandernde Last $P = 1$ rechts von F_2 liegt, greift am Balkenstück AF_1 nur die äußere Kraft A an; sie erzeugt $M = Ax$. Liegt P links von F_1, so entsteht $M = Bx'$. Im ersten Falle wird die mit x multiplizierte A-Linie Einflußlinie für M, im zweiten die mit x' multiplizierte B-Linie, genau wie bei der Einflußlinie in Fig. 123, Seite 134, nur mit dem Unterschiede, daß der Schnittpunkt C' dieser beiden Linien jetzt zwischen F_2 und B liegt, lotrecht unter C. Innerhalb des Feldes F_1F_2 gilt die Gerade L_1L_2.

Unterscheidet sich nun die Einflußlinie für eine Größe Z von der in der Figur 147 abgebildeten lediglich dadurch, daß AJ nicht $= x$ sondern $= \xi$ ist, so wird

$$Z = \frac{\xi}{x} M = \frac{\xi}{x} Hy.$$

Die gefährlichste Zugstellung findet man am schnellsten durch Probieren; die schwersten Lasten müssen in der Nähe von F_2 stehen.

VI. Abschnitt.

Querkräfte und Momente für den Gerberschen Balken.

§ 20.

Beliebige ständige Belastung.

91. Jeder durchgehende Balken mit n Stützpunkten kann nach No. 61, Seite 114, durch $(n-2)$ Mittelgelenke statisch bestimmt gemacht werden. Einen solchen Gelenk-Balken (auch, nach dem Erfinder, *Gerber*scher Balken genannt) zeigt die Fig. 148; er besteht aus den gestützten Teilen ABG_1 und G_2CDG_3, welche wir als *Balken mit Auslegern* bezeichnen wollen*), und aus den *Koppelträgern* G_1G_2

*) Die Balkenstücke BG_1, CG_2 und DG_3 führen neben der Bezeichnung *Ausleger* auch noch den Namen *Kragarm*. Man nennt deshalb die *Gerber*schen Balken vielfach *Auslegerbalken* oder *Kragträger;* auch die amerikanische Bezeichnung *Cantilever* hat sich in Deutschland leider eingebürgert.

Digitized by Google

und G_2E. Die letzteren verhalten sich genau wie einfache Balken und können mit Hilfe der im vorigen Abschnitte entwickelten Gesetze behandelt werden. Dabei ergeben sich auch die Drücke, welche die Koppelträger auf die in je zwei Punkten gestützten Teile ausüben, und es läßt sich somit die Untersuchung des Gelenkbalkens stets auf

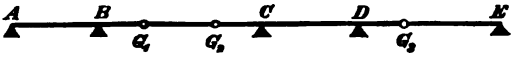


Fig. 148.

diejenige eines Balkens mit überstehenden Enden zurückführen, Fig. 149. Wir setzen nur senkrechte Lasten voraus, zeichnen mit der beliebigen Polweite H nach den bekannten Regeln das Seilpolygon $I, II, III \ldots .$ und schließen es durch eine Gerade s, welche die Punkte c und d verbindet, in denen die Auflagersenkrechten durch die nach innen verlängerten äußersten Polygonseiten (I u. VII) geschnitten werden. Eine durch den Pol O gelegte Parallele zur Schlußlinie s bestimmt die Stützenwiderstände C und D; der erstere ist im Punkte c mit den Seilkräften I und s im Gleichgewichte, der letztere im Punkte d mit den Seilkräften VII und s.

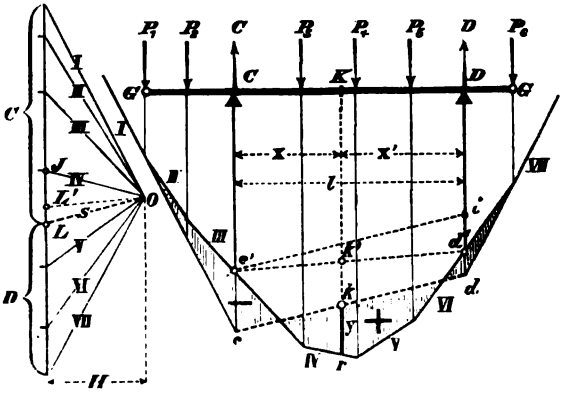


Fig. 149.

Zieht man durch irgend einen Querschnitt K eine Senkrechte und bestimmt die auf dieser Geraden vom Seilpolygon und von der Schlußlinie abgeschnittene Strecke $\overline{kr} = y$, so erhält man nach dem in No. 15 bewiesenen Satze (vergl. auch die ähnliche Untersuchung in No. 71) das Moment für den Querschnitt K

$$M = Hy.$$

Bei dem in der Fig. 149 benutzten hängenden Seilpolygon

Digitized by Google

ist M positiv oder negativ, je nachdem y unterhalb oder oberhalb der Schlußlinie cd liegt.

Die Querkraft Q für den Querschnitt K ist die Mittelkraft der links von K angreifenden äußeren Kräfte. Es ergibt sich $Q = C - P_1 - P_2 - P_3 =$ Strecke $\overline{LJ}$, und zwar bildet Q im Kräfteplane ein Dreieck mit den Seilstrahlen (s und IV), welche parallel zu den vom Schnitte K getroffenen Seilpolygonseiten sind.

92. Andere Darstellung von M und Q. Um mit den Werten M und Q eine für die Folge nützliche Umformung vorzunehmen, bringen wir in Fig. 149 die Auflagersenkrechten in c' und d' mit dem Seilpolygon zum Schnitt, ziehen die Gerade $c'd'$, welche die Senkrechte durch K in k' trifft, bezeichnen

mit y_0 die Länge der Strecke $k'r$,
„ x und x' die Abstände des Querschnittes K von den Stützen,
„ l die Stützweite

und setzen $Hy = Hy_0 - H\overline{kk'}$. Beachten wir jetzt, daß $\overline{kk'} = \overline{cc'}\frac{x'}{l} + \overline{dd'}\frac{x}{l}$ ist*), und daß ferner die Momente für die über den Stützen C und D gelegenen Balkenquerschnitte die Werte $M_C = -H\overline{cc'}$ und $M_D = -H\overline{dd'}$ annehmen, so erhalten wir

$$Hy = Hy_0 + M_C\frac{x'}{l} + M_D\frac{x}{l}.$$

Nun ist aber Hy_0 das Moment für den Querschnitt K eines *einfachen Balkens* CD, auf welchen nur die Lasten P_3, P_4, P_5 wirken; bezeichnen wir dasselbe mit M_0, so erhalten wir die wichtige Beziehung

$$(1) \quad M = M_0 + M_C\frac{x'}{l} + M_D\frac{x}{l}.$$

Die Momente M_C und M_D nennt man die *Stützenmomente* und die vom Seilpolygon $c'rd'$ und von der Schlußlinie $c'd'$ begrenzte Fläche die *einfache Momentenfläche* des Balkenstückes CD; ist letztere gegeben, und kennt man außerdem die Stützenmomente, so sind durch die Gleich. (1) die wirklichen Momente für alle zwischen C und D gelegenen Querschnitte bestimmt.

Um eine ähnliche Gleichung für Q abzuleiten, ziehen wir $\overline{c'i} \parallel \overline{cd}$ und $\overline{OL'} \parallel c'd'$ und finden dann $\overline{L'J} = Q_0 =$ Querkraft für den Quer-

*) Die Richtigkeit dieser Gleichung übersieht man am schnellsten, indem man in Fig. 149 die Gerade $c'd'$ einträgt und die Strecken bestimmt, in welche $k'k$ durch diese Gerade zerlegt wird.

Digitized by Google

schnitt K eines einfachen (mit P_3, P_4, P_5 belasteten) Balkens CD. Jetzt folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $c'id'$ und $L'OL$

$$\overline{LL'} : \overline{d'i} = H : l$$

und hieraus

$$\left(\text{wegen } L\overline{L'} = Q - Q_0 \text{ und } \overline{d'i} = \overline{c'c} - \overline{dd'} = -\frac{M_C}{H} + \frac{M_D}{H}\right)$$

$$(2) \quad Q = Q_0 + \frac{M_D - M_C}{l}.$$

Liegt nun ein beliebiger durchgehender Balken $ABCDE$ vor, Fig. 150, so kann man jeden zwischen zwei aufeinander folgenden Stützen gelegenen Teil desselben, z. B. den Teil CD, als einen Balken mit überstehenden Enden und 2 Stützpunkten (C u. D) auffassen; man hat nur nötig, die Widerstände der übrigen Stützpunkte (A, B, E) als Lasten zu betrachten, die natürlich negativ zu setzen sind, sobald sie von unten nach oben wirken. Kennt man dann die Stützenmomente

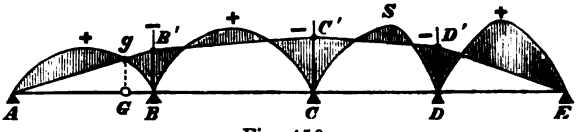


Fig. 150.

M_C und M_D, so erhält man die wirkliche Momentenfläche, indem man zu der einfachen Momentenfläche CSD ein Trapez $CC'D'D$ addiert, für welches (mit $H = 1$) $\overline{CC'} = M_C$ und $\overline{DD'} = M_D$ ist. In der Fig. 150 wurden M_C und M_D negativ angenommen; es ist dann die schraffierte Fläche zwischen den Senkrechten CC' und DD' die wirkliche Momentenfläche für den Teil CD. Wendet man das gleiche Verfahren auf die Teile AB, BC, DE an, so gelangt man zu der in der Fig. 150 dargestellten Momentenfläche für den durchgehenden Balken AE. Das Polygon $AB'C'D'E$, dessen Ordinaten $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ die Stützenmomente M_B, M_C, M_D angeben, nennt man den *Schlußlinienzug* und darf dann aussprechen:

> *Die Momentenfläche eines durchgehenden Balkens (mit oder ohne Gelenke) ist nach Aufzeichnung der einfachen Momentenpolygone bestimmt, sobald der Schlußlinienzug gegeben ist.*

Da nun, falls Gleichgewicht bestehen soll, jedem Gelenke das Moment $M = 0$ entsprechen muß, so muß jeder senkrecht über einem Gelenke G befindliche Punkt g des einfachen Momentenpolygons auch ein Punkt des Schlußlinienzuges sein, und hieraus folgt, daß es mög-

Digitized by Google

lich ist, durch eine genügende Anzahl von Gelenken jenem Linienzuge eine bestimmte Lage vorzuschreiben. Auch leuchtet ein, daß zwischen

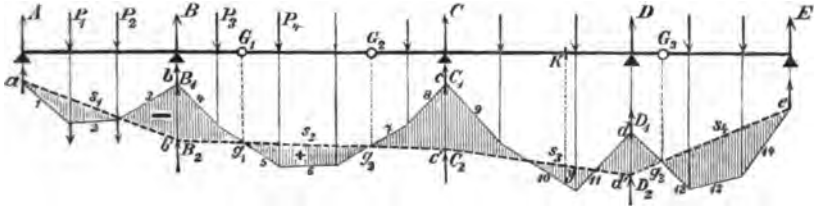


Fig. 151a.

zwei benachbarten Stützpunkten höchstens zwei Gelenke angeordnet werden dürfen, und daß die Gesamtzahl der erforderlichen Gelenke $= n - 2$ ist, sobald der Balken auf n Stützen ruht.

Mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens wurde in der Fig. 151a die Momentenfläche für einen Balken mit 5 Stützpunkten und 3 Gelenken bestimmt. Es wurden mit ein und derselben (beliebig gewählten) Polweite H die den einzelnen Öffnungen AB, BC, CD, DE entsprechenden aneinanderhängenden Seilpolygone gezeichnet, welche von den Senkrechten durch die Gelenke G_1, G_2, G_3 in den Punkten g_1, g_2, g_3 geschnitten werden. Durch g_1 und g_2 wurde die Schlußlinie s_2 gelegt, durch g_3 und e die Linie s_4, und schließlich wurden s_1 und s_3 eingetragen. Die schraffierte Fläche ist die gesuchte Momentenfläche. Für irgend einen Querschnitt K ergibt sich: $M = Hy$.

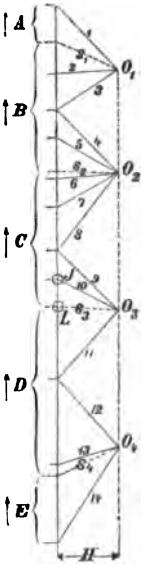


Fig. 151b.

Um die Auflagerdrücke zu finden, betrachten wir den aus sämtlichen Seilpolygonseiten 1, 2, 3 . . . . 14 und den Schlußlinien bestehenden Linienzug als geschlossenes Seilpolygon, in dessen Eckpunkten außer den Lasten P_1, P_2, ... noch senkrechte Kräfte A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E angreifen. Bestimmen wir nun die letzteren Kräfte so, daß an jedem der Eckpunkte des Seilpolygons Gleichgewicht besteht, so sind die Kräfte A und E gleich den Widerständen der Stützpunkte A und E, und weiter ist dann $B_1 + B_2 = B =$ Widerstand der Stütze B; $C_1 + C_2 = C$; $D_1 + D_2 = D$.

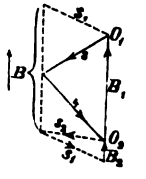


Fig. 151c.

Um A und E zu finden, haben wir nur nötig, von den Polen O_1 und O_4 Parallelen zu den Schlußlinien s_1 und s_4 zu ziehen, Fig. 151b; es

Digitized by Google

gibt dann die von 1 und s_1 auf dem Kräftezuge abgeschnittene Strecke die Größe von A an, die von s_4 und 14 abgeschnittene Strecke die Größe von E. Die Ermittelung von B_1 und B_2 wurde in Fig. 151c dargestellt; B_1 bildet mit den Seilstrahlen 3 und 4 ein Dreieck, desgleichen B_2 mit den Strahlen s_1 und s_2. Eine Vergleichung von Fig. 151c mit Fig. 151b zeigt, daß die Größe von B gleich der Strecke des Kräftezuges ist, welche die von O_1 beziehungsweise O_2 zu s_1 und s_2 gezogenen Parallelen abschneiden. In gleicher Weise werden C und D gefunden. Bei den in der Fig. 151 angewandten hängenden Seilpolygonen ist

A positiv, sobald der erste Strahl (1) oberhalb des Strahles s_1 liegt,
B positiv, sobald der Strahl s_1 den Kräftezug oberhalb des Strahles s_2 schneidet,
C positiv, sobald der Strahl s_2 den Kräftezug oberhalb des Strahles s_3 schneidet,
D positiv, sobald der Strahl s_3 den Kräftezug oberhalb des Strahles s_4 schneidet,
E positiv, sobald der Strahl s_4 oberhalb des letzten Strahles (14) liegt.

Um die Querkraft Q für irgend einen Querschnitt K zu finden, wird durch K ein senkrechter Schnitt geführt; er trifft stets zwei Seilpolygonseiten. Sodann werden im Kräfteplane die zu diesen Seiten gehörigen Seilkräfte gesucht und deren Mittelkraft bestimmt; die letztere ist $= Q$. Für den Querschnitt K in Fig. 151 findet man z. B.: $Q = + \overline{LJ}$ und zwar ist Q positiv, weil der Strahl s_3 unterhalb des Strahles 10 liegt.

§ 21.

Einflußlinien. Belastung durch ein verschiebbares System von Einzellasten.

a. Einflußlinien.

Da sich die Koppelträger ebenso verhalten wie die im Abschnitte V untersuchten einfachen Balken, so genügt es, die Einflußlinien für einen bei C und D gestützten Teil BE (Fig. 152) zu ermitteln. In den *Gelenken* B und E greifen die Drücke anliegender schwebender Teile AB und EF an. Lasten, welche auf Balkenteile wirken, die etwa links an A oder rechts an F stoßen, sind ohne Einfluß auf den Teil BE. *Wir setzen zunächst unmittelbare Belastung voraus.*

93. Stützenwiderstände C und D. Solange die Koppelträger AB und EF unbelastet sind, verhält sich der Balkenteil BE genau

Digitized by Google

wie ein auf zwei Stützen ruhender Balken mit überragenden Enden, mit dessen Betrachtung wir die Untersuchung des Gerberschen Balkens im § 20 einleiteten. Eine zwischen B und E an irgend einer Stelle aufgebrachte Last P_2 erzeugt bei C den Stützenwiderstand

$$C = P\frac{a_2}{l}.$$

Die Einflußlinie für C ist also zwischen B und E eine Gerade $B'E'$, die bei D die Ordinate 0 und bei C die Ordinate 1 besitzt. Lasten, welche rechts von B angreifen, rufen einen negativen (nach unten gerichteten) Widerstand C hervor.

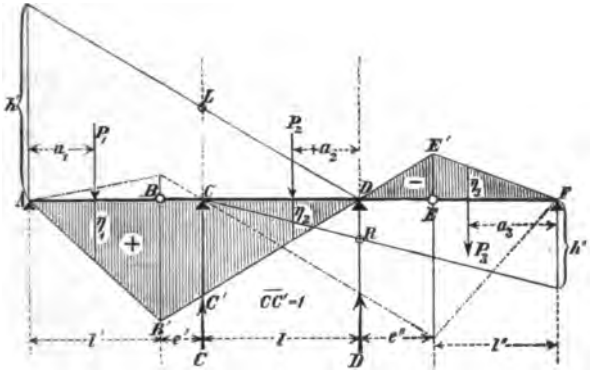


Fig. 152.

Die Ordinate BB' gibt den Einfluß einer in B angreifenden Last 1 an. Belastet man nun den Koppelträger BB' mit P_1, so übt er in B auf den Ausleger BC einen Druck von der Größe

$$B = P_1\frac{a_1}{l'}$$

aus und ruft daher bei C einen Widerstand

$$C = B \cdot \overline{B\bar{B}'} = P_1 \cdot \overline{B\bar{B}'}\frac{a_1}{l'} = P_1\eta_1$$

hervor, wo η_1 die unter P_1 gemessene Ordinate der Geraden AB' ist. Daraus folgt aber, daß die Gerade AB' ein Teil der C-Linie ist und ebenso läßt sich nachweisen, daß die Gerade $E'E$ die C-Linie für den Balkenabschnitt EF ist. Die in Fig. 152 schraffierte Fläche ist somit die gesuchte C-Fläche.

In derselben Weise wird die in Fig. 152 durch eine strichpunktierte Linie angedeutete D-Fläche gezeichnet.

Anstatt nun die Werte C_{max} und C_{min} mit Hilfe der Formel $C = \Sigma P\eta$ zu berechnen, kann man auch den folgenden Weg ein

Digitized by Google

schlagen, der an die im § 19 durchgeführte Untersuchung anknüpft. Der positive Teil der C-Fläche ist ein Dreieck, dessen Seite $B'D$ auf der Senkrechten durch A die Strecke $1\,\frac{l+e'+l'}{l}$ abschneidet. Würde sie die Strecke l' abschneiden, so würde sie mit der Einflußfläche für das Moment M_B des Querschnitts B eines einfachen Balkens AD übereinstimmen. Berechnet man nun dieses Balkenmoment nach den im § 18 angegebenen Verfahren, stellt man es beispielsweise mit Hilfe eines Seilpolygons in der Form ${}_{max}M_B = Hy$ dar, so findet man

$$ {}_{max}C = Hy\,\frac{l+e'+l'}{ll'}. $$

Ein Zahlenbeispiel zu diesem Verfahren findet der Leser im Nachtrag (3. Aufgabe) am Schluß dieses Buches.

94. Querkraft für einen Querschnitt K des Auslegers BC. Es kommen hier nur solche Lasten P_1 und P_2 in Betracht, welche links von K angreifen, Fig. 153; es entspricht ihnen die Querkraft

$$ Q = -P_1\,\frac{a_1}{l'} - P_2 \text{ (vergl. auch Fig. 152)}, $$

deren erstes Glied den in B angreifenden Druck des Koppelträgers AB vorstellt. Die Einflußlinie $AB'K'$ für Q zeigt die Fig. 153a; es ist $\overline{BB'} = \overline{KK'} = -1$.

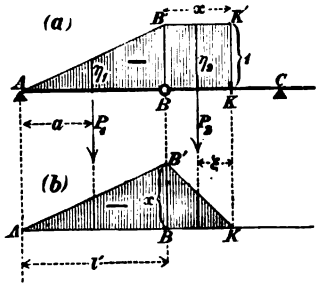


Fig. 153.

95. Moment für einen Querschnitt K des Auslegers BC. Die Lasten P_1 und P_2 (Fig. 153) erzeugen

$$ M = -P_1\,\frac{a_1}{l'}\,x - P_2\,\xi. $$

Das erste Glied dieses Ausdrucks rührt von dem in B angreifenden Drucke $P_1\,\frac{a_1}{l'}$ des Koppelträgers her. Die Einflußlinie für M ist in der Fig. 153b aufgetragen worden; es ist $\overline{BB'} = -x$. Unter der Last P_1 mißt man $\eta_1 = -x\,\frac{a_1}{l'}$ und unter der Last P_2 $\eta_2 = -\xi$.

96. Querkraft für einen Querschnitt K zwischen den Stützen C und D, Fig. 154. Greift nur eine rechts von K gelegene Last an, so entsteht für den Querschnitt K die Querkraft $Q = C$, weil links von K nur die eine äußere Kraft C wirkt. Wird der Balken hingegen ausschließlich links von K belastet, so ist $Q = -D$; denn

Digitized by Google

es greift jetzt rechts von K nur die eine äußere Kraft D an.*) Hieraus folgt, daß die Einflußlinie für Q auf der linken Seite von K mit der Einflußlinie für $(-D)$ und auf der rechten Seite von K mit der Einflußlinie für $(+C)$ übereinstimmen muß, sie wurde in der Fig. 154 a dargestellt.

97. Moment für einen Querschnitt K zwischen den Stützen. Je nachdem nur rechts oder nur links von K Lasten wirken, ist $M = Cx$ oder $M = Dx'$. Die Ordinaten der Einflußlinie für M sind also rechts von K gleich den mit x multiplizierten Ordinaten der C-Linie, und links von K gleich den mit x' multiplizierten Ordinaten der D-Linie. Hiernach ist die Linie $AB'K'E'F$ in Fig. 154 b die Einflußlinie für M.

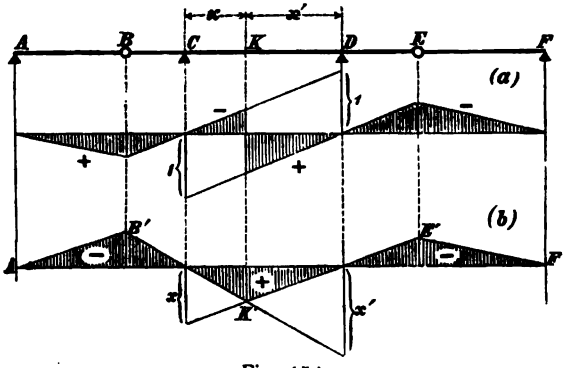


Fig. 154.

98. Mittelbare Belastung. Wird die Belastung durch Querträger übertragen, so zeichne man zuerst die Einflußlinien für unmittelbare Belastung und leite dann aus diesen die Linien für mittelbare Belastung mit Hilfe des Satzes ab, daß jede Einflußlinie zwischen zwei benachbarten Querträgern eine Gerade ist. In der Fig. 155 ist die Einflußlinie des Momentes für einen zwischen den Stützen C und D gelegenen Querschnitt K dargestellt worden. Die Querträger sind beliebig verteilt angenommen. $AB'K'E'F'$ ist die Einflußlinie bei unmittelbarer Belastung; die schraffierte Einflußfläche entspricht der mittelbaren Belastung. Das Gelenk A liege zwischen zwei Querträgern, desgleichen der Stützpunkt C und der Querschnitt K. Eine in 0 angreifende Last erzeugt für den fraglichen Querschnitt das Moment: $M = 0$ und eine in 1 wirksame Last „Eins" bringt $M = 1 \cdot \eta_1$

*) Betrachtet man Q als die Mittelkraft der rechts vom Querschnitte angreifenden äußeren Kräfte, so muß man die Richtung nach oben negativ annehmen. Vergl. Seite 124.

Digitized by Google

hervor. Zwischen den Querträgern 0 und 1 ist die Einflußlinie eine Gerade, und auf gleiche Weise erklären sich die Abstumpfungen der Ecken bei B' und K'.

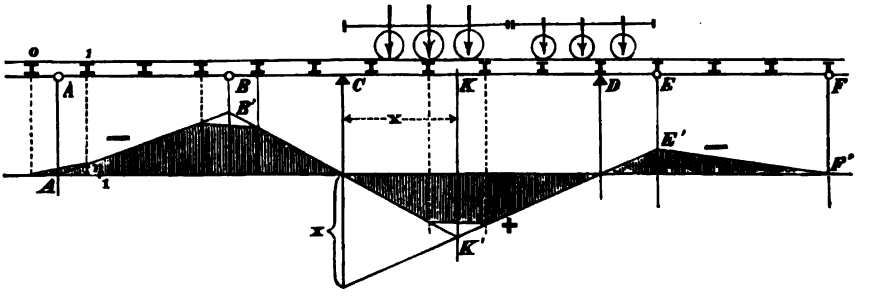


Fig. 155.

99. Anmerkung zur Berechnung von Eisenbahnbrücken. Auf welche Weise die Bestimmung der Grenzwerte gewisser Unbekannten Z mit Hilfe von Einflußlinien erfolgt, wurde bereits im § 14 auseinandergesetzt, und es möge an dieser Stelle nur noch hervorgehoben werden, daß es bei den Trägern von Eisenbahnbrücken nicht immer möglich ist, ausschließlich die positiven oder ausschließlich die negativen Einflußflächen zu belasten, ohne auf Unwahrscheinlichkeiten zu stoßen. So kann es z. B. vorkommen, daß das Moment $_{max}M$ für den Querschnitt K des Balkens in Fig. 155 bei der in dieser Figur angegebenen Stellung einer Lokomotive nebst Tender entsteht, und es leuchtet ein, daß in diesem und in ähnlichen Fällen die Länge der den Träger belastenden Fahrzeuge eine bei weitem größere Rolle spielt, als beispielsweise bei der Berechnung eines einfachen Balkens (Abschnitt IV). Eine kürzere, wenn auch leichtere Lokomotive nebst entsprechendem Tender kann bei kurzer positiver oder negativer Beitragstrecke ein größeres Maximum oder Minimum der fraglichen Unbekannten bedingen, als längere und schwerere Fahrzeuge, und es erscheint hiernach nötig, den Einfluß verschiedenartig zusammengesetzter Lastenzüge zu prüfen. Dabei wäre auch zu beachten, daß ein entlastend wirkender Tender nicht gefüllt angenommen werden darf. Will man diese umständlichen Vergleichungen vermeiden, also nur mit einem Lastenzuge rechnen und trotzdem genügend sicher gehen, so vernachlässige man bei der Ermittelung des Maximums die Belastung der negativen Beitragstrecken und bei der Bestimmung des Minimums die Belastung der positiven Strecken.*)

*) Ist eine Beitragstrecke allerdings so kurz, daß sie nicht einmal die Aufstellung von drei Lokomotivachsen ermöglicht, so liefert das oben vorgeschlagene

Digitized by Google

Entscheidet man sich für dieses Verfahren, so kann man die Querkräfte, Momente und Stützenwiderstände der Gelenkbalken auch sehr schnell auf dem folgenden Wege mit Hilfe von Seilpolygonen bestimmen. Dabei sei vorausgesetzt, daß im Falle mittelbarer Belastung über allen Stützen und Gelenken Querträger liegen; auch möge daran erinnert werden, daß die Berechnung der Momente nur für die bei Querträgern geführten Querschnitte zu erfolgen braucht. Vergl. Seite 142.

b. Ermittelung des Einflusses eines verschiebbaren Zuges von Einzellasten mit Hilfe des Seilpolygons.

Wir knüpfen an die in No. 82 gelehrte Bestimmung der Momente für die Querschnitte eines einfachen Balkens an. Es wurde dort ein Seilpolygon für einen hinreichend langen Lastenzug gezeichnet, hierauf der Balken in verschiedene Stellungen gegen den Zug gebracht und für jede Stellung die Schlußlinie eingetragen. Auf gleiche Weise werden die Momente der Koppelträger des Gelenkbalkens bestimmt, und das hierbei benutzte Seilpolygon kann dann auch für die nachstehenden Untersuchungen (No. 100 bis 103) verwendet werden. Im allgemeinen ist jede dieser Untersuchungen (wie schon in der Anmerkung auf Seite 140 hervorgehoben wurde) zweimal durchzuführen, indem zunächst zwei der drei Lokomotiven mit ihren Vorderteilen gegeneinander zu stellen sind, während zweitens alle drei Lokomotiven vorwärts fahrend angenommen werden. Die gefährlichsten Zugstellungen werden am zweckmäßigsten durch Probieren bestimmt.*)

100. Momente für einen Querschnitt K des Auslegers BC, Fig. 156. Man stellt das Balkenstück BC samt dem angrenzenden Koppelträger AB so unter den Lastenzug, daß die schwersten Lasten in der Nähe von B und eine schwere Last über B selbst steht (vergl. die Einflußlinie in Fig. 153 b).

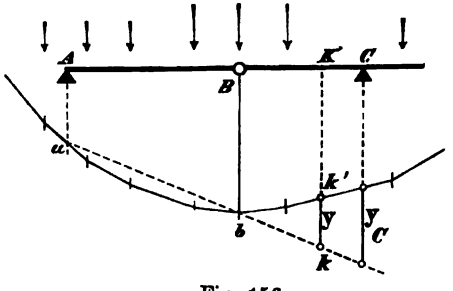


Fig. 156.

Verfahren allzu ungünstige Grenzwerte. Man nehme dann eine Lokomotive mit besonders stark belasteter Mittelachse an (zweckmäßig ohne Tender) und berücksichtige auch den Einfluß der etwa über den angrenzenden Strecken stehenden Achsen dieser Lokomotive.

*) In No. 100 bis 103 handelt es sich nur um den Einfluß der Verkehrslast. Den Zeiger p haben wir der Kürze wegen fortgelassen.

Digitized by Google

Hierauf trägt man die zu AB gehörige Schlußlinie ab ein, und verlängert sie über b hinaus bis zu ihrem Schnittpunkte k mit der Senkrechten durch K, welche letztere das Seilpolygon in k' treffen möge. Nach Messung der Strecke $\overline{kk'} = y$ erhält man $M = -Hy$. Auf gleiche Weise findet man auch das Stützenmoment $M_C = -Hy_C$. In Fig. 156 wurde vorausgesetzt, daß M_C bei derselben Zugstellung den größten Wert annimmt wie das Moment M für den Querschnitt K; es ist dies häufig, aber nicht immer der Fall. Das Stützenmoment $M_D = -Hy_D$ wird ebenso bestimmt wie M_C.

101. Querkraft für einen Querschnitt K des Auslegers BC. Man stellt den Träger so unter den Lastenzug, daß im Falle unmittelbarer Belastung der Querschnitt K in der Nähe der schwersten

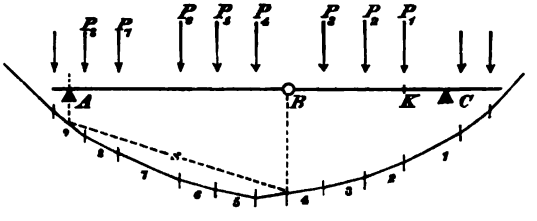


Fig. 157a.

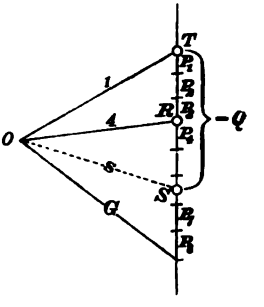


Fig. 157b.

Lasten liegt und eine schwere Last sich unmittelbar links von K befindet, Fig. 157.*) Stehen dann beispielsweise zwischen B und K drei Lasten (P_1, P_2, P_3) und auf dem Teile AB die Lasten P_4 bis P_8, so ist $Q = P_1 + P_2 + P_3 + B$, wo B den von den Lasten P_4 bis P_8 herrührenden Druck bedeutet, welchen der Koppelträger auf das Gelenk B ausübt. Trägt man nun die zu AB gehörige Schlußlinie s ein, zieht in Fig. 157b (welche den hier in Betracht kommenden Teil des Kräftepolygons darstellt) zu s die Parallele OS, so findet man $B = \overline{SR}$, wo R den Endpunkt des Seilstrahles bezeichnet, welcher die Kräfte P_3 und P_4 trennt. Hieraus folgt die Querkraft $Q = -\overline{ST}$.

102. Momente und Querkräfte für die Querschnitte zwischen den Stützen C und D (Fig. 158). Es ist nach Seite 161 für einen Querschnitt K im Abstand x von C

*) Ist die Belastung eine mittelbare, so tritt in Fig. 157 an die Stelle von K der diesem Querschnitte auf der linken Seite benachbarte Querträger.

Digitized by Google

$$M = M_0 + \frac{M_C x'}{l} + \frac{M_D x}{l} \text{ und}$$

$$Q = Q_0 + \frac{M_D - M_C}{l},$$

wo M_0 und Q_0 das Moment und die Querkraft für den Querschnitt K eines einfachen Balkens CD bedeuten; sie werden nach § 18 bestimmt. Die Stützenmomente M_C und M_D sind negativ; sie wurden in No. 100 in der Form gefunden: $M_C = -Hy_C$ und $M_D = -Hy_D$, und es folgt somit

$$_{max}M = M_0 \text{*)}$$

$$_{min}M = -H\frac{y_C x' + y_D x}{l} \text{**)}$$

$$_{max}Q = {}_{max}Q_0 + H\frac{y_C}{l}$$

$$_{min}Q = {}_{min}Q_0 - H\frac{y_D}{l}.$$

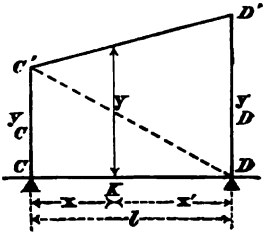


Fig. 158.

Trägt man in C und D die Ordinaten $\overline{CC'} = y_C$ und $\overline{DD'} = y_D$ auf, Fig. 158, und zieht die Gerade $C'D'$, so liefern deren Ordinaten y die Momente $_{min}M = -Hy$.

103. Stützenwiderstand C (Fig. 159). Um $_{max}C$ zu erhalten, stellt man den Balken so unter den Zug, daß die schwersten Lasten in der Nähe von B liegen, daß eine schwere Last in B selbst angreift

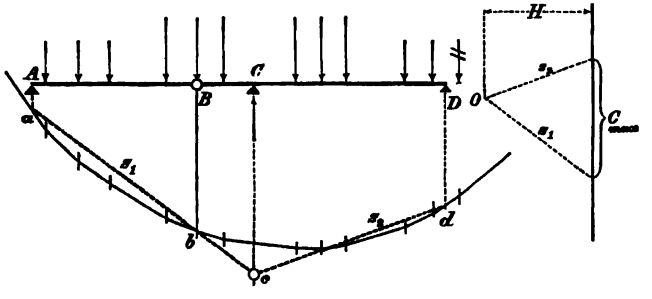


Fig. 159.

und der Träger, wenn möglich, rechts von D unbelastet bleibt. Befindet sich, wie in der Fig. 159, rechts von D die Achse eines Fahr-

*) Es wird jetzt nur der Balkenteil CD belastet angenommen.
**) Es wird nun CD unbelastet gedacht.

Digitized by Google

zeuges, dessen übrige Achsen links von D liegen, so wird sie zweckmäßig vernachlässigt. Nun trägt man die Schlußlinie s_1 des schwebenden Teiles AB ein, bringt sie in c mit der Senkrechten durch C zum Schnitt, verbindet c mit dem Punkte d, in welchem das Seilpolygon von der Senkrechten durch D getroffen wird, und zieht vom Pole aus Parallelen zu s_1 und s_2. Diese schneiden auf dem Kräftezuge den Stützenwiderstand ${}_{max}C$ ab.

Um ${}_{min}C$ zu finden, denke man die Balkenteile DE und EF (Fig. 152) so belastet, daß das größte (negative) Moment $M_D = -Hy_D$ entsteht, und vernachlässige die hierbei etwa links von D angreifenden Lasten, nehme also die Strecke AD unbelastet an. Man erhält dann aus der Bedingung $Cl = M_D$ den Wert

$$ {}_{min}C = \frac{M_D}{l} = -H\,\frac{y_D}{l}. $$

Ganz ebenso werden die Grenzwerte des Stützenwiderstandes D bestimmt.

Anmerkung. Zu den in No. 100 bis 103 ermittelten, von den verschiebbaren Einzellasten hervorgerufenen Momenten M und Kräften Q und C sind noch die durch die ständige Belastung erzeugten M, Q, C zu addieren. Die Bestimmung der letzteren soll im folgenden Paragraph gezeigt werden.

§ 22.

Gleichmäßige Belastung.

104. Momente. Werden die einzelnen Öffnungen $l_1, l_2, l_3 \ldots$ eines Gelenkbalkens gleichmäßig belastet und zwar mit $z_1, z_2, z_3 \ldots$ f. d. Längeneinheit, vergl. Fig. 160, so sind die einfachen Momentenlinien Parabeln, deren Pfeile gleich $\frac{1}{8} z_1 l_1^2, \frac{1}{8} z_2 l_2^2, \frac{1}{8} z_3 l_3^2 \ldots$ sind. Nach Aufzeichnung dieser Parabeln bestimmt man die wirklichen Momentenflächen am schnellsten nach dem in No. 92 mitgeteilten Verfahren. In der Fig. 160 ist die fragliche Aufgabe für einen Balken mit 4 Öffnungen gelöst worden: der Schlußlinienzug ist durch die den Gelenken G_1, G_2, G_3 entsprechenden Parabelpunkte g_1, g_2, g_3 bestimmt.

Aus den im § 21 gezeichneten Einflußlinien geht hervor, daß man die Grenzwerte für sämtliche Momente M durch Untersuchung von zwei Belastungsfällen erhält. In dem einen Falle werden die durch ungerade Zeiger gekennzeichneten Belastungen z gleich $p + g = q$ an-

Digitized by Google

genommen und die x mit geraden Zeiger gleich g; im zweiten Falle werden die ersteren x gleich g, die letzteren gleich q gesetzt. Für den Träger in Fig. 160 wird also zuerst angenommen

$$x_1 = x_3 = q; \quad x_2 = x_4 = g$$

und hierauf

$$x_1 = x_3 = g; \quad x_2 = x_4 = q.$$

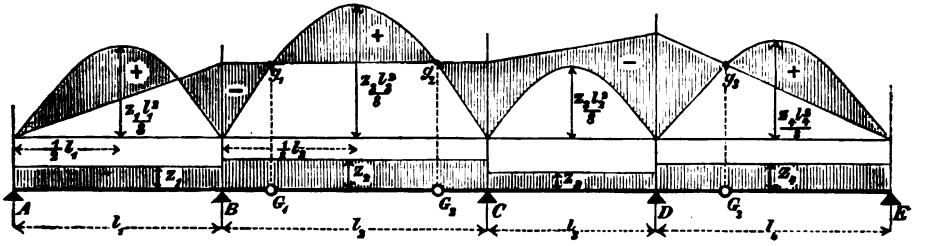


Fig. 160.

Für die Querschnitte der Teile l_1 und l_3 werden durch den ersten Belastungszustand die Momente $_{max}M$ und durch den zweiten die Momente $_{min}M$ hervorgerufen; einzelnen Querschnitten können in dem einen Falle positive, in dem anderen negative Momente entsprechen. Die Querschnitte der Koppelträger $G_1 G_2$ und $G_3 E$ werden nur durch positive, diejenigen der Ausleger $B G_1$, $G_2 C$, $D G_3$ nur durch negative Momente beansprucht, und zwar ergeben sich für alle diese Momente die kleinsten oder die größten Werte, je nachdem der erste oder der zweite Belastungszustand eintritt.

Werden die von der ständigen Belastung (g) allein hervorgerufenen Momente M_g gesucht, so setze man $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = g$.

Ist die Belastung eine mittelbar wirkende, und liegen über sämtlichen Gelenken und Stützen Querträger, so werden die in der Fig. 160 gezeichneten Parabeln durch einbeschriebene Polygone ersetzt. Die Ecken dieser Polygone liegen auf den Senkrechten durch die Querträger. Bei ganz beliebiger Verteilung der Querträger (Fig. 155) empfiehlt es sich, die Momente mit Hilfe von Einflußlinien zu ermitteln.

105. Querkraft für einen Querschnitt K eines Auslegers. Bei der Bestimmung der Querkräfte setzen wir im Falle mittelbarer Belastung voraus, daß über allen Gelenken und Stützen Querträger liegen. Die als einfache Balken aufzufassenden Koppelträger werden genau wie im § 17 (No. 76 und 78) behandelt, und es genügt daher, die Ermittelung der Querkräfte Q für einen Balkenteil mit überragenden Enden zu zeigen.

Digitized by Google

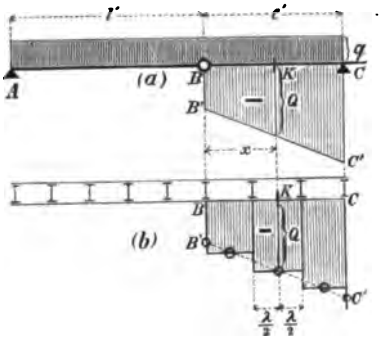


Fig. 161.

Gehört der fragliche Querschnitt K dem Ausleger BC an, so ist Q stets negativ; es wird am größten bei voller Belastung der Strecke AK; Lasten rechts von K sind ohne Einfluß auf Q. Man erhält

$$Q = -q\frac{l'}{2} - qx,$$

wobei das erste Glied den Druck des Koppelträgers AB auf das Gelenk B vorstellt. Hiernach ist Q gleich der Ordinate einer Geraden $B'C'$ (Fig. 161a), welche gegeben ist durch

$$\overline{BB'} = -q\frac{l'}{2} \text{ und } \overline{CC'} = -q\left(\frac{l'}{2} + e'\right).$$

Bei mittelbarer Belastung (Fig. 161b) ist Q für alle Querschnitte innerhalb eines Feldes λ konstant und gleich der der Feldmitte entsprechenden Ordinate der Geraden $B'C'$. Die Belastung $p\lambda$ dieses Feldes übt nämlich auf den das Feld links begrenzenden Querträger den Druck $\frac{1}{2}q\lambda$ aus, und es ist deshalb die Summe der auf das Balkenstück BK wirkenden Kräfte

$$= q\frac{l'}{2} + q\left(x - \frac{\lambda}{2}\right) + q\frac{\lambda}{2} = q\frac{l'}{2} + qx,$$

woraus dann $Q = -q\frac{l'}{2} - qx$ folgt.

Handelt es sich nur um die durch die ständige Belastung g hervorgerufene Querkraft Q, so ersetzt man in der vorstehenden Untersuchung q durch g.

106. Querkraft für einen Querschnitt K zwischen den Stützen C und D, Fig. 154. Es ist nach Gleich. (1) und (2) auf Seite 162

$$Q = Q_0 + \frac{M_D - M_C}{l}$$

und man erhält

$$(1) \quad {}_{max}Q = {}_{max}Q_0 + \frac{M_D - M_C}{l},$$

$$(2) \quad {}_{min}Q = {}_{min}Q_0 + \frac{M_D - M_C}{l}.$$

Digitized by Google

wobei $_{max}Q_0$ und $_{min}Q_0$ die nach No. 76 und 78 zu bestimmenden Grenzwerte der Querkraft Q für den Querschnitt K eines einfachen Balkens CD bedeuten. M_D und M_C sind die *negativen* Stützenmomente, ihre Grenzwerte ergeben sich bei der Durchführung der in No. 104 beschriebenen Untersuchung, und man wird natürlich in die vorstehende Gleichung (1) den kleinsten Wert von M_D und den größten Wert von M_C einführen, in die Gleichung (2) hingegen den größten Wert von M_D und den kleinsten von M_C.

Der Einfluß der ständigen Belastung g ist für sich allein

$$Q_g = Q_{0g} + \frac{M_{Dg} - M_{Cg}}{l}.$$

M_{Dg} und M_{Cg} sind die Stützenmomente infolge der ständigen Belastung und Q_{0g} die durch diese Belastung für den Querschnitt K eines einfachen Balkens hervorgebrachte Querkraft; letztere wird nach No. 74 auf Seite 130 bestimmt.

107. Stützenwiderstand C. Der Inhalt des positiven Teiles der Einflußfläche für C ist mit den in der Figur 152 angegebenen Bezeichnungen $\left(\text{und wegen } \overline{BB'} = 1\frac{l+e'}{l}\right)$

$$\mathfrak{F}_2 = \frac{1}{2}\overline{BB'} \cdot \overline{AD} = \frac{(l+e')\ (l+e'+l')}{2l}$$

und der Inhalt des negativen Teiles ist $\left(\text{wegen } \overline{EE'} = 1\frac{e''}{l}\right)$

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{1}{2}\overline{EE'} \cdot \overline{DF} = \frac{e''(e''+l'')}{2l}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{(l+e')\ (l+e'+l')}{2l} = h' \text{ und } \frac{e''(e''+l'')}{2l} = h'',$$

so erhält man

$$_{max}C = q\mathfrak{F}_2 - g\mathfrak{F}_1 = qh' - gh''$$
$$_{min}C = g\mathfrak{F}_2 - g\mathfrak{F}_1 = gh' - qh''.$$

Infolge der ständigen Belastung allein entsteht

$$C_g = g(h' - h'').$$

h' und h'' lassen sich leicht durch Zeichnung bestimmen. Macht man nämlich in Fig. 152: $\overline{CL} = \frac{1}{2}(l+e')$ und $\overline{DR} = \frac{1}{2}e''$ und zieht die Geraden DL und CR, so schneiden deren Verlängerungen auf den Senkrechten durch A und F die Strecken h' und h'' ab.

Digitized by Google

VII. Abschnitt.

Der vollwandige Bogen mit drei Gelenken.

§ 23.

Belastung durch beliebig gerichtete Kräfte.

108. Stützenwiderstände. Auf einen einfach gekrümmten Stab, welcher außer den festen Auflagergelenken A und B noch ein (in der Regel im Scheitel angeordnetes) Gelenk G besitzt, und dessen Mittellinie wir, der kürzeren Ausdrucksweise wegen, in einer lotrechten Ebene (der *Stabebene*) annehmen wollen, mögen beliebig gerichtete, in dieser Ebene liegende Lasten $P_1, P_2, P_3 \ldots$ wirken. Fig. 162. Die Mittelkraft der links von G angreifenden Lasten sei R_1, diejenige der Lasten rechts von G sei R_2; beide Kräfte können in der bekannten Weise mit Hilfe von Seilpolygonen, welche in der Fig. 162 mit den beliebigen Polen O_1 und O_2 gezeichnet wurden, bestimmt werden.

Um die in A und B angreifenden Stützenwiderstände *(Kämpferdrücke)* K_1 und K_2 zu ermitteln, nehme man zunächst an, es sei $R_2 = 0$ und bestimme die durch R_1 allein hervorgerufenen Kämpferdrücke K' und K''. Am Bogenstücke GB greift jetzt nur K'' an. Soll Gleichgewicht bestehen, so muß die Kraft K'' durch das Gelenk G gehen, da sich sonst das Bogenstück GB um G drehen würde; ferner müssen sich die drei Kräfte K', R_1 und K'' in einem und demselben Punkte schneiden. Verbindet man also den Punkt T_1, in welchem R_1 von der Geraden BG getroffen wird, mit A, so gibt AT_1 die Richtung von K' an, und man erhält nach Ziehen von $EL \parallel T_1A$ (Fig. 162b) und $JL \parallel BG$ die von R_1 herrührenden Kämpferdrücke: $K' = \overline{LF}$ und $K'' = \overline{JL}$.

Ganz ebenso findet man diejenigen Kämpferdrücke K''' und K'''', welche im Falle $R_1 = 0$ durch die rechts von G angreifenden Lasten hervorgerufen werden. Man bringt die Gerade AG in T_2 mit R_2 zum Schnitt, verbindet T_2 mit B und zieht $JS \parallel GA$ und $HS \parallel BT_2$. Man erhält: $K''' = \overline{SJ}$ und $K'''' = \overline{HS}$.

Zeichnet man jetzt das Parallelogramm $JLOS$ und zieht die Geraden OF und HO, so stellt die Strecke OF nach Größe, Richtung

Digitized by Google

und Sinn den Kämpferdruck K_1 vor und die Strecke HO den Kämpferdruck K_2; denn es ist K_1 die Mittelkraft aus den in A angreifenden Kräften K' und K''', während K_2 die Mittelkraft aus K'' und K'''' ist.

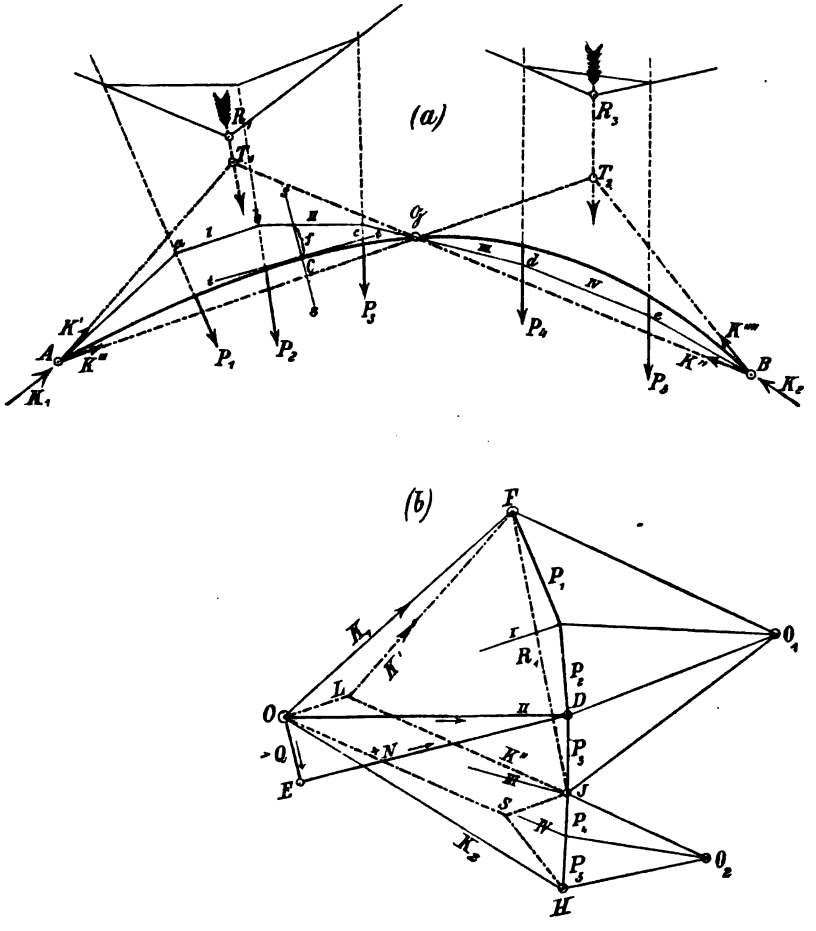


Fig. 162.

Wegen der Wichtigkeit der vorliegenden Aufgabe mögen noch zwei andere Verfahren, K_1 und K_2 zu bestimmen, mitgeteilt werden. Das eine ist in Fig. 163 dargestellt; die Form der beiden ebenen Scheiben, aus denen der Dreigelenkbogen besteht, ist gleichgültig.

Nachdem die Lasten links von G auf die bekannte Weise mit Hilfe eines Seilpolygons zur Mittelkraft CD vereinigt worden sind und

Digitized by Google

die Lasten rechts von G zur Mittelkraft DE, werden durch A und G Parallelen zu CD gezogen, welche die äußersten Seiten des ersten Seilpolygons in A' und G' schneiden, ferner durch G und B Parallelen zu DE, welche die äußersten Seiten des zweiten Seilpolygons in G'' und B' treffen. Nach Eintragung der Schlußlinien $s_1 s_2$ und nach Ziehen der Geraden: $O_1 F \parallel s_1$ und $O_2 J \parallel s_2$ erhält man in den Strecken CF und FD die zu CD parallelen, in A und G angreifenden Seitenkräfte der Mittelkraft CD. Ebenso stellen die Strecken DJ und JE die zu DE parallelen, in G bezw. B wirksamen Seitenkräfte der Mittelkraft DE vor. Man darf jetzt die beiden Scheiben, aus denen der Bogenträger besteht, durch Stäbe AG und BG ersetzt denken, auf welche nur in den Knoten Lasten wirken. In G greift die Mittelkraft FJ aus den beiden Kräften FD und DJ an. Zieht man $FO \parallel GA$ und $JO \parallel GB$, so stellen OF und JO die in den Stäben AG und GB

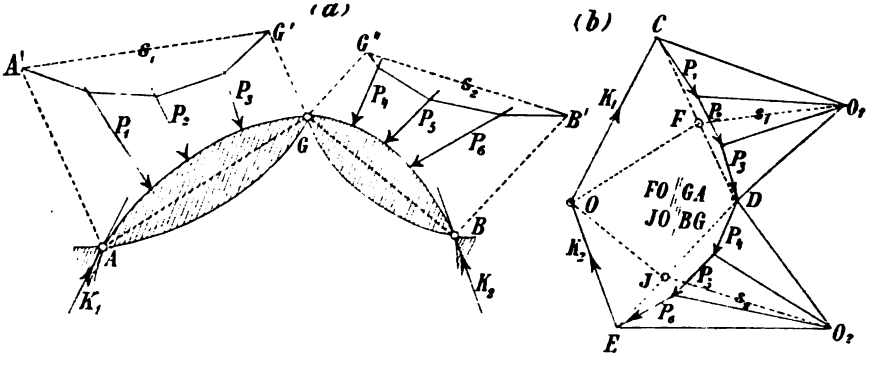


Fig. 163.

hervorgerufenen Spannkräfte (Drücke) vor. Da nun im Punkte A der Kämpferdruck K_1 mit der Spannkraft FO und der in A angreifenden Last CF im Gleichgewichte sein muß, so gibt die Strecke OC nach Größe, Richtung und Sinn den Kämpferdruck K_1 an, und ebenso findet man, daß $EO = K_2$ ist. Zeichnet man zu den Lasten $P_1, P_2, \ldots$ mit dem Pole O ein durch den Punkt A gehendes Seilpolygon, so geht dieses auch durch die Punkte G und B.

In Fig. 164 ist noch der besondere Fall paralleler Lasten dargestellt worden. Es wurde ein Seilpolygon $A'G'B'$ mit dem beliebigen Pole O' gezeichnet. Nach Eintragung der Schlußlinien s_1 und s_2 wurden gezogen: $O'E \parallel s_1$; $O'F \parallel s_2$; $EO \parallel GA$, $FO \parallel BG$.

Ein drittes Verfahren ist schließlich in Fig. 165 vorgeführt worden. R_1 und R_2 sind die Mittelkräfte der auf die Scheiben AG und GB

Digitized by Google

wirkenden Lasten; sie wurden in beliebig angenommenen Punkten T_1 und T_2 in die Seitenkräfte A und C, B und D zerlegt. Hierauf wurde

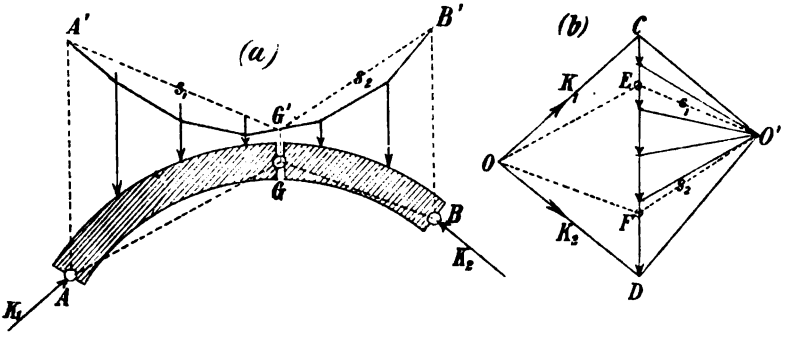


Fig. 164 a u. b.

die Mittelkraft aus C und D nach den Richtungen der Sehnen GA und GB in A' und B' zerfällt. Der Kämpferdruck K_1 muß nun den

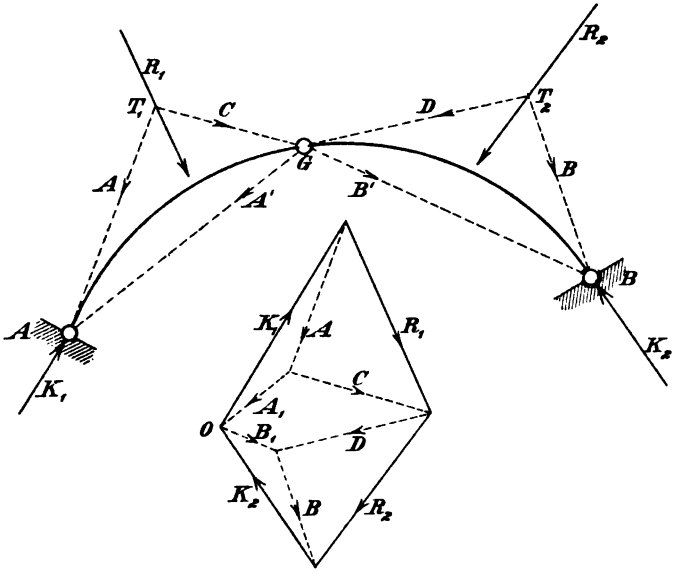


Fig. 165.

Kräften A und A' das Gleichgewicht halten und der Widerstand K_2 den Kräften B und B'.

Digitized by Google

109. Mittelkraftslinie (Drucklinie), Längskraft, Querkraft, Moment. Wählt man nach Bestimmung der Kämpferdrücke K_1 und K_2 den Eckpunkt O (Fig. 162b) des Kräftepolygons zum Pole, trägt die Strahlen I, II, ... ein und legt durch den Punkt A ein Seilpolygon, indem man der Reihe nach zieht: $\overline{Aa} \parallel \overline{OF}$; $\overline{ab} \parallel I$; $\overline{bc} \parallel II$ u. s. w., so gibt die Seilpolygonseite ab die Lage der Mittelkraft I der beiden Kräfte K_1 und P_1 an, die Polygonseite bc die Lage der Mittelkraft II von K_1, P_1 und P_2, u. s. w. Die Polygonseite cd muß durch das Gelenk G gehen und die letzte Seite durch das Gelenk B.

Das Polygon $AabcdeB$ wird die der gegebenen Belastung entsprechende *Mittelkraftslinie* genannt (auch die *Drucklinie,* falls nämlich sämtliche Seilkräfte Drücke sind*). Diese Linie gestattet, sofort die Lage der Mittelkraft der auf irgend einen Teil des Bogens wirkenden äußeren Kräfte anzugeben, während die Größe und der Sinn der gesuchten Mittelkraft aus dem Kräftepolygone entnommen werden können.

Es werde nun der Bogen an irgend einer Stelle durch einen zur Mittellinie senkrechten Schnitt ss in zwei Teile getrennt, beispielsweise an einer Stelle C zwischen P_2 und P_3 (Fig. 162 u. 166). Links von C wirken die äußeren Kräfte K_1, P_1, P_2. Ihre Mittelkraft wird durch den Strahl II dargestellt; sie wirkt im Sinne OD (Fig. 162b), fällt mit der Seilpolygonseite II zusammen und möge die Größe D haben. Wird die Kraft $\overline{OD} = D$ in zwei Seitenkräfte $\overline{ED} = N$ und $\overline{OE} = Q$ zerlegt, welche senkrecht und parallel zu ss wirken, so ist N die *Längskraft* und Q die *Querkraft* für den Querschnitt C.

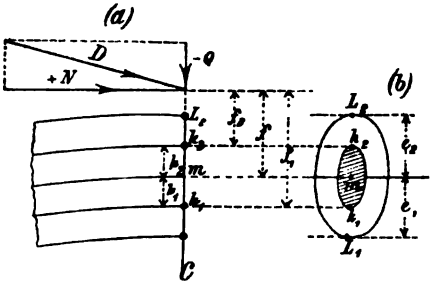


Fig. 166.

Hat N von dem Schwerpunkte m des fraglichen Querschnitts den Abstand f, so ist das *Biegungsmoment* für diesen Querschnitt

$$M = Nf.$$

Unter der Voraussetzung, daß D die Mittelkraft der am *linken* Bogenteile (AC) angreifenden äußeren Kräfte ist, setzen wir

M positiv, sobald D rechts um m dreht,

*) Vergleiche Seite 8.

Digitized by Google

Q positiv, sobald es von der hohlen nach der erhabenen Seite des Bogens wirkt,*)

N positiv, sobald es das Bestreben hat, den Teil AC an den Teil CB anzudrücken.

In Figur 162 u. 166 sind M und N an der Stelle C positiv, hingegen ist Q negativ. Schneidet die Drucklinie die Mittellinie des Bogens, so ist an der Schnittstelle $M = 0$. In Fig. 162 ist für alle Querschnitte zwischen A und G das Moment M positiv und für alle Querschnitte zwischen G und B negativ.

110. Spannungen; Einführung der Kernlinien. Durch das Moment M und die Längskraft N werden im Querschnitte des Bogens Normalspannungen σ hervorgerufen, während die Querkraft Q Schubspannungen erzeugt; letztere dürfen stets vernachlässigt werden, und für die ersteren gelten mit hinreichender Annäherung die im Abschnitte *III* für den geraden Stab abgeleiteten Formeln. Vorausgesetzt ist hierbei, daß der Querschnitt eine im Verhältnis zum Krümmungshalbmesser der Bogen-Mittellinie geringe Höhe besitzt und daß der Stab in Bezug auf die durch seine Mittellinie gelegte Ebene symmetrisch ist, Bedingungen, welche bei den im Hochbau und Brückenbau zu behandelnden ebenen Bogenträgern stets erfüllt sind.

Bedeuten nun

F und J den Inhalt und das auf die wagerechte Schwerachse des Querschnitts bezogene Trägheitsmoment des Querschnitts,

e_1 und e_2 die Abstände des untersten und des obersten Querschnittspunktes (L_1 u. L_2) von jener Schwerachse, (Fig. 166b),

so ergeben sich nach Gleich. 17 Seite 62 für die Spannungen σ_1 und σ_2 in den Punkten L_1 und L_2 die Werte

$$(1)\quad \sigma_1 = -\frac{N}{F} + \frac{Me_1}{J};\quad \sigma_2 = -\frac{N}{F} - \frac{Me_2}{J},$$

und mit den Bezeichnungen

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{J}{e_1} = W_1;\quad \dfrac{J}{e_2} = W_2, \\ \sigma_1 = -\dfrac{N}{F} + \dfrac{M}{W_1};\quad \sigma_2 = -\dfrac{N}{F} - \dfrac{M}{W_2}. \end{cases}$$

W_1 und W_2 nennt man die *Widerstandsmomente* des Querschnitts.

---

*) Ist D die Mittelkraft der *rechts* von C wirksamen äußeren Kräfte, so ist das links drehende Moment M positiv, desgleichen die nach der hohlen Seite des Bogens gerichtete Querkraft.

Digitized by Google

Meistens ist es vorteilhaft, die *Kernhalbmesser* (s. Gleich. 2 auf Seite 78)

$$(3)\quad k_2 = \frac{J}{e_1 F} = \frac{W_1}{F} \text{ und } k_1 = \frac{J}{e_2 F} = \frac{W_2}{F}$$

einzuführen. Trägt man diese Halbmesser vom Querschnittsschwerpunkte m aus auf der Senkrechten zur Bogenachse ab, indem man $\overline{mk_1} = k_1$ und $\overline{mk_2} = k_2$ macht, so erhält man die Kernpunkte k_1 und k_2, welche wir stets mit denselben Buchstaben bezeichnen wollen, wie die entsprechenden Kernhalbmesser.

Hat N von diesen Punkten die Entfernungen f_1 und f_2, so erhält man nach Gleich. 5 auf Seite 79 für die Spannungen σ_1 und σ_2 die übersichtlichen Formeln

$$(4)\quad \sigma_1 = \frac{Nf_2}{Fk_2} = \frac{M_2}{W_1} \text{ und } \sigma_2 = -\frac{Nf_1}{Fk_1} = -\frac{M_1}{W_2},$$

wobei M_2 und M_1 die auf die Kernpunkte k_2 und k_1 bezogenen Angriffsmomente bedeuten.

Die geometrischen Örter der Punkte k_2 und k_1 nennt man die *Kernlinien;* ihre Einführung bei der Ermittelung der Spannungen erleichtert die Untersuchung der gefährlichsten Belastungsweisen ganz außerordentlich, setzt aber voraus, daß die Werte $k_1 = \frac{J}{Fe_2}$ und $k_2 = \frac{J}{Fe_1}$ mit Hilfe von überschläglichen Berechnungen festgestellt worden sind. Wie dies zu geschehen hat, soll am Ende dieses Abschnitts auseinandergesetzt werden.

§ 24.

Belastung durch senkrechte Kräfte.

a. Momente und Querkräfte infolge beliebiger Belastung.

111. Momente. Die Kämpferdrücke eines durch irgend welche senkrechte Lasten beanspruchten Bogenträgers AGB (Fig. 167) seien in die senkrechten Seitenkräfte A und B und in die entgegengesetzt gleichen, nach der Richtung der Verbindungslinie AB der Kämpfergelenke wirkenden Seitenkräfte H' zerlegt; sodann sei gesetzt

$$(1)\quad H' \cos \alpha = H,$$

wobei α den Neigungswinkel der AB gegen die Wagerechte bedeutet. Man nennt H den *Horizontalschub* des Bogens.*)

*) Die Bezeichnung paßt eigentlich nur für die wagerechte Seitenkraft des vom Bogen auf das Widerlager ausgeübten Druckes.

Digitized by Google

Wird zunächst $H' = 0$ angenommen, so läßt sich das Moment für irgend einen Querschnitts-Kernpunkt k, *gleichgültig ob der oberen oder der unteren Kernlinie angehörend,* in derselben Weise bestimmen, wie das Moment für den Querschnitt eines einfachen Balkens. Man zeichnet mit dem beliebigen Pole O_1 ein Seilpolygon $I\ II\ III \ldots$, trägt die Schlußlinie ab ein, mißt auf der Senkrechten durch k die Ordinate cn des Seilpolygons und multipliziert diese mit der Polweite $\mathfrak{H}$. Das Produkt $\mathfrak{H}\overline{cn}$ ist das gesuchte Moment; wir bezeichnen es mit M_{0k}.

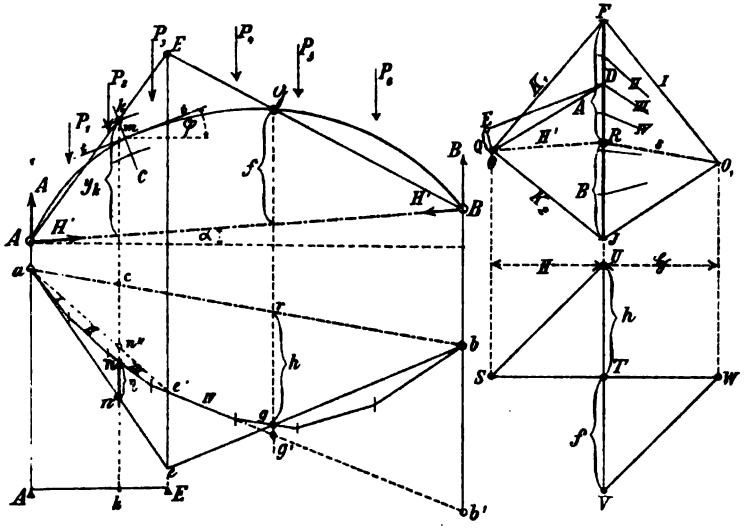


Fig. 167.

Treten nun die beiden Kräfte H' hinzu, welche in Bezug auf k am Hebelarme $y_k \cos\alpha$ angreifen, wobei y_k den in senkrechter Richtung gemessenen Abstand des Punktes k von der Geraden AB bedeutet, so entsteht das Moment

$$M_k = M_{0k} - H' y_k \cos\alpha$$

$$(2) \quad M_k = M_{0k} - H y_k.$$

Für den Punkt G erhält man mit den in die Fig. 167 eingetragenen Bezeichnungen f und h

$$M_G = M_{0G} - Hf = \mathfrak{H}h - Hf$$

und hieraus folgt, da $M_G = 0$ sein muß, die wichtige Gleichung

$$(3) \quad H = \frac{M_{0G}}{f} = \frac{\mathfrak{H}h}{f}.$$

Digitized by Google

Legt man durch den Pol O_1 zur Schlußlinie ab eine Parallele s, welche den Kräftezug FJ in R schneidet, so ist (nach No. 67 Seite 123) $\overline{RF} = A$ und $\overline{JR} = B$. Zieht man von R aus eine Parallele zu AB und bestimmt auf derselben einen Punkt O im wagerechten Abstande H von FJ, so stellt die Strecke RO die Kraft H' vor, und man erhält nun: $\overline{OF} = K_1$, $\overline{JO} = K_2$. Der Punkt O ist der Pol der durch die drei Punkte A, G, B gehenden Mittelkraftslinie. Will man die Lage des Poles O durch Zeichnung finden, so trage man auf der Verlängerung von FJ die Strecken $\overline{UT} = h$ und $\overline{TV} = f$ ab, mache $STW \perp UV$, hierauf $\overline{TW} = \mathfrak{H}$ und ziehe schließlich $US \parallel VW$. Man erhält dann $\overline{ST} = \mathfrak{H}\frac{h}{f} = H$. Hätte man $\mathfrak{H} = f$ gemacht, so würde man $H = h$ erhalten.

Nach Bestimmung des Poles O könnte man die Mittelkraftslinie zeichnen und das Moment M_k nach dem im § 23 angegebenen Verfahren ermitteln. Häufig verdient jedoch der folgende Weg den Vorzug. Man bilde aus (2) und (3) die Gleichung

$$M_k = M_{0k} - \mathfrak{H} h \frac{y_k}{f} = \mathfrak{H}\left(\overline{cn} - h\frac{y_k}{f}\right),$$

ziehe die Geraden BGE und bge, deren erstere die Gerade Ak in E trifft, bringe die Gerade bge mit der Senkrechten durch E in e zum Schnitt und verbinde a mit e durch eine Gerade, welche die Verlängerung von cn in n' schneidet. Es ist dann: $\frac{\overline{cn'}}{h} = \frac{y_k}{f}$, mithin $h\frac{y_k}{f} = \overline{cn'}$ und, wenn die Strecke $\overline{nn'} = \eta$ gesetzt wird

$$(4) \quad M_k = \mathfrak{H}(\overline{cn} - \overline{cn'}) = -\mathfrak{H}\eta.$$

Das Moment M_k ist *negativ* oder *positiv*, je nachdem n' *unterhalb* (wie in Fig. 167) oder *oberhalb* des hängenden Seilpolygons agb liegt. Für $\mathfrak{H}$ wird man natürlich einen runden Wert wählen.

An die allgemeine Bestimmung von M_k schließen wir noch eine für die Folge sehr wichtige Untersuchung an, indem wir das Moment M_k für den Fall angeben, daß alle Lasten rechts von E verschwinden. Es ist dann die Seite IV die letzte Seite des Seilpolygons; ihr Schnittpunkt b' mit der Senkrechten durch B tritt an die Stelle von b, während g zu ersetzen ist durch g', ferner e durch e' und n' durch n''. Man erhält

$$M_k = +\mathfrak{H}\overline{nn''},$$

und dieses Moment stimmt mit dem Momente für den Querschnitt k

Digitized by Google

eines einfachen Balkens AE überein, auf welchen die Lasten P_1, P_2, P_3 wirken. Die Gerade ae' ist die Schlußlinie für den Balken AE.

Bei der Anwendung der Gleichung (4) wird im Falle einer stetigen Belastung und zuweilen auch bei Einzellasten ein Fehler begangen, der allerdings unwesentlich ist und daher rührt, daß im allgemeinen nicht sämtliche links vom Kernpunkte k wirkenden Lasten auch links von dem fraglichen Bogenquerschnitte C liegen. In der Figur 168 bedeutet die krumme Linie edg die Drucklinie; o und u sind Punkte der Oberfläche des Bogens. Der durch den Bogen und durch dessen Belastung geführte Schnitt dou ist von d bis o senkrecht, von hier ab rechtwinklig zur Mittellinie des Bogens. Die in d an die Drucklinie gelegte Tangente gibt die Lage der Mittelkraft der links vom Schnitte dou auf den Bogen wirkenden äußeren Kräfte an; sie schneidet den Querschnitt im Punkte s, dessen Abstand vom Kernpunkte k (der in der Fig. 168 der unteren Kernlinie angehört) $= f_k$ sei. Man findet dann $M_k = Nf_k$, wo N die Längskraft, d. h. die zu ou senkrechte Seitenkraft von D ist; vergl. § 23. Will man zur Bestimmung von M_k die mit der Polweite $\mathfrak{H}$ zur Belastung gezeichnete Seillinie $a'rb'$ benutzen, so bringe man die Senkrechte durch d mit der Seillinie in r zum Schnitt, lege in r an die Seillinie eine Tangente, welche die Senkrechte durch k in n schneidet, um dann zu finden: $M_{0k} = \mathfrak{H}\overline{cn}$, worauf sich schließlich $M_k = \mathfrak{H}\left(\overline{cn} - h\frac{y_k}{f}\right)$ ergibt.

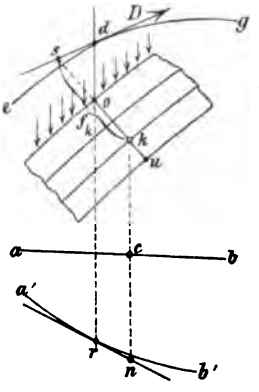


Fig. 168.

Man umgeht nun alle überflüssigen Feinheiten, wenn man durch den Bogen nur senkrechte Schnitte dou führt, und die Momente M_{k_1} und M_{k_2} für die auf diesen Schnitten liegenden Kernpunkte k_1 und k_2 mit Hilfe der Gleichung (4) bestimmt, d. h. unter u, wie in Fig. 167, den senkrecht unter dem fraglichen Kernpunkte liegenden Punkt des mit der Polweite $\mathfrak{H}$ gezeichneten Seilpolygons versteht. Aus den Momenten M_{k_1} und M_{k_2} findet man dann (genügend genau) mit Hilfe der Gleichungen (4) auf Seite 182 die Spannungen σ_2 und σ_1 für die in der Figur 169 mit I und II bezeichneten Querschnitte.

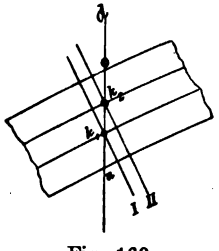


Fig. 169.

112. Querkräfte. Um die Querkraft Q für den Querschnitt C in Fig. 167 zu finden, hat man nur nötig, die durch den Strahl $\overline{OD}$

Digitized by Google

nach Größe, Richtung und Sinn dargestellte Mittelkraft der links von C wirksamen äußeren Kräfte A, P_1, P_2 in die Seitenkräfte $\overline{ED} \parallel tt$ und $\overline{OE} \perp tt$ zu zerlegen, wobei tt die im Schwerpunkte m des fraglichen Querschnitts an die Bogenmittellinie gelegte Tangente bezeichnet.

Man kann aber Q noch in einer anderen Form darstellen.

Bezeichnet man nämlich den Neigungswinkel der Tangente tt gegen die Wagerechte mit φ und projiziert im Kräfteplane die Strecken $\overline{OR} = H'$ und $\overline{RD} = A - P_1 - P_2$ auf die Richtung OE, so findet man:

$$\overline{OE} = \overline{RD}\cos\varphi - \overline{OR}\sin(\varphi - \alpha) = (A - P_1 - P_2)\cos\varphi - H'\sin(\varphi - \alpha)$$

und wenn man mit

$$Q_0 = A - P_1 - P_2$$

die Querkraft für den Querschnitt k eines durch die Kräfte P_1, P_2 .... belasteten einfachen Balkens AB bezeichnet,

$$(5) \quad Q = Q_0\cos\varphi - H'\sin(\varphi - \alpha).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung werden wir später die Einflußlinie für die Querkraft Q ermitteln.

b. Stützenwiderstände und Kämpferdrucklinie.

113. Einflußlinie für H. Fig. 170. Aus der auf Seite 183 abgeleiteten Gleichung: $H = \frac{M_{0\sigma}}{f}$ folgt, daß man die Einflußlinie für den Horizontalschub H erhält, indem man die Ordinaten der Einfluß-

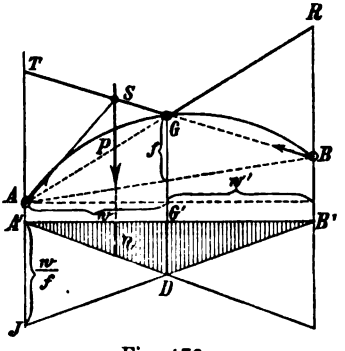


Fig. 170.

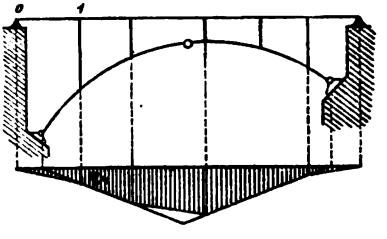


Fig. 171.

linie des Momentes $M_{0\sigma}$ für den Querschnitt G' des einfachen Balkens $A'B'$ durch f dividiert. Das Dreieck $A'DB'$, dessen Spitze D auf der Senkrechten durch G liegt, würde nach No. 77 die Einflußfläche für $M_{0\sigma}$ sein, wenn $\overline{A'J} = w$ wäre, wobei J der Schnittpunkt

Digitized by Google

der Geraden DB' mit der Senkrechten durch A ist, und w den Abstand des Gelenkes G von der linken Auflagersenkrechten bedeutet. Macht man also $\overline{A'J} = \frac{w}{f}$, so ist das Dreieck $A'DB'$ die Einflußfläche für H. Der Einzellast P entspricht: $H = P\eta$. Bei mittelbarer Belastung setzt die Fig. 170 voraus, daß über jedem der drei Gelenke A, B, G ein Querträger liegt; ist dies nicht der Fall, so entsteht die in der Fig. 171 dargestellte Einflußfläche, denn zwischen je zwei Querträgern ist die Einflußlinie eine Gerade.*) *In den folgenden Entwicklungen setzen wir voraus, daß senkrecht über den Gelenken A, B, G Querträger angeordnet sind.*

114. Die Kämpferdrucklinie. Ist nur eine Last P vorhanden, so schneiden sich die beiden Kämpferdrücke in einem auf der Richtungslinie von P gelegenen Punkte S. Bewegt sich P von A nach B, so beschreibt der Punkt S die gebrochene Linie TGR, welche aus den Verlängerungen TG und GR der Geraden BG und AG besteht.

Es folgt dies ohne weiteres aus der Untersuchung auf Seite 114; vergl. auch Fig. 104. Die Linie TGR nennt man die *Kämpferdrucklinie* des Bogens AGB; sie wurde zu gleicher Zeit von *Fränkel* und *Winkler* in die Bogentheorie eingeführt.

115. Stützenwiderstände A, B und H infolge gleichmäßiger Belastung. Auf den Bogen möge eine gleichmäßige Belastung wirken, welche $= p$ für die Längeneinheit der wagerecht gemessenen Stützweite $l = w + w'$ ist und von B aus die Strecke b bedeckt (Fig. 172). Aus der auf das Gelenk B als Drehpunkt bezogenen Momentengleichung

$$Al - pb\frac{b}{2} = 0 \text{ folgt}$$

$$(6) \qquad A = \frac{pb^2}{2l}.$$

Trägt man diesen Wert unter dem Endpunkte E der belasteten Strecke von einer Wagerechten $A'B'$ aus als Ordinate auf, so liegt deren Endpunkt auf einer Parabel $B'LD$ mit senkrechter Achse und

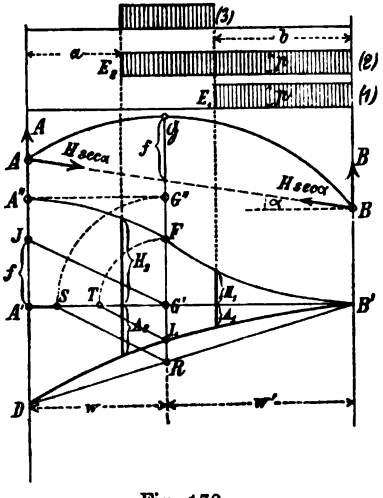


Fig. 172.

*) Vergl. die ähnlichen Untersuchungen auf Seite 135.

Digitized by Google

mit dem Scheitel B'; diese Parabel besitzt an der Stelle $b = l$ die Ordinate $\overline{A'D} = \frac{pl}{2}$ und stimmt daher mit der in der Fig. 120 dargestellten Parabel $B'D$ überein. Nun findet man für den Belastungsfall (1) in der Figur 172: $A = A_1$, für den Belastungsfall (2): $A = A_2$ und für den Fall (3): $A_3 = A_2 - A_1$. Ganz ebenso wird die Auflagerkraft B ermittelt; die B-Parabel ist das Spiegelbild der A-Parabel.

Den Stützenwiderstand H bestimmen wir mit Hilfe der Gleichung $H = \frac{M_{0G}}{f}$, bezeichnen mit w und w' die Abstände des Gelenkes G von den Auflagersenkrechten und finden im Falle $b < w'$ (Belastungsfall 1): $M_{0G} = Aw = \frac{pb^2w}{2l}$, mithin $H_1 = \frac{pb^2w}{2lf}$.

Wird H_1 von der Geraden $A'B'$ aus und unter dem Lastende E_1 als Ordinate aufgetragen, so liegt deren Endpunkt auf einer Parabel $B'F$ mit senkrechter Achse, deren Scheitel B' ist und welche für $b = w'$ die Ordinate $\overline{G'F} = \frac{pw'^2}{2l}\frac{w}{f}$ besitzt; sie wird nach demselben Verfahren gezeichnet wie die Parabel $B'D$.

Im Falle gänzlicher Belastung ($b = l$) entsteht für den Querschnitt G eines einfachen Balkens AB das Moment $M_{0G} = \frac{pww'}{2}$ (nach S. 135), ferner der Horizontalschub $H = \frac{pww'}{2f}$ und hieraus folgt, daß dem Belastungsfalle (2) entspricht

$$H_2 = \frac{pww'}{2f} - \frac{pa^2w'}{2lf},$$

wobei $\frac{pa^2w'}{2lf}$ den Wert von H für den Fall einer ausschließlichen Belastung der Strecke a bedeutet. Zieht man also die Gerade $A''G''$ parallel zur $A'B'$ und zwar im Abstande $G'G'' = \frac{pww'}{2f}$ und zeichnet hierauf die Parabel $A''F$, deren Scheitel bei A'' liegt, deren Achse senkrecht ist und welche daher ebenso gefunden wird wie die Parabeln $B'D$ und $B'F$, so ist die unter E_2 gemessene Ordinate derselben gleich dem durch den Belastungsfall (2) hervorgerufenen Horizontalschub. Dem Belastungsfalle (3) entspricht: $H_3 = H_2 - H_1$.

Um nach Aufzeichnung der A-Parabel die Punkte F und A'' der H-Parabeln schnell zu finden, bringe man die Senkrechte durch G in L und R mit der Parabel DB' und der Geraden DB' zum Schnitt,

Digitized by Google

trage $\overline{A'J} = f$ auf, ziehe $LT \parallel G'J$ und $RS \parallel G'J$ und mache $G'G'' = G'S$ ferner $G'F = G'T$. Daß die so gefundenen Strecken $G'G''$ und $G'F$ die oben vorgeschriebenen Werte haben, ist leicht nachzuweisen; man beachte daß $\overline{G'L} = \frac{pw'^2}{2l}$ und $\overline{G'R} = \frac{pw'}{2}$ ist.

116. Stützenwiderstände A, B und H infolge eines verschiebbaren Zuges von Einzellasten. Fig. 173. Die Auflagerkraft A, welche ein von B aus vorgeschobener Lastenzug hervorruft, ist nach No. 75 gleich der senkrecht unter der ersten Last P_1 gemessenen Ordinate ca eines Seilpolygons, das mit der Polweite l (Pol O) zu einem Lastenzuge gezeichnet worden ist, der von A aus bis B vorgerückt ist. Wir nannten dieses Seilpolygon das A-Polygon (vergl. Tafel I, Fig. 126).

Um H zu finden, bezeichnen wir die Abstände der Lasten $P_1, P_2 \ldots$. vom Gelenke G mit $c_1, c_2 \ldots$, bestimmen zunächst $M_{0G} = Aw - \Sigma Pc$, wobei sich das Zeichen Σ nur auf die Lasten links von G bezieht, und erhalten hieraus

$$H = \frac{M_{0G}}{f} = \frac{Aw}{f} - \frac{\Sigma Pc}{f}.$$

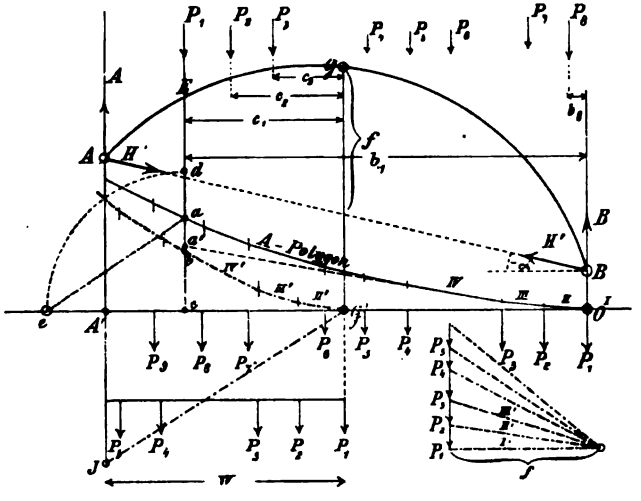


Fig. 173.

Zeichnet man nun für einen von A aus bis zur Senkrechten durch G vorgeschobenen Lastenzug ein (in der Fig. 173 strichpunktiertes) Seilpolygon I', $II' \ldots$, dessen erste Ecke mit G' zusammenfällt, und wählt die Polweite $= f$, so ist die senkrecht unter E gemessene Ordinate dieses

Digitized by Google

Polygons: $\overline{cb} = \frac{\Sigma Pc}{f}$ (vergl. Seite 20). Macht man also auf der linken Auflager-Senkrechten: $A'J = f$, zieht die Gerade $G'J$ und hierauf $ae \parallel G'J$, so erhält man $\overline{ce} = A\frac{w}{f}$ und, nach Auftragen von $\overline{cd} = \overline{ce}$, den Horizontalschub: $H = \overline{db}$.

Solange die erste Last des von B aus vorgeschobenen Zuges rechts von G liegt, ist natürlich $H = A\frac{w}{f}$.

Es kann auch vorkommen, daß die Kräfte A und H für einen von B aus vorgeschobenen Lastenzug ermittelt werden müssen, der kürzer ist als der bei Aufzeichnung des Seilpolygons angenommene, von A bis B reichende. Ständen beispielsweise in Fig. 173 nur die Lasten P_1 bis P_3 auf dem Träger, so wäre die Seite IV' die letzte Seite des A-Polygons, ihr Schnittpunkt a' mit der Senkrechten durch E müßte an die Stelle von a treten, und man würde erhalten

$$A = \overline{ca'}; \quad H = A\frac{w}{f} - \overline{cb} = \overline{ca'}\frac{w}{f} - \overline{cb}.$$

Der Wert H wird wie vorhin durch Zeichnung bestimmt.

Endlich kann es auch nötig werden, den Punkt b ebenfalls durch einen tiefer gelegenen Punkt b' zu ersetzen, sobald nämlich der zwischen E und G stehende Lastenzug kürzer ist als der in entgegengesetzter Richtung zwischen E und G' gezeichnete. Ständen z. B. nur P_1 und P_2 auf dem Träger, so müßte an die Stelle von b der Schnittpunkt b' der Polygonseite III' mit der Senkrechten cb treten; a' müßte dann auf der verlängerten Seite III angenommen werden.

Werden die am rechten Auflager durch einen von A nach B vorrückenden Lastenzug hervorgerufenen Widerstände B und H gesucht, so betrachte man das Spiegelbild des Trägers und wiederhole die soeben beschriebenen Konstruktionen. Das B-Polygon ist das Spiegelbild des A-Polygons.

c. Grenzwerte der Momente M_k.

117. Einflußlinie für M_k. Irgend einem Kernpunkte k entspricht nach Seite 183 (Gleich. 2)

$$M_k = M_{0k} - Hy_k,$$

wobei M_{0k} das Moment für den senkrecht unter k gelegenen Querschnitt C' eines einfachen Balkens AB' (Fig. 174) bedeutet. Die Einflußlinie für M_k ist *bei unmittelbarer Belastung* nach No. 77, Seite 134, ein Dreieck ACB', dessen Spitze C auf der Senkrechten durch C' liegt, und dessen Seite $B'C$ auf der linken Auflagersenkrechten die Strecke

Digitized by Google

$AJ = x$ abschneidet. Subtrahiert man nun von dieser M_{0k}-Fläche die Hy_k-Fläche, so erhält man die M_k-Fläche. Die Hy_k-Fläche ist ebenso wie die in No. 113 dargestellte H-Fläche ein Dreieck (ADB'), dessen Spitze (D) auf der Senkrechten durch G liegt. Die Seite AD schneidet die Gerade JB' auf der Senkrechten durch den Schnittpunkt E der Geraden BG und Ak; denn eine durch E gehende Einzellast erzeugt einen in die Gerade AkE fallenden Kämpferdruck und verursacht daher das Moment $M_k = 0$. Hieraus folgt, daß bei

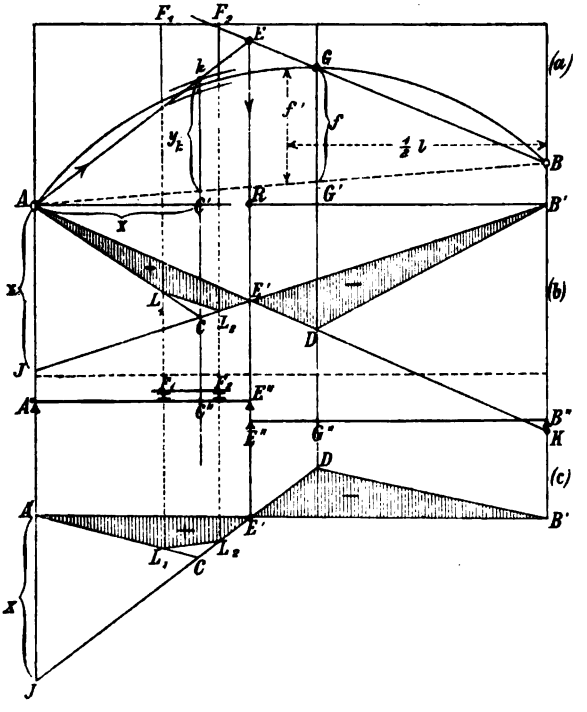


Fig. 174.

unmittelbarer Belastung das Dreieck ACE' die positive und das Dreieck $E'DB'$ die negative Einflußfläche für M_k ist. Man kann diese Figuren noch etwas zweckmäßiger anordnen, indem man nach Auftragen von $\overline{A'J} = x$ (Fig. 174c) die Gerade JD durch den senkrecht unter E gelegenen Punkt E' der Wagerechten $A'B'$ zieht, hierauf D mit B' verbindet und die Gerade $A'C$ einträgt.

Wird die Belastung durch Querträger übertragen und liegt k zwischen zwei Knotenpunkten F_1 und F_2, so ist noch die Gerade L_1L_2

Digitized by Google

zu ziehen, deren Endpunkte in der Fig. 174b auf AC und JB' und in der Fig. 174c auf $A'C$ und JD liegen. Es entstehen die in jenen Figuren schraffierten Einflußflächen. Fig. 175 setzt voraus, daß k und E in demselben Felde liegen, ein Fall, der in der Regel nur in dem Felde neben dem Gelenke G vorkommt. Es fällt dann L_2 mit D zusammen: die Senkrechte durch E ist nicht mehr Belastungsscheide.

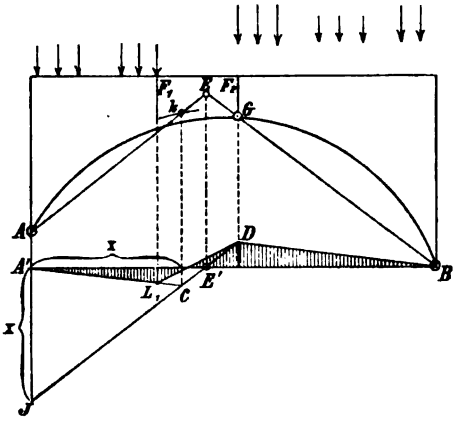


Fig. 175.

118. Grenzwerte von M_k infolge gleichförmiger ständiger und veränderlicher Belastung. Es sei zunächst mittelbare Belastung vorausgesetzt und der ganze Träger gleichmäßig mit q f. d. Längeneinheit belastet gedacht, Fig. 176. Die Knotenlasten sind, wenn die Felder die Längen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ haben: $Q_1 = \frac{1}{2} q\,(\lambda_1 + \lambda_2)$; $Q_2 = \frac{1}{2} q\,(\lambda_2 + \lambda_3)$; $\ldots$; sie werden bei ungleichen Feldlängen zweckmäßig durch Zeichnung bestimmt. Dazu wird, von einer beliebigen Wagerechten $A'B'$ aus, auf der Senkrechten durch A die Last $\overline{A'C} = ql$ aufgetragen, die Gerade CB' gezogen und durch den Mittelpunkt jedes Feldes eine Parallele zur CB' gelegt. Diese Parallelen schneiden auf der Geraden $A'C$ die gesuchten

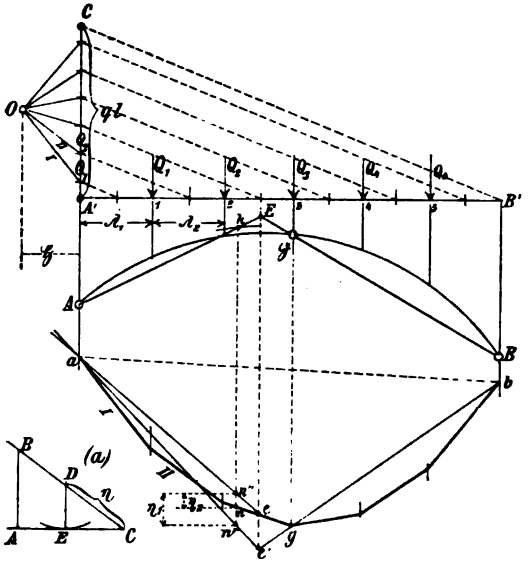


Fig. 176.

Digitized by Google

Kräfte Q_1, Q_2 .... ab, für welche nun mit dem beliebigen Pole O (Polweite $\mathfrak{H}$) ein Seilpolygon agb gezeichnet wird, mit dessen Hilfe die Grenzwerte von M_k ermittelt werden können. Dazu bestimme man die Belastungsscheide E, bringe die Senkrechte durch E in e und e' mit dem Seilpolygon und der Geraden bg zum Schnitt und ziehe die Geraden ae und ae', welche die Senkrechte durch k in n'' und n' schneiden mögen. Setzt man $\overline{n'n''} = \eta_1$ und $\overline{nn''} = \eta_2$, wo n den senkrecht unter k gelegenen Punkt des Seilpolygons bedeutet, so erhält man nach No. 111 den Einfluß der links von E angreifenden Lasten (Q_1 u. Q_2) auf das gesuchte Moment

$$M_k = \mathfrak{H}\eta_2$$ und den Einfluß sämtlicher Lasten:

$$M_k = -\mathfrak{H}\overline{nn'} = -\mathfrak{H}(\eta_1 - \eta_2).$$

Hieraus folgt, daß die rechts von E gelegenen Lasten (Q_3 bis Q_5) das Moment $M_k = -\mathfrak{H}(\eta_1 - \eta_2) - \mathfrak{H}\eta_2 = -\mathfrak{H}\eta_1$ hervorbringen. Will man nun ${}_{max}M_k$ haben, so belaste man jeden Knotenpunkt m links von E mit $Q_m = \frac{1}{2}q(\lambda_m + \lambda_{m+1})$ (wo m eine beliebige Ordnungsziffer), hingegen jeden Knotenpunkt rechts von E nur mit $G_m = \frac{1}{2}g(\lambda_m + \lambda_{m+1})$, multipliziere also beispielsweise in dem in Fig. 176 dargestellten Falle die Lasten Q_3, Q_4, Q_5 mit $\frac{g}{q}$. Man erhält dann

$${}_{max}M_k = \mathfrak{H}\left(\eta_2 - \frac{g}{q}\eta_1\right)$$

und hierauf, indem man links von E Lasten G und rechts von E Lasten Q annimmt

$${}_{min}M_k = \mathfrak{H}\left(\frac{g}{q}\eta_2 - \eta_1\right).$$

Die Multiplikation mit $\frac{g}{q}$ erfolgt am zweckmäßigsten mit Hilfe eines Winkels, dessen Sinus gleich $\frac{g}{q}$ ist. Vergl. Fig. 176a, in der ABC ein rechtwinkliges Dreieck ist, in welchem sich verhält: $\overline{AB} : \overline{BC} = g : q$. Macht man $\overline{DC} = \eta$, so ist das Lot DE von D auf AC gleich $\frac{g}{q}\eta$. Man hat übrigens nicht nötig, das Lot zu zeichnen, kann vielmehr DE messen, indem man mit dem Zirkel um D einen kleinen Kreisbogen beschreibt, welcher AC berührt.

Die mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens erhaltenen Grenzwerte von M_k sind etwas größer als die in Wirklichkeit auftretenden. Man vergleiche hierüber die auf Seite 118 an den Belastungsfall in Fig. 109 geknüpften Bemerkungen. Das Verfahren ist auch dann brauchbar, wenn die Gelenke AGB (wie in der Fig. 171) nicht senkrecht unter Querträgern liegen.

Digitized by Google

Bei *unmittelbarer Belastung* tritt in der Fig. 176 an die Stelle des Seilpolygons die einbeschriebene Seillinie, oder, wenn die Polweite $\mathfrak{H} = 1$ gewählt wird, eine über der Stützweite l errichtete Parabel, deren Pfeil $= \frac{q l^2}{8}$ ist. Vergl. Seite 135 und Fig. 124. Man erhält dann die genauen Grenzwerte ${}_{max}M_k$, ${}_{min}M_k$. Beschränkt man sich nun darauf, die Momente für die in den Senkrechten durch die Querträger gelegenen Kernpunkte k zu berechnen, so darf man stets unmittelbare Belastung annehmen, weil für diese Punkte die Momente für mittelbare und unmittelbare Belastung übereinstimmen. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, daß über den Gelenken A, B, G Querträger liegen. Ist in diesem Falle die Mittellinie des Bogens eine Parabel mit senkrechter Achse, so kann man die Aufzeichnung der Momentenparabel sparen. In der Fig. 177 ist ein in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte symmetrischer Parabelbogen vorausgesetzt worden. Um die Grenzwerte des Momentes M_{k_2} für einen oberen Kernpunkt k_2 zu ermitteln, ziehe man die Gerade Ak_2E_2, bestimme auf der Bogenmittellinie die Punkte e_2 und m_2 senkrecht unter E_2 und k_2 und verbinde A mit e_2 durch eine Gerade, welche die Senkrechte durch k_2 in n_2 schneidet. Nach Messung von $\eta_1 = k_2 n_2$ und $\eta_2 = \overline{m_2 n_2}$ findet man

$$ {}_{max}M_{k_2} = \frac{q l^2}{8 f}\left(\eta_2 - \frac{g}{q}\eta_1\right) = \frac{l^2}{8 f}(q\eta_2 - g\eta_1) \text{ und}$$

$$ {}_{min}M_{k_2} = \frac{l^2}{8 f}(g\eta_2 - q\eta_1). $$

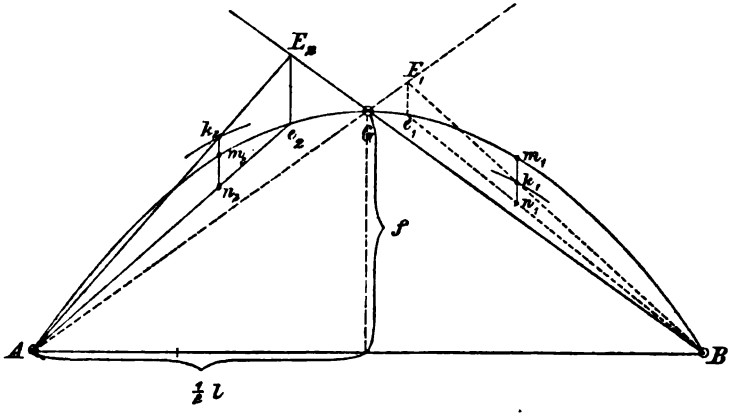


Fig. 177.

Die Multiplikation mit $\frac{q l^2}{8 f}$ war nötig, weil die Parabel mit dem Pfeile $\frac{1}{8} q l^2$ durch eine Parabel mit dem Pfeile f ersetzt wurde.

Digitized by Google

Ganz ebenso erhält man M_{k_1} für einen Punkt k_1 der unteren Kernlinie. Die betreffenden Hilfslinien wurden in der Fig. 177 gestrichelt und der Punkt k_1 wurde rechts von G angenommen. Man findet nach Messung von $\eta_1 = \overline{k_1 n_1}$ und $\eta_2 = \overline{m_1 n_1}$

$$_{max}M_{k_1} = \frac{l^2}{8f}(q\eta_2 - g\eta_1) \text{ und } _{min}M_{k_1} = \frac{l^2}{8f}(g\eta_2 - q\eta_1).$$

Liegen die Kämpfergelenke A und B ungleich hoch und das Gelenk G nicht in der Mitte, so ist in den vorstehenden Gleichungen die Pfeilhöhe f durch die bei $x = \frac{1}{2}l$ gemessene Parabelordinate f' (Fig. 174) zu ersetzen.

119. Grenzwerte von M_k infolge eines verschiebbaren Zuges von Einzellasten. 1. *Bestimmung von* $_{max}M_k$. Liegen die Punkte k und E nicht in demselben Felde, so stimmt die positive M_k-Fläche überein mit der Einflußfläche für das Moment in Bezug auf den senkrecht unter k gelegenen Querschnitt C'' eines einfachen Balkens $A''E''$ (Fig. 174b). Wird nicht nur die positive Beitragstrecke belastet, sondern wirken auch rechts von E *(aber links von G)* Lasten, so ist der stellvertretende Balken $A''E''$ ein solcher mit überragendem Ende. Dieser allgemeinere Fall wurde in der Figur 178 vorausgesetzt; er kann vorkommen, sobald E'' in größerer Entfernung von C'' liegt Um nun $_{max}M_k$ zu finden, zeichne man für einen hinreichend langen Lastenzug mit der beliebigen Polweite $\mathfrak{H}$ ein Seilpolygon und setze hierauf den stellvertretenden Balken $A''E''$ so unter den Zug, daß eine schwere Last über einem der beiden Querträger F_1 oder F_2 liegt. Die Lasten rechts von E'' denke man beseitigt, soweit dies tunlich ist, ohne unmögliche Belastungsfälle zu erhalten. Bei der Zugstellung in Fig. 178 liegt eine Last rechts von E''. Die äußerste Seilpolygonseite I wurde mit der Senkrechten durch E'' in e zum Schnitte gebracht, und hierauf wurden die Schlußlinien ae (entsprechend $A''E''$) und f_1f_2, entsprechend F_1F_2 eingetragen; sie schneiden auf der Senkrechten durch C'' die Strecke η_2 ab, und es ergibt sich nun

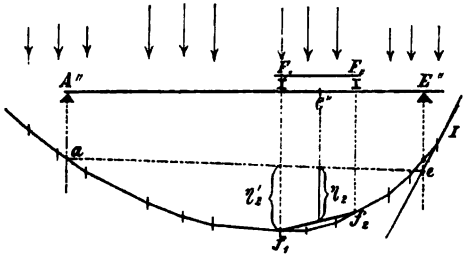


Fig. 178.

$$_{max}M_k = +\mathfrak{H}\eta_2.^*)$$

2. Um $_{min}M_k$ zu ermitteln, beachte man, daß die negative Einfluß-

*) Wir verweisen auch auf das im § 19 entwickelte allgemeine Verfahren.

Digitized by Google

fläche in Fig. 174b im Falle: $\overline{B'K} = \overline{B'G'}$ mit der Einflußfläche für das Moment in Bezug auf den Querschnitt G'' eines einfachen Balkens $E''B''$ übereinstimmen würde. Setzen wir also zunächst $B'K = B'G'$ voraus und nehmen außerdem an, daß auch links von E *(aber rechts von F_2)* Lasten liegen, in welchem Falle der stellvertretende Balken ein solcher mit überragendem Ende ist, so ergibt sich $_{min}M_k$ wie folgt. Der Balken $E''B''$ wird so unter den Lastenzug gestellt, daß eine schwere Last über G'' steht, Fig. 179. Die Lasten links von E'' werden soweit als möglich beseitigt gedacht. Hierauf wird die äußerste Seilpolygonseite I mit der Senkrechten durch E'' in e zum Schnitt gebracht, die Schlußlinie eb eingetragen, unter G'' die Ordinate η' gemessen und $M_k = \mathfrak{H}\eta'$ erhalten. Nun ist aber in Fig. 174b nicht $\overline{B'K} = \overline{B'G'}$, und es muß daher das Moment $\mathfrak{H}\eta'$ noch mit $\frac{B'K}{B'G'} = \frac{A''C'' \cdot E''B''}{A''E'' \cdot G''B''}$ $\left(\text{wegen } B'K = AJ\,\frac{E''B''}{A''E''} \text{ und } AJ = A''C''\right)$ multipliziert werden. Zieht man nun die Gerade bg bis zum Schnittpunkte e'' mit der Senkrechten durch E'', verlängert be bis a (senkrecht unter A''), verbindet

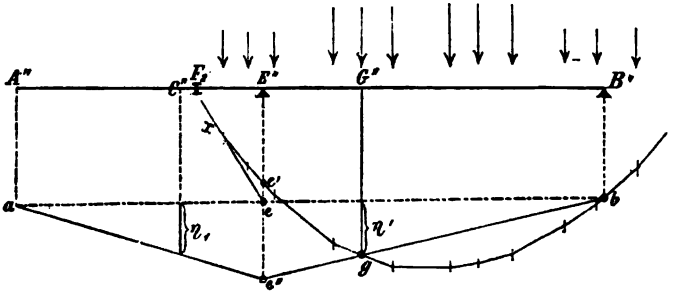


Fig. 179.

e'' mit a und mißt unter C'' die in der Fig. 179 mit η_1 bezeichnete Ordinate, so ist $\eta_1 = \overline{ee''}\,\frac{A''C''}{A''E''} = \eta'\,\frac{E''B''}{G''B''} \cdot \frac{A''C''}{A''E''}$, und man erhält mithin

$$_{min}M_k = -\mathfrak{H}\eta_1.$$

Die gefährlichsten Zugstellungen werden am zweckmäßigsten durch Probieren ermittelt.

Will man bei der Laststellung in Fig. 178 die rechts von E'' wirkende Last vernachlässigen und in Fig. 179 die links von E'' liegen-

Digitized by Google

den (was nach der Ansicht des Verfassers nur empfehlenswert ist*), so treten an die Stelle der Punkte e die Punkte e', in denen die Senkrechten durch E'' das Seilpolygon schneiden, und es ergeben sich etwas zu große Momente.

Bei nicht zu großen Stützweiten wird das Moment ${}_{max}M_k$ meistens durch einen von A aus vorrückenden, von vorwärts gehenden Lokomotiven geführten Güterzug, dessen erste oder zweite Achse über F_1 steht, hervorgerufen, und das Moment ${}_{min}M_k$ durch einen von B aus vorrückenden Zug, dessen erste oder zweite Achse über G steht. Liegen k und E in demselben Felde, so darf man immer die erste Achse über F_1 beziehungsweise G stellen (Fig. 175); es bleiben dann die eben beschriebenen Verfahren brauchbar.

In der Regel genügt es, die Momente für die senkrecht unter Querträgern liegenden Kernpunkte zu bestimmen. Man spart dann bei der Bestimmung von ${}_{max}M_k$ die Einzeichnung der Schlußlinie $f_1 f_2$. Fiele z. B. in der Fig. 178 der fragliche Kernpunkt mit der Senkrechten durch F_1 zusammen, so würde man erhalten: ${}_{max}M_k = \mathfrak{H}\eta'_2$.

Zu den durch den Lastenzug erzeugten Momenten M_k sind noch die von der ständigen Belastung herrührenden Momente M_{k_g} zu addieren. Die letzteren werden am zweckmäßigsten mittels des in No. 118 beschriebenen und in der Fig. 176 dargestellten Verfahrens bestimmt. An Stelle der Lasten Q_1, Q_2 . . . . treten die Lasten G_1, G_2 . . . . Liegt dann (wie in Fig. 176) der Punkt n' unterhalb n, so findet man $M_{k_g} = -\mathfrak{H}\overline{nn'}$; liegt n' oberhalb n, so wird: $M_{k_g} = +\mathfrak{H}\overline{nn'}$.

d. Grenzwerte der Querkräfte Q.

120. Einflußlinie für Q. Wir knüpfen an die auf Seite 186 abgeleitete Gleichung

(1) $Q = Q_0 \cos\varphi - H' \sin(\varphi - \alpha) = Q_0 \cos\varphi - H \sec\alpha \sin(\varphi - \alpha)$

an, in welcher Q_0 die Querkraft für den Fall $H = 0$, d. h. die Querkraft für den Querschnitt C eines einfachen Balkens AB ist. Trägt man nun, von einer Wagerechten $A'B'$ aus, auf den Auflagersenkrechten die Strecken $\overline{A'J} = \overline{B'J'} = 1 \cdot \cos\varphi$ auf (Fig. 180b), zieht die Geraden $A'J'$ und $B'J$ und verbindet die auf diesen Geraden senkrecht unter den Querträgern F_1 und F_2 gelegenen Punkte L_1 und L_2, so ist die gebrochene Linie $A'L_1L_2B'$ (nach No. 75 Seite 131) die Einflußlinie für $Q_0 \cos\varphi$. Die Einflußlinie für das zweite, von $Q_0 \cos\varphi$ in Abzug zu bringende Glied des oben für Q angegebenen Ausdruckes besteht, ebenso wie diejenige für H, aus zwei Geraden $A'D$ und DB'; sie ist durch die Bedingung gegeben, daß sich die Geraden $A'D$ und

*) Vergl. die Auseinandersetzungen in No. 99, Seite 168.

Digitized by Google

$B'J$ auf der Senkrechten durch den Punkt E, in welchem die Kämpferdrucklinie BGE von einer durch A zur Tangente tt gezogenen Parallelen getroffen wird, schneiden müssen. Denn eine durch E gehende Einzellast erzeugt einen in die Gerade AE fallenden, also senkrecht zum fraglichen Querschnitte gerichteten Kämpferdruck und bringt mithin für den Querschnitt C die Querkraft $Q = 0$ hervor. Die Senkrechte durch E ist deshalb eine Belastungsscheide und der Punkt E' ein Nullpunkt der Einflußlinie. Hieraus folgt aber, daß die in der Fig. 180b schraffierte Fläche die Einflußfläche für Q ist. Eine etwas bequemere Anordnung dieser Fläche zeigt die Fig. 180c; in dieser ist $AL_1 \parallel JE$.

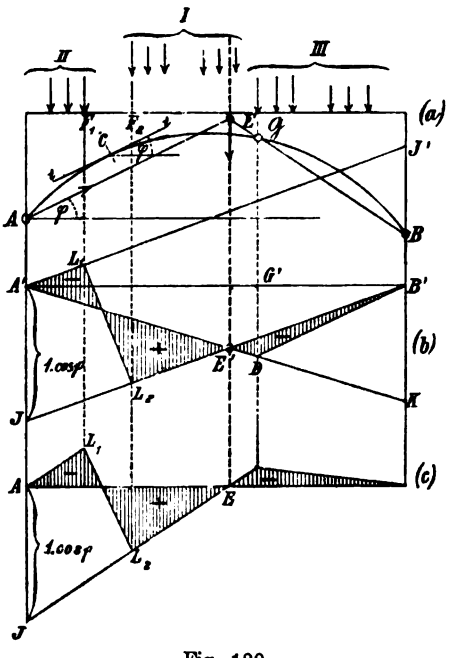


Fig. 180.

Liegt E unterhalb G, so entsteht die in der Fig. 181 dargestellte Einflußfläche, welche nur einen Nullpunkt besitzt.

Die Querkraft Q ist für die Querschnitte eines und desselben Feldes nahezu konstant; sie ist nur deshalb veränderlich, weil der Winkel φ sich ändert. Man begeht nur einen sehr geringen Fehler, wenn man Q für alle Querschnitte eines Feldes gleich groß annimmt und unter φ den Neigungswinkel der die Knotenpunkte verbindenden Bogensehne versteht. Vergl. Fig. 182 u. 183.

Mit Hilfe der Einflußflächen kann man die Grenzwerte ${}_{max}Q$ und ${}_{min}Q$ mittels des im § 14 angegebenen allgemeinen Verfahrens berechnen; man kann sich aber auch der folgenden Verfahren bedienen.

121. Querkräfte ${}_{max}Q$ und ${}_{min}Q$ infolge von Einzellasten. Liegt der in Figur 181 dargestellte Fall (E rechts von G) vor, so schiebe man, um ${}_{max}Q$ zu erhalten, den Lastenzug von B aus bis zum Querträger F_2 vor, (Zugstellung I) und ermittele nach No. 116 die am Gelenke A angreifenden Kräfte A und H. Es wirkt dann links vom

Digitized by Google

fraglichen Felde nur eine äußere Kraft, nämlich der Kämpferdruck K_1; er ist bestimmt durch die Seitenkräfte A und H', von denen die letztere parallel zu AB ist und die wagerechte Projektion H besitzt, Fig. 181 b. Die Zerlegung von K_1 nach der Richtung tt und nach einer Richtung senkrecht hierzu liefert $_{max}Q$.

Wird $_{min}Q$ gesucht, so ist der Lastenzug von A aus bis F_1 vorzuschieben. Nach Bestimmung der in B angreifenden Auflagerkräfte B und H ermittelt man den rechtsseitigen Kämpferdruck K_2 und zerlegt diesen in die Längskraft N und die Querkraft Q_{min}. Die letztere ist negativ; man beachte nämlich, daß K_2 die Mittelkraft der *rechts* vom Querschnitte C wirksamen äußeren Kräfte ist*).

Liegt Punkt E links von G (Fig. 180), so stellt man, um $_{max}Q$ zu erhalten, einen Lastenzug (I) auf, dessen erste Last über F_2 ruht, und der womöglich nicht länger ist als die positive Beitragstrecke F_2E.

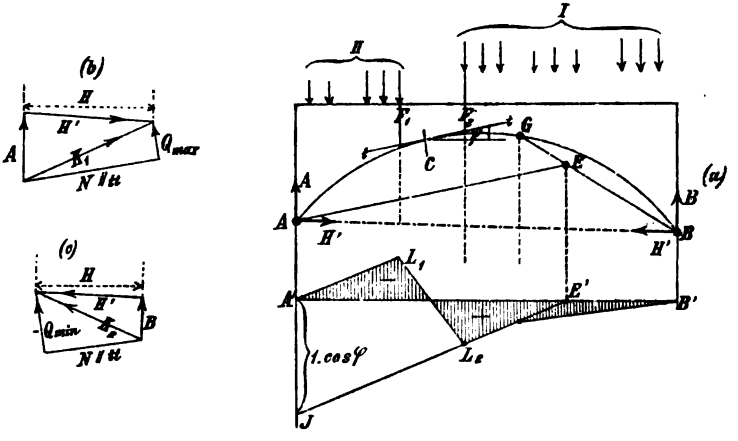


Fig. 181.

Häufig wird es sich allerdings nicht vermeiden lassen (wie in Fig. 180), auch Lasten rechts von E anzunehmen; auf den Gang der Rechnung ist diese Frage aber ohne Einfluß. Man hat nur nötig, nach No. 116 die Kräfte A und H zu bestimmen und hierauf wie vorhin zu verfahren; vergl. Fig. 181 b. Die Querkraft $_{min}Q$ entsteht, sobald gleichzeitig ein Lastenzug von A bis F_1 (Zug II in Fig. 180) und ein Lastenzug (III) von B bis in die Nähe von E vorrückt. Man ermittelt nun nach dem eben beschriebenen Verfahren (bestehend in der Bestimmung von A, B, H und in Zerlegung der Kämpferdrücke) getrennt den Einfluß jedes Lastenzuges und addiert die Ergebnisse. Hierbei findet

*) Vergl. die Anmerkung auf Seite 181.

Digitized by Google

man die gefährlichste Stellung des Zuges *III* am schnellsten durch Probieren, indem man der Reihe nach die erste, zweite, dritte Achse der ersten Lokomotive über G stellt und die gewonnenen Werte Q (deren Darstellung sehr schnell vor sich geht) vergleicht. Man kann auch die durch den Zug *III* hervorgerufene Querkraft ${}_{min}Q$ in ähnlicher Weise bestimmen wie ${}_{min}M_k$ (vergl. No. 119 und die Figur 174b); denn der zwischen E' und B' gelegene Teil der Einflußfläche hat dieselbe Form wie die Einflußfläche für das Moment in Bezug auf den Querschnitt G'' eines einfachen Balkens $E''B''$. Man braucht nur das für den stellvertretenden Balken ermittelte Moment mit $\frac{B'K}{B'G'}$ (vergl. Fig. 180b) zu multiplizieren.

Schließt man die Belastung des Trägers durch zwei getrennte Züge als unwahrscheinlich aus, so muß man Q infolge des Zuges *II* mit Q infolge von Zug *III* vergleichen; der größere der beiden Werte ist dann die größte negative Querkraft.

Zu den durch die Lastenzüge hervorgerufenen Querkräften ist noch die von der ständigen Belastung erzeugte Querkraft Q_g zu addieren; diese wird zweckmäßig mit Hilfe des in No. 112 (vergl. auch Fig. 167) beschriebenen Verfahrens ermittelt. Das hierzu erforderliche Seilpolygon wird nach No. 126 gezeichnet; man vergleiche die Fig. 176, in welcher die Knotenlasten Q_1, Q_2 .... durch die von der ständigen Belastung herrührenden Lasten G_1, G_2 .... ersetzt werden müssen. Bei Parabelbögen mit senkrechter Achse und auch bei flachen Kreisbögen (also in allen im Brückenbau üblichen Fällen) sind die Querkräfte Q_g stets so klein, *daß sie* $= 0$ *gesetzt werden dürfen.* Für den Parabelbogen werden sie bei unmittelbarer und gleichförmiger ständiger Belastung genau $= 0$, weil hier die Mittelkraftslinie mit der Bogenmittellinie zusammenfällt.

122. Querkräfte ${}_{max}Q$ und ${}_{min}Q$ infolge einer gleichmäßigen veränderlichen und ständigen Belastung. Es handele sich um die von der Verkehrslast (p) abhängige Querkraft Q_p für das Feld F_1F_2. Fig. 182. Die Querkraft Q_g infolge der ständigen Belastung (g) sei bereits auf die soeben angegebene Weise bestimmt worden.

Die zur Sehne T_1T_2 der Bogenmittellinie parallele Gerade AE schneide die BG unterhalb G. Dann entsteht ${}_{max}Q_p$, sobald der Träger nur zwischen der Stütze B und der im Felde F_1F_2 gelegenen Belastungsscheide N mit p belastet wird (Belastungsfall *I* in Fig. 182). Die Lage von N läßt sich zwar mit Hilfe der Einflußlinie schnell finden; es empfiehlt sich jedoch, ${}_{max}Q_p$ auf die folgende Weise angenähert zu bestimmen. Man nehme N in der Mitte des Feldes F_1F_2 an und vernachlässige den Druck, welchen die zwischen N und F_2 liegende Last auf den Querträger F_1 ausübt. Es greifen dann links von dem durch das fragliche Feld geführten

Digitized by Google

Schnitte nur die äußeren Kräfte A und $H' = H \sec \alpha$ an, und man kann, nachdem man A und H auf die in No. 115 beschriebene Art ermittelt hat, den Kämpferdruck K_1 und durch Zerlegung dieser Kraft die Querkraft ${}_{max}Q_p$ finden. Um ${}_{min}Q_p$ zu bestimmen, beachte man, daß die beiden Belastungen I und II (Fig. 182), welche beziehungsweise ${}_{max}Q_p$ und ${}_{min}Q_p$ erzeugen, zusammen die gänzliche Belastung des Trägers ausmachen. Nun erzeugt aber gänzliche Belastung mit g die Querkraft Q_g,

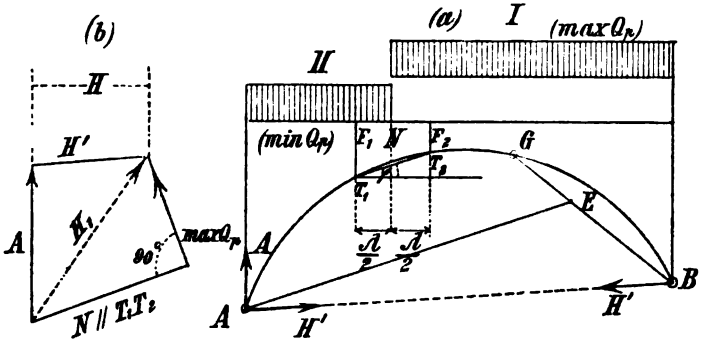


Fig. 182.

mithin gänzliche Belastung mit p die Querkraft $\frac{p}{g} Q_g$, und es folgt daher

$$ {}_{max}Q_p + {}_{min}Q_p = \frac{p}{g} Q_g \text{ und hieraus: } {}_{min}Q_p = - {}_{max}Q_p + \frac{p}{g} Q_g. $$

Die Querkräfte, welche die ständige und die veränderliche Belastung zusammen hervorbringen, sind hiernach

$$ (1) \quad \begin{cases} {}_{max}Q = {}_{max}Q_p + Q_g \\ {}_{min}Q = {}_{min}Q_p + Q_g = - {}_{max}Q_p + \dfrac{p+g}{g} Q_g. \end{cases} $$

Liegt E oberhalb G, Fig. 183, so belastet man, um ${}_{max}Q_p$ zu erhalten, den Träger zwischen E und der Mitte N des fraglichen Feldes mit p, bestimmt A und H (nach No. 115) und hierauf, wie vorhin, den Kämpferdruck K_1 und die Querkraft ${}_{max}Q_p$. Schließlich wendet man die Gleichungen (1) an.

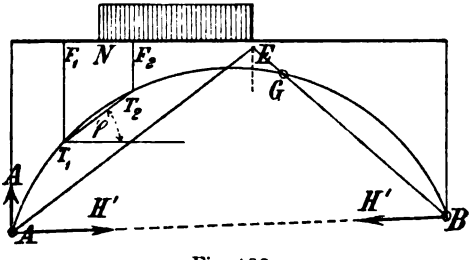


Fig. 183.

Digitized by Google

Ist die Bogenmittellinie eine Parabel oder ein flacher Kreisbogen, so ist genau oder nahezu $Q_p = 0$, und man findet dann

$$_{max}Q = {}_{max}Qp = - {}_{min}Q_p = - {}_{min}Q.$$

Benutzt man in diesem Falle zur Ermittelung der Grenzwerte von Q die Einflußfläche, so bestimmt man, sobald E links von G liegt, den Wert $_{max}Q = + p\mathfrak{F}_2$ (wo $\mathfrak{F}_2$ = Inhalt des positiven Teils der Einflußfläche) und, wenn E rechts von G liegt, $_{min}Q = - p\mathfrak{F}_1$ (wo $\mathfrak{F}_1$ = Inhalt des negativen Teiles jener Fläche). Man hat dann in jedem Falle nur den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen.

e. Querschnittsberechnung. Bestimmung der Kernlinien.

123. Querschnittsberechnung. Die Benutzung der Kernlinien bei der Berechnung der Spannungen σ (vergl. die Formeln 4 auf Seite 182) setzt voraus, daß die Kernhalbmesser k_1 und k_2 bekannt sind. Es bleibt also noch anzugeben,

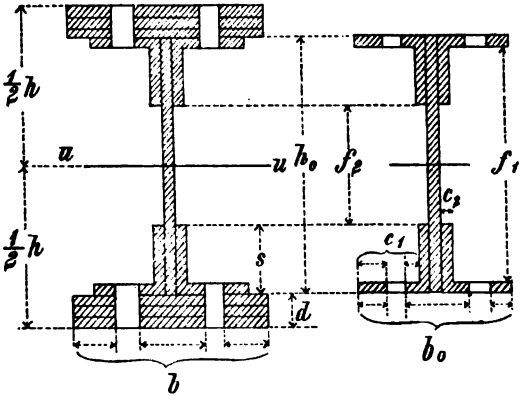


Fig. 184. Fig. 185.

wie diese Werte von vornherein mit hinreichender Genauigkeit ermittelt werden können. Dazu ist es nötig, auf die Querschnittsberechnung selbst etwas näher einzugehen.

Wir beschränken uns auf die Untersuchung des *Blechträgers*, welcher aus einem *Stegbleche* und den aus *Winkeleisen* und *Kopfplatten* zusammengesetzten *Gurtungen* besteht und nehmen zunächst an, es sei der Querschnitt symmetrisch in Bezug auf seine wagerechte Schwerachse uu, Fig. 184. Die Höhe des Stegblechs möge $= h_0$, diejenige des Querschnitts $= h$ gesetzt werden.

Das auf die u-Achse bezogene Trägheitsmoment des Querschnitts eines Blechträgers ohne Kopfplatten ist mit den in der Fig. 185 angegebenen Bezeichnungen

$$(1) \quad J_0 = \tfrac{1}{12}\,[b_0 h_0^3 - 2c_1 f_1^3 - 2c_2 f_2^3],$$

Digitized by Google

wobei b_0 und c_1 die betreffenden Breitenabmessungen nach Abzug der Nietdurchmesser bedeuten. Das Widerstandsmoment dieses Querschnittes ist

$$(2) \qquad W_0 = \frac{2 J_0}{h_0}.$$

Treten Kopfplatten mit dem Gesamtinhalte $bd = F_k$ für jede Gurtung hinzu, Fig. 184, so wächst (nach Gleich. 2 auf Seite 26) das auf die u-Achse bezogene Trägheitsmoment des Querschnitts um $2 J_k + 2 F_k \left(\frac{h_0 + d}{2}\right)^2$, wo J_k das Trägheitsmoment der Fläche F_k in Bezug auf ihre eigene wagerechte Schwerachse ist. Unter Vernachlässigung des verhältnismäßig kleinen Wertes J_k ergibt sich für den Querschnitt in Fig. 184

$$J = J_0 + \tfrac{1}{2} F_k (h_0^2 + 2 d h_0 + d^2)$$

und nach Streichung des unwesentlichen Gliedes d^2 und mit Beachtung von $h_0^2 + 2 d h_0 = h_0 (h_0 + 2 d) = h_0 h$

$$(3) \qquad J = J_0 + \tfrac{1}{2} F_k h h_0.$$

Für das Widerstandsmoment des Querschnitts erhält man

$$(4) \qquad W = \frac{2 J_0}{h} + F_k h_0$$

und hieraus

$$(5) \qquad F_k = \frac{W}{h_0} - \frac{W_0}{h}.$$

Ist nun M_k das größere der beiden auf die Kernpunkte k_1 und k_2 bezogenen Momente M_{k_1} und M_{k_2}, so ist bei gegebener zulässiger Spannung σ das erforderliche Widerstandsmoment: $W = \frac{M_k}{\sigma}$,

und es ergibt sich daher zur Berechnung der notwendigen Kopfplatten die Gleichung

$$(6) \qquad F_k = \frac{M_k}{\sigma h_0} - \frac{W_0}{h}.$$

Bei größerem Unterschiede zwischen den Momenten M_{k_1} und M_{k_2} empfiehlt es sich, die Gurtungen ungleich stark zu machen (Fig. 186). Man findet dann, mit hinreichender Genauigkeit, die erforderlichen Querschnitte ($F_{k_1} = b_1 d_1$ und $F_{k_2} = b_2 d_2$) der Kopfplatten der unteren, beziehungsweise oberen Gurtung mittels der Gleichungen:

$$(7) \qquad \begin{cases} F_{k_1} = \dfrac{M_{k_2}}{\sigma h_0} - \dfrac{W_0}{h} \text{ und} \\ F_{k_2} = \dfrac{M_{k_1}}{\sigma h_0} - \dfrac{W_0}{h}, \end{cases}$$

bei deren Anwendung der Umstand vernachlässigt wird, daß infolge der ungleichen Gurtquerschnitte die u-Achse nicht mehr die Stegblechhöhle halbiert. Der begangene Fehler ist jedoch gering, und schließlich könnte man nach Berechnung von F_{k_1} und F_{k_2} den Schwerpunkt, die Kernpunkte, die Momente M_{k_1}, M_{k_2} und die Spannungen σ_1, σ_2 genauer ermitteln und die Unterschiede zwischen den letzteren

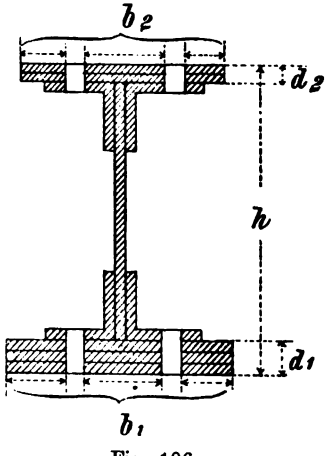


Fig. 186.

Digitized by Google

und der als zulässig erachteten Spannung feststellen. Der Verfasser hält aber diese umständliche Prüfung für überflüssig und höchstens für geeignet, eine ganz falsche Vorstellung von dem Genauigkeitsgrade der ganzen Rechnung zu erwecken; denn schon die Anwendung der Navier'schen Biegungstheorie auf die Bestimmung der Spannungen σ in Blechträgern ist nur eine Annäherung.

124. Vorläufige Querschnittsberechnung behufs Bestimmung der Kernlinien. Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf die im Brückenbau und Hochbau hauptsächlich angewandten symmetrischen flachen Bogenträger. Fig. 187. Um die Querschnittsabmessungen zunächst überschläglich zu berechnen, nehmen wir $F_{k_1} = F'_{k_2} = F_k$ an und benutzen die Gleichung

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{N}{F},$$

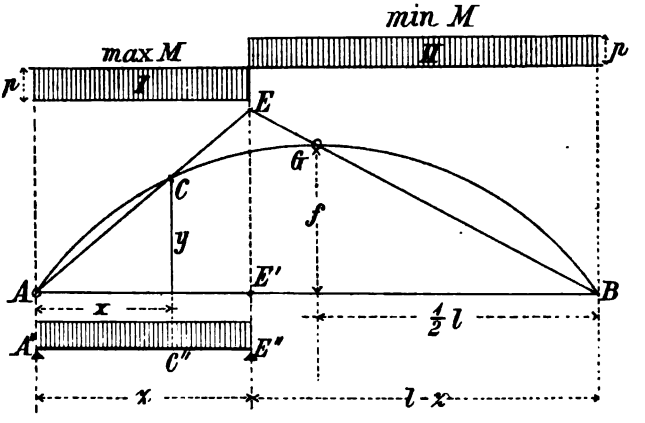


Fig. 187.

aus welcher sich das erforderliche Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{\sigma}(M + Nk)$$

ergibt, wobei $k = \frac{W}{F}$ den Kernhalbmesser bedeutet, ferner N die Längskraft und M das auf den Schwerpunkt des Querschnitts bezogene Angriffsmoment. An die Stelle von N setzen wir, da es sich nur um eine angenäherte Berechnung handelt, H, schreiben also

$$(8) \qquad W = \frac{1}{\sigma}(M + Hk)$$

und führen in diese Formel den Wert H für die Stellung der Verkehrslast ein, welche das größte Moment M hervorbringt. Die Bogenmittellinie nehmen wir parabolisch an, heben jedoch hervor, daß die folgenden Rechnungen auch für flache Kreisbögen brauchbare Ergebnisse liefern. Es ist dann das Moment infolge einer gleichmäßigen und gänzlichen Belastung wegen des Zu-

Digitized by Google

sammenfallens der Drucklinie mit der Mittellinie des Bogens $= 0$; es verschwindet der Einfluß der ständigen Belastung g und es folgt für jeden Querschnitt: $_{max}M = -\,_{min}M$.

Gesucht sei nun $_{max}M$ für den Querschnitt C, Fig. 187. Zur Bestimmung der Belastungsscheide E dienen (mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen) die Gleichungen

$$\frac{z}{x} = \frac{\overline{EE'}}{y}; \quad \frac{\overline{EE'}}{l-z} = \frac{2f}{l}$$

und aus diesen folgt $\left(\text{wegen } y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}\right)$: $z = \frac{l^2}{3l-2x}$.

Belastet man nur die positive Beitragstrecke AE, so erhält man nach Seite 185 für den Bogenquerschnitt C ein Moment, welches eben so groß ist, wie das Moment für den Querschnitt C'' eines einfachen Balkens $A''E''$, und es folgt daher für den Fall einer *gleichförmigen* Verkehrslast p

$$(9) \quad _{max}M = \frac{px(z-x)}{2} = \frac{px(l^2-3lx+2x^2)}{2(3l-2x)} = -\,_{min}M.$$

Dieser Ausdruck wird am größten für $x = 0{,}234\,l$, und zwar ergibt sich für das größte aller Momente der Wert

$$(10) \quad M = 0{,}039\,pl^2.$$

Die beiden in der Fig. 187 angegebenen Belastungsfälle (I) und (II) erzeugen entgegengesetzt gleiche Momente; dem Belastungsfalle II entspricht aber der größere Wert H; er soll also der weiteren Berechnung zu Grunde gelegt werden. Nach No. 115 entsteht nun infolge der Verkehrslast $H = \frac{pl^2}{8f} - \frac{pz^2}{4f}$ und infolge der ständigen Belastung $H = \frac{gl^2}{8f}$. Im ganzen erhält man

$$(11) \quad H = \frac{l^2}{8f}\left[g + p\left(1 - 2\frac{z^2}{l^2}\right)\right]$$

und wegen $z = \frac{l^2}{3l - 2 \cdot 0{,}234\,l} = 0{,}4\,l$

$$H = \frac{l^2}{8f}(g + 0{,}68\,p),$$

wofür (um begangene Fehler auszugleichen) der etwas größere Wert

$$(12) \quad H = \frac{l^2}{8f}(g + \tfrac{3}{4}\,p)$$

angenommen werden soll. Die Werte M und H aus den Gleich. (10) und (12) werden in die Gleich. (8) eingesetzt, worauf das erforderliche Widerstandsmoment W berechnet werden kann.

Besteht die veränderliche Belastung aus einem beweglichen Systeme von Einzellasten, so empfiehlt es sich, für den Querschnitt bei $x = \frac{1}{4}\,l$ das durch Einzellasten hervorgerufene Moment $_{min}M$ zu bestimmen und hierauf diejenige gleichmäßige Belastung p zu ermitteln, welche dasselbe Moment $_{min}M$ hervorbringt. Nun berechne man H nach Gleichung (12) und setze schließlich die Werte $_{min}M$ und H in die Gleichung (8) ein.

Zur Erläuterung des Verfahrens diene das folgende *Zahlenbeispiel*.

Eine eingleisige Eisenbahn soll mit Hilfe von zwei Bogenträgern über eine 20^m weite Öffnung geführt werden. Die Bogenmittellinie sei ein Kreisbogen, dessen Pfeil $= 2{,}5^m$ ist; die ständige Belastung betrage für beide Träger zusammen $g = 1{,}25^t$ f. d. Meter.

Digitized by Google

Zuerst wird die negative Einflußlinie für den bei $x = 5^m$ gelegenen Bogenquerschnitt C gezeichnet (Fig. 188) und das Moment $_{min}M$ bestimmt; es entsteht im vorliegenden Falle, wenn die erste Achse einer von B aus vorrückenden Lokomotive beim Scheitelgelenk G liegt. Die Belastungen der 3 Lokomotivachsen werden zur Mittelkraft 39^t vereinigt, desgleichen die Belastungen der 3 Tenderachsen zur Mittelkraft 27^t*). Nach Messung der diesen Kräften entsprechenden Ordinaten $1{,}12^m$ und $0{,}22^m$ der Einflußlinie ergibt sich (ohne Vorzeichen)

$$M = 39 \cdot 1{,}12 + 27 \cdot 0{,}22 = 49{,}6^{tm}.$$

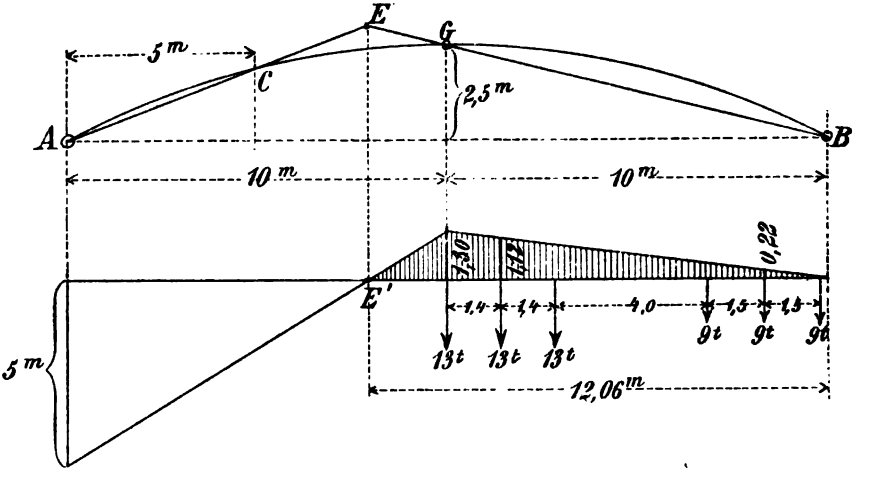


Fig. 188.

Der Inhalt der Einflußfläche ist $\mathfrak{F} = \frac{1{,}30 \cdot 12{,}06}{2} = 7{,}84^{qm}$, und es würde daher eine gleichmäßige Belastung das Moment $M = 7{,}84\,p$ hervorbringen. Aus der Gleichung $7{,}84\,p = 49{,}6$ ergibt sich der Belastungsgleichwert $p = 6{,}33^t$ f. d. *Meter*, und es folgt nun

$$H = \frac{l^2}{8f}(g + \tfrac{3}{4}\,p) = \frac{20^2}{8 \cdot 2{,}5}(1{,}25 + \tfrac{3}{4} \cdot 6{,}33) = 120^t.$$

Wird M auf 5000000^{kcm} abgerundet, so ist für jeden der beiden Bogenträger zu setzen:

$$M = 2500000^{kcm} \text{ und } H = 60000^{kg}$$

und es ergibt sich daher, wenn die Spannung $\sigma = 700^k$ f. d. *qcm* zugelassen wird:

$$W = \tfrac{1}{700}(2500000 + 60000\,k).$$

*) Dies ist selbstverständlich nur zulässig, wenn die zu vereinigenden Lasten innerhalb einer Strecke liegen, für welche die Einflußlinie eine Gerade ist.

Digitized by Google

Es empfiehlt sich, den Kernhalbmesser k zunächst $= \frac{5}{12} h_0$ abzuschätzen, wobei $h_0 =$ Stegblechhöhe. Wird $h_0 = 50^{cm}$ gewählt, so folgt $k = \frac{250}{12} = 21^{cm}$ und $W = 5370$.

Werden gleichschenklige Winkeleisen mit $s = 9^{cm}$ und $c_2 = 1{,}2^{cm}$ angenommen (vergl. Fig. 184 und 185), ferner ein 1^{cm} starkes Stegblech und Niete von $2{,}4^{cm}$ Dicke, so ergibt sich nach Gleich. (1 und 2): $W_0 = 1772$ und nach Gleich. (5): $F_k = \frac{W}{h_0} - \frac{W_0}{h}$, woraus dann mit $F_k = bd$ (vergl. Fig. 184)

$$b = \frac{1}{d}\left(\frac{W}{h_0} - \frac{W_0}{h_0 + 2d}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{5370}{50} - \frac{1772}{50 + 2d}\right).$$

Bei Annahme von drei $1{,}2^{cm}$ starken Platten ist $d = 3{,}6^{cm}$ und

$$b = \frac{1}{3{,}6}\left(\frac{5370}{50} - \frac{1772}{57{,}2}\right) = 21{,}2^{cm},$$

so daß die erforderliche Plattenbreite (wegen des Zuschlags von 2 Nietdurchmessern) $= 21{,}2 + 2 \cdot 2{,}4 = 26^{cm}$ beträgt. Der Inhalt des ganzen Querschnitts ist mit Berücksichtigung der Schwächung durch Niete: $F = 21{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 6 + 1{,}2\,(9 + 9 - 1{,}2 - 2{,}4)\,4 + 50 = 272^{qcm}$ und für den Kernhalbmesser erhält man: $k = \frac{W}{F} = \frac{5370}{272} = 20^{cm}$*). Wegen der geringen Abweichung dieses Wertes k von dem zuerst geschätzten $k = 21^{cm}$ darf von einer Wiederholung der Berechnung von W, F und k abgesehen und die ausführliche Berechnung des Bogens unter der Annahme zweier Kernlinien durchgeführt werden, welche von der Mittellinie den konstanten Abstand $k = 20^{cm}$ haben.

---

*) Berechnet man W in ähnlicher Weise wie W_0 (Gleichung 1 und 2), so erhält man $W = 5388$, ein Wert, der von dem mit Hilfe der Näherungsformel: $W = h_0\left[\frac{W_0}{h} + F_k\right]$ gefundenen $W = 5370$ fast gar nicht abweicht. Hervorzuheben ist, daß die Gleichungen 1 und 2 ebenfalls nur Näherungswerte liefern, da sie die Abrundungen der Winkeleisen nicht berücksichtigen.

Digitized by Google

VIII. Abschnitt.

Einleitung in die Theorie des ebenen Fachwerks.

§ 25.

Erklärungen und Voraussetzungen.

125. Unter einem *ebenen Fachwerk* versteht man ein Gebilde aus Stäben, welche in ihren Endpunkten durch reibungslose Gelenke miteinander verbunden sind, und deren Achsen (Mittellinien) in ein und derselben Ebene liegen. Die Untersuchung derartiger Fachwerke soll hier unter der Annahme erfolgen, daß es zulässig ist, die durch die Elastizität der Fachwerksstäbe und der das Fachwerk stützenden Körper verursachten Formänderungen als verschwindend klein anzusehen und infolgedessen bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen alle Kräfte in denjenigen Lagen zu denken, welche sie im Falle *starrer* Stäbe und Stützen einnehmen würden.

Zunächst werde vorausgesetzt, daß alle äußeren Kräfte in den Knotenpunkten, d. h. in den Punkten, in denen sich die Gelenke befinden, angreifen. Zerlegt man dann das Fachwerk durch einen Schnitt *tt* in zwei Teile (Fig. 189) und bringt, damit der eine der beiden Teile, z. B. der linke, für sich im Gleichgewichte ist, an den Schnittstellen Kräfte an, welche der Wirkung des weggenommenen rechten Teiles gleichwertig sind, so müssen diese Kräfte mit den Achsen der Stäbe zusammenfallen, weil sie sonst die Stäbe um die an ihren Enden angeordneten Gelenke drehen würden, und hieraus folgt, daß alle Stäbe nur durch Längskräfte beansprucht werden. Wir nennen diese Kräfte *Spannkräfte* und werden sie als positiv oder negativ bezeichnen, je nachdem sie in den Stabquerschnitten Zug- oder Druckspannungen hervorrufen.

In den Untersuchungen dieses Abschnitts setzen wir alle äußeren Kräfte als bekannt voraus, indem wir uns die durch die gegebenen Lasten hervorgerufenen Stützenwiderstände auf irgend welche Weise gefunden denken. Für die wichtigsten Fälle äußerlich statisch bestimmter Träger, nämlich für den *einfachen Balken*, den *Gerberschen Balken* und den *Bogen mit 3 Gelenken* sind diese Widerstände in den

Digitized by Google

Abschnitten V bis VII bestimmt worden. Die dort mitgeteilten Verfahren gelten sowohl für Träger aus vollwandigen, als auch für solche aus gegliederten Scheiben, wenn nur die gegliederten Scheiben starr sind. Man vergleiche die Untersuchungen im § 13 (No. 59 bis 61). Werden die Stäbe, aus denen die dort erwähnten gegliederten Scheiben bestehen, in ihren Endpunkten gelenkartig miteinander verbunden (was in diesem Abschnitte stets vorausgesetzt werden soll), so sind diese Scheiben Fachwerke. Lassen sich die Spannkräfte in sämtlichen Stäben einer Scheibe lediglich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen finden, so bezeichnen wir die Scheibe als *statisch bestimmt*.

Der einfachste Fall einer starren gegliederten Scheibe, d. h. einer Scheibe, deren Knotenpunkte sich gegeneinander nicht verschieben können, ist das in der Fig. 189 dargestellte *Dreiecknetz*. Dieses entsteht, wenn Dreiecke so aneinander gereiht werden, daß jedes Dreieck nur mit dem vorhergehenden und nachfolgenden eine Seite gemein hat. Die Ermittelung der Spannkräfte im Dreiecknetz gestaltet sich besonders einfach, und da bei weitem die Mehrzahl der ausgeführten ebenen Fachwerkträger aus Dreiecknetzen besteht, so erscheint es angemessen, zunächst die Theorie dieses wichtigen Stabgebildes zu entwickeln, bevor auf die allgemeinere Untersuchung gegliederter Scheiben eingegangen wird.

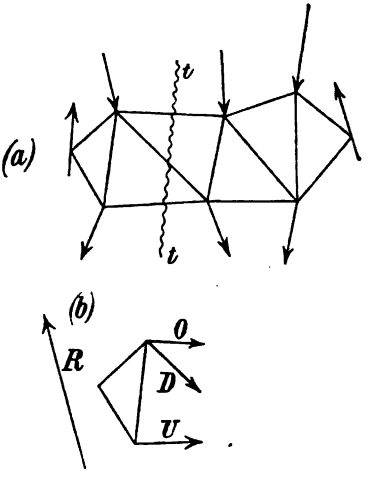


Fig. 189 a u. b.

Die Stabreihen, welche das in einer lotrechten Ebene gedachte *Dreiecknetz* nach oben und unten begrenzen, heißen die *Gurtungen;* ihre Spannkräfte sollen mit O (obere Gurtung) und U (untere Gurtung) bezeichnet werden; vergl. Fig. 189. Die Stäbe, welche die Gurtungen miteinander verbinden, werden *Gitterstäbe, Wandglieder, Füllungsstäbe* genannt, auch *Diagonalen (Schrägen)* oder *Vertikalen (Pfosten),* je nachdem sie schräg oder senkrecht stehen; ihre Spannkräfte bezeichnen wir mit D und V. Zuweilen aber wird in der Folge für sämtliche Spannkräfte das Zeichen S gewählt werden, oder es werden die Stäbe und Spannkräfte durch Ziffern bezeichnet.

Digitized by Google

§ 26.

Bestimmung der Spannkräfte im Dreiecknetz nach den Verfahren von *Culmann* und *Ritter*.

126. Das Culmannsche Verfahren. Durch ein einfaches Dreiecknetz (Fig. 189) sei ein Schnitt tt geführt, welcher drei Stäbe trifft, deren Mittellinien sich nicht in einem Punkte schneiden und deren Spannkräfte gleich O, U und D seien. Die Mittelkraft aus den links von tt angreifenden äußeren Kräften sei $= R$; sie muß mit den inneren Kräften O, U, D im Gleichgewichte sein, und man hat daher, um diese letzteren zu bestimmen, nur nötig, die in No. 12 auf Seite 15 behandelte Aufgabe zu lösen:

Drei der Lage nach gegebene Kräfte O, D und U zu finden, welche mit einer gegebenen Kraft R im Gleichgewicht sind.

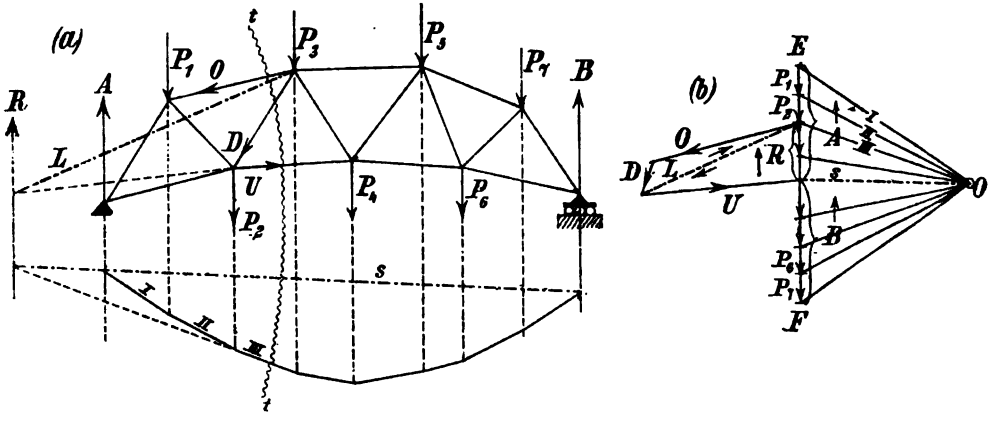


Fig. 190 a u. b.

Sollen beispielsweise nach diesem zuerst von *Culmann* angegebenen Verfahren die Spannkräfte O, D, U für den in Fig. 190 dargestellten einfachen Fachwerkbalken, welcher durch senkrechte Lasten P beansprucht wird, bestimmt werden, so reihe man zunächst die Lasten auf einer Senkrechten EF aneinander, zeichne mit beliebigem Pole O ein Seilpolygon, trage die Schlußlinie s ein und ziehe durch O eine Parallele zu s; diese zerlegt FE in die Stützenwiderstände A und B. Die Mittelkraft aus den links von tt angreifenden äußeren Kräften ist

$$R = A - P_1 - P_2;$$

sie geht durch den Schnittpunkt der Seilpolygonseiten s und III, und

Digitized by Google

ist nach oben gerichtet, sobald, wie in Fig. 190, $A > P_1 + P_2$ ist. Nach Bestimmung von R bringe man je zwei der vier Kräfte R, O, D, U miteinander zum Schnitt, beispielsweise O mit D und R mit U, verbinde die Schnittpunkte durch die Gerade L, zerlege R nach den Richtungen von L und U, hierauf die Hilfskraft L nach den Richtungen von D und O und versehe schließlich die Seiten des aus den Kräften R, O, D und U gebildeten Polygons so mit Pfeilen, daß der Umfahrungssinn ein stetiger ist. Indem man nun O, D und U an den durchschnittenen Stäben des linken Balkenteiles in dem durch die entsprechenden Pfeile des Kräftepolygons gegebenen Sinne anbringt, erfährt man, daß im vorliegenden Falle die Kräfte O und D Druckspannungen erzeugen, während U Zugspannungen hervorruft.

Wird nur die eine der drei Spannkräfte gesucht, beispielsweise D, so bringe man diese Kraft mit R in e zum Schnitt, Fig. 191, verbinde e mit dem Schnittpunkte C der beiden anderen Spannkräfte (O und U) durch die Gerade L' zerlege R nach den Richtungen von L', und D und versehe schließlich das Kräftepolygon $RL'D$ so mit Pfeilen, daß der Umfahrungssinn ein stetiger ist. Bei weit abliegendem Schnittpunkte e ist jedoch diese unmittelbare Bestimmung von D unbequem; sie wird unmöglich, sobald R und D parallel sind.

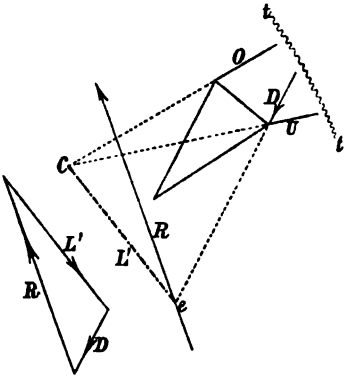


Fig. 191.

127. Das Rittersche Verfahren. Jede der Spannkräfte O, D, U in den vom Schnitte tt (Fig. 189) getroffenen Fachwerkstäben läßt sich auch mittels *einer* aus dem Satze von den statischen Momenten gefolgerten Gleichung bestimmen. Denn, wählt man den Schnittpunkt von irgend zweien der drei Spannkräfte zum Drehpunkte und setzt die Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte gleich Null, so erhält man eine Gleichung, in der nur *eine* unbekannte Spannkraft vorkommt, weil die statischen Momente der durch den Drehpunkt gehenden Spannkräfte gleich Null sind. Bei diesem Verfahren werden zuerst alle Spannkräfte als Zugkräfte betrachtet; ergibt sich für die Spannkraft eines Stabes ein negativer Wert, so ist der Pfeil dieser Kraft umzukehren; sie ruft dann Druckspannungen hervor.

Es möge diese Bestimmungsweise der Spannkräfte an dem bereits vorhin nach dem Culmannschen Verfahren untersuchten Fachwerkbalken erläutert werden. Um zunächst U zu ermitteln, wird der Schnittpunkt a

Digitized by Google

von O und D zum Drehpunkte gewählt, Fig. 192. Der Hebelarm von U sei $= r_a$, und das Moment der links vom Schnitte tt wirkenden äußeren Kräfte (d. i. das *Angriffsmoment* für den Punkt a) sei $= M_a$; es werde, da der Trägerteil links von tt betrachtet wird, rechts drehend positiv angenommen. Das Moment Ur_a der Spannkraft U ist links drehend, und es ergibt sich daher die Gleichgewichtsbedingung

$$M_a - Ur_a = 0 \text{ und hieraus } U = + \frac{M_a}{r_a}.$$

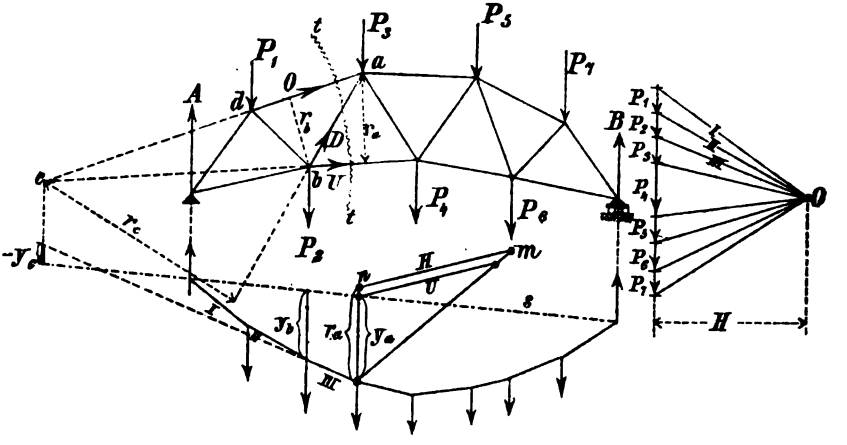


Fig. 192.

Im vorliegenden Falle ist $M_a = Hy_a$, wobei y_a die dem Knotenpunkte a entsprechende Ordinate des Seilpolygons bedeutet, und es folgt schließlich der Wert

$$U = + H \frac{y_a}{r_a},$$

welcher sich auf die in der Fig. 192 angegebene und ohne weitere Erläuterung verständliche Weise durch Zeichnung bestimmen läßt.*)

Wählt man jetzt den Punkt b zum Drehpunkte, so erhält man, da die zunächst als Zugkraft aufzufassende Spannkraft O rechts um b dreht: $M_b + Or_b = 0$ und hieraus

$$O = - \frac{M_b}{r_b} = - H \frac{y_b}{r_b}.$$

Das Minus-Zeichen deutet an, daß die obere Gurtung gedrückt wird.

*) Die Richtung der Strecke $\overline{nm} = H$ ist beliebig.

Digitized by Google

Wird schließlich der Schnittpunkt c von O und U zum Drehpunkte gewählt, so folgt, da die Spannkraft D als Zugkraft links um c dreht, die Gleichung: $M_c - Dr_c = 0$ und hieraus: $D = +\frac{M_c}{r_c}$.

Das Moment M_c ist nach dem in No. 15 bewiesenen Satze gleich dem Produkte Hy_c aus der Polweite H und der Strecke y_c, welche die Seilpolygonseiten III und s (d. s. die äußersten in Bezug auf die Kräftegruppe A, P_1, P_2) auf einer durch den Drehpunkt c zur Mittelkraft R gezogenen Parallelen abschneiden. Im vorliegenden Falle ist y_c negativ, und es ergibt sich daher

$$D = -H\frac{y_c}{r_c}.$$

Die Spannkräfte O und D können nun auf dieselbe Weise durch Zeichnung bestimmt werden wie die Kräfte U.

Wirken auf den einfachen Fachwerkbalken nur senkrechte, abwärts gerichtete Lasten, so sind die Momente Hy_c und Hy_b stets positiv. Die obere Gurtung wird in diesem Falle nur gedrückt, die untere Gurtung nur gezogen. Die größten Spannkräfte in den Gurtungen entstehen bei gänzlicher Belastung.

Trifft der durch ein Wandglied geführte Schnitt tt zwei Gurtstäbe, deren Schnittpunkt C innerhalb der Stützweite liegt (Fig. 193), so ist auch y_c bei senkrechten, abwärts gerichteten Lasten stets positiv. Das fragliche Wandglied wird dann stets in demselben Sinne beansprucht; es wird entweder nur gezogen oder nur gedrückt; seine größte Inanspruchnahme erfolgt bei gänzlicher Belastung des Balkens.

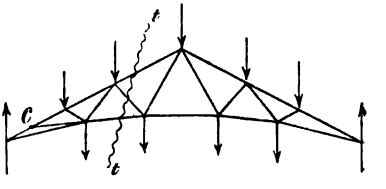


Fig. 193.

Für die späteren Untersuchungen ist es noch wichtig, hervorzuheben, daß die Spannkraft D in einem Wandgliede = Null wird, sobald die Mittelkraft R (Fig. 191) aus den links von tt wirkenden äußeren Kräften durch den Schnittpunkt der vom Schnitte tt getroffenen Gurtstäbe O und U geht, weil dann L' mit R zusammenfällt.

§ 27.

Die Kräftepläne Cremonas.

128. Die auf irgend einen Knotenpunkt eines starren Fachwerks wirkenden äußeren und inneren Kräfte sind miteinander im

Digitized by Google

Gleichgewicht und lassen sich deshalb zu einem geschlossenen Polygone mit stetigem Umfahrungssinne zusammensetzen. Dieses Kräftepolygon ist bestimmt, sobald nicht mehr als zwei jener Kräfte unbekannt sind. Kennt man z. B. für den in der Fig. 194 dargestellten Fall die Spannkräfte S_1, S_2 und die Mittelkraft P der im fraglichen Knotenpunkte angreifenden äußeren Kräfte, so hat man nur nötig, diese Kräfte in irgend einer Reihenfolge zu einem stetigen Kräftezuge $ABCD$ aneinander zu setzen und durch den Anfangspunkt A und den Endpunkt D Parallelen (AE und DE) zu den Richtungen der Stäbe 3 und 4 zu ziehen. Man erhält dann das geschlossene Kräftepolygon $ABCDEA$, dessen letzte Seiten DE und EA nach Größe, Richtung und Sinn die Spannkräfte S_3 und S_4 darstellen. Im vorliegenden Falle findet man, daß die Stäbe 3 und 4 auf Druck beansprucht werden.

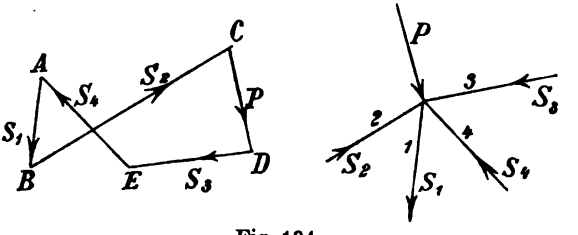


Fig. 194.

Sind nun die auf ein Dreiecknetz wirkenden äußeren Kräfte gegeben, so ist man im stande, der Reihe nach die Kräftepolygone für sämtliche Knotenpunkte zu zeichnen, indem man bei einem der beiden Knotenpunkte beginnt, von welchem nur zwei Stäbe ausgehen. Hervorzuheben ist, daß sich beim Dreiecknetz die einzelnen Kräftepolygone so aneinander reihen lassen, daß jede Kraft nur einmal in der Figur vorkommt. Die auf diese Art erhaltenen Kräftepläne sollen als *Cremonasche Pläne* bezeichnet werden, weil *Cremona* zuerst in allgemeiner Weise auf die bemerkenswerten Eigenschaften derselben aufmerksam machte.

129. Beliebiges, einfaches Dreiecknetz. In den Knotenpunkten $1'$, $2'$, $3'$ .... eines einfachen Dreiecknetzes (Fig. 195) mögen irgendwelche miteinander im Gleichgewichte befindliche Kräfte P_1, P_2, P_3 .... angreifen. Es entspricht ihnen dann ein geschlossenes Polygon, in welchem die Kräfte P dieselbe Reihenfolge haben mögen, in der man ihnen bei Umfahrung des Randes $1'$, $2'$, $3'$ .... begegnet. Die Eckpunkte dieses Kräftepolygons seien mit $(8'1')$, $(1'2')$, $(2'3')$, ... bezeichnet, so zwar, daß beispielsweise die Ecke $(4'5')$ von den Kräften P_4 und P_5 gebildet wird.

Digitized by Google

Um den Kräfteplan zu zeichnen, beginnt man beim Knotenpunkte 1 und bestimmt die Spannkräfte 1 und 8 in den Stäben 1 und 8, indem

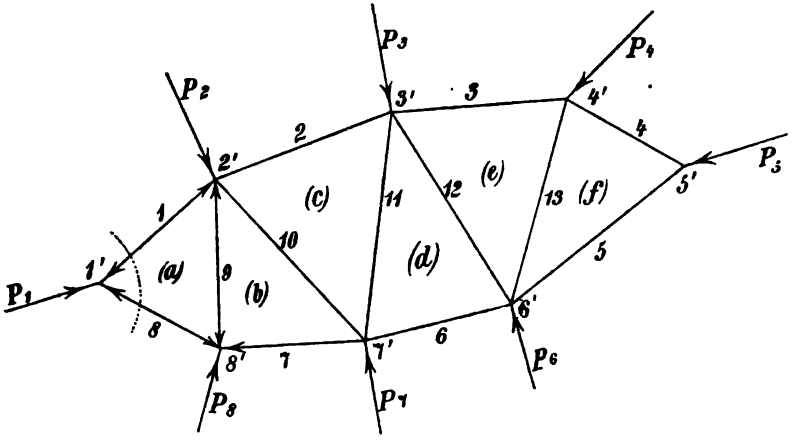


Fig. 195 I.

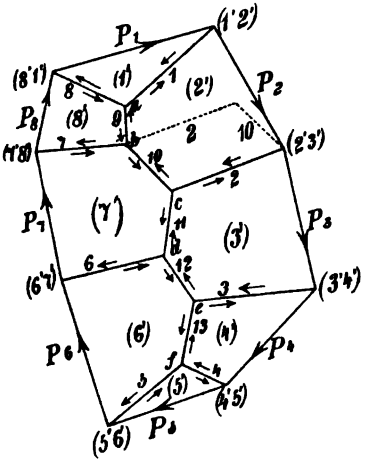


Fig. 195 II.

man zu den Mittellinien dieser Stäbe durch die Endpunkte (1′ 2′) und (8′ 1′) der Kraft P_1 Parallelen zieht. Man erhält ein Kräftedreieck mit dem in der Fig. 195 II durch Pfeile, die innerhalb des Dreiecks stehen,

Digitized by Google

angegebenen Umfahrungssinn; es liefert nach Größe, Richtung und Sinn die Spannkräfte 1 und 8. Denkt man den Knotenpunkt 1′ durch den in der Fig. 195^{I} angedeuteten Schnitt vom Fachwerk abgetrennt und überträgt die Pfeile des Kräftedreiecks nach den Schnittstellen, so erfährt man, daß die Stäbe 1 und 8 gedrückt werden, weil ihre Spannkräfte gegen den ruhenden Knotenpunkt 1′ gerichtet sind.

Nun geht man zum Knotenpunkte 8′ über, an welchem die gegebenen Kräfte P_8 und 8 und die noch unbekannten Kräfte 9 und 7 angreifen. Die Kraft 8 wirkt, da der Stab 8 auf Druck beansprucht wird, gegen den Knotenpunkt 8′ und bildet in der Fig. 195^{II} mit P_8 einen stetigen Kräftezug. Schließt man diesen, indem man durch (7′ 8′) eine Parallele zum Stabe 7 und von a aus eine Parallele ab zum Stabe 9 zieht, so erhält man das Kräftepolygon für den Knotenpunkt 8′; es liefert die Spannkräfte 9 und 7, welche beide in den betreffenden Stäben Druckspannungen erzeugen.

Von den am Knotenpunkte 2′ angreifenden Kräften sind jetzt gegeben: 9, 1, P_2; sie bilden im Kräfteplane bereits einen stetigen Zug, welcher durch Parallelen zu den beiden gesuchten Spannkräften 2 und 10 geschlossen wird. Die Parallele zu 2 muß durch den Punkt (2′ 3′) gezogen werden, die Parallele zu 10 durch den Punkt b.

So fortfahrend, kann man sämtliche Spannkräfte finden, indem man der Reihe nach die Kräftepolygone für die Knotenpunkte 7′, 3′, 6′, 4′ zeichnet. Das Kräftepolygon für den letzten Knotenpunkt 5′ ist bereits durch die den Knoten 4′ und 6′ entsprechenden Polygone (4′) und (6′) bestimmt.

Zu beachten ist, daß man bei Aufzeichnung des Kräftepolygons für irgend einen Knotenpunkt schon das dem nächsten Knotenpunkte entsprechende Polygon ins Auge fassen muß. So könnte man z. B. das Kräftepolygon für 2′ in der Weise zeichnen, daß man den gegebenen Kräftezug $9 - 1 - P_2$ schließt, indem man die Parallele zu 10 durch den Punkt (2′ 3′) zieht und die Parallele zu 2 durch den Punkt b, wie dies in der Fig. 195^{II} durch gestrichelte Linien angedeutet worden ist. Dann müßte man aber beim Zeichnen des Polygons für 7′ die Kraft 10 an die Kraft 7 setzen, da hier die gegebenen Kräfte P_7, 7 und 10 aneinander gereiht werden müssen, und bei Konstruktion des Polygons für 3′ müßte man 2 an P_3 setzen, da hier die Kräfte 11, 2, P_3 gegeben sind.

Derartige Überlegungen werden überflüssig, wenn man die folgenden Beziehungen zwischen den Figuren 195^{I} und 195^{II} beachtet.

Digitized by Google

1. *In der Figur 195^{I} verbindet der zum Rande des Fachwerks gehörende*

Stab 1 die Knoten 1′ und 2′,
der „ 2 „ „ 2′ „ 3′,
„ „ 3 „ „ 3′ „ 4′,
u. s. w.

In der Figur 195^{II} geht

Kraft 1 durch den Punkt (1′ 2′)
„ 2 „ „ „ (2′ 3′)
„ 3 „ „ „ (3′ 4′)
u. s. w.

Infolgedessen haben die Kräftepolygone
für die Knotenpunkte 1′ und 2′ die Seite 1 gemein,
„ „ „ 2′ „ 3′ „ „ 2 „ ,
„ „ „ 3′ „ 4′ „ „ 3 „ , u. s. w.

2. *In der Figur 195^{I} bilden die Stäbe 1, 9, 8 das Dreieck (a),*
„ „ 9, 7, 10 „ „ (b),
„ „ 10, 2, 11 „ „ (c),
u. s. w.

In der Fig. 195^{II} schneiden sich die Kräfte 1, 9, 8 im Punkte a,
„ „ 9, 7, 10 „ „ b,
„ „ 10, 2, 11 „ „ c,
u. s. w.

In der Fig. 195^{I} verbindet

Stab 9 die Punkte 8′ und 2′,
„ 10 „ „ 2′ „ 7′,
„ 11 „ „ 7′ „ 3′,
u. s. w.

In der Figur 195^{II} haben die Kräftepolygone
(8′) und (2′) die Seite 9 gemein,
(2′) „ (7′) „ „ 10 „ ,
(7′) „ (3′) „ „ 11 „ ,
u. s. w.

Die Punkte *a*, *b*, *c*, ... nennen wir die Pole der Dreiecke (*a*), (*b*), (*c*) . . . .

In der Figur 195^{I} trennt der

Stab 9 die Dreiecke (*a*) u. (*b*),
„ 10 „ „ (*b*) „ (*c*),
„ 11 „ „ (*c*) „ (*d*),
u. s. w.

In der Fig. 195^{II} verbindet die Spannkraft
9 die Pole *a* und *b*,
10 „ „ *b* „ *c*,
11 „ „ *c* „ *d*,
u. s. w.

Sind die Spannkräfte in sämtlichen Wandgliedern gleich Null, so fallen die Pole *a*, *b*, *c*, ... zusammen; es bilden dann die Gurtungen ein Seilpolygon für die Kräfte P_1, P_2, P_3 . . . .

Um *Cremona*sche Kräftepläne schnell zeichnen zu können, genügt bereits die Beachtung der in liegender Schrift angeführten Beziehungen. Gute Dienste leistet auch die Regel: Die an einem Knotenpunkte angreifenden Kräfte müssen stets in der Reihenfolge aneinandergesetzt

Digitized by Google

werden, in der man ihnen bei Umkreisung des Knotenpunktes begegnet. Hierbei sind die äußeren Kräfte (wie in Fig. 195[I]) immer außerhalb des Randes liegend zu denken. Beispielsweise sind die auf den Knotenpunkt $2'$ wirkenden Kräfte in der Reihenfolge 9, 1, P_2, 2, 10 zu nehmen, nicht etwa in der Reihenfolge 9, 1, P_2, 10, 2, welche letztere die in der Fig. 195[II] durch gestrichelte Linien angedeutete, unbrauchbare Lösung geben würde.

Anwendungen.

Die Tafel 2 enthält Cremonasche Kräftepläne für eine Reihe von Dreiecknetzen. Zu ihrer Erläuterung werden kurze Bemerkungen genügen; doch wird dem Anfänger empfohlen, jeden Kräfteplan, von Knotenpunkt zu Knotenpunkt vorgehend, nachzuzeichnen und den Umfahrungssinn jedes einzelnen Kräftepolygons festzustellen.

Die Pläne sind zur besseren Übersicht in drei Farben ausgeführt worden. Für die Spannkräfte und Stäbe der oberen Gurtung wurden blaue Linien gewählt, für die untere Gurtung rote und für die Füllungsstäbe schwarze Linien.

130. Fachwerkbalken mit wagerechter oberer Gurtung. (Fischbauchträger.) Fig. 196 auf Tafel 2. Die Lasten mögen ausschließlich in den Knotenpunkten der oberen Gurtung angreifen. Der Träger habe 8 gleichlange Felder und sei symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte. Jedes Feld sei gleichmäßig mit $2P$ belastet. Dann kommt auf jeden Knotenpunkt die Last $2P$, mit Ausnahme der mit den Stützpunkten zusammenfallenden Knotenpunkte; diese werden mit P belastet. Jeder Stützenwiderstand ist $= 8P$, so daß an jedem Stützpunkte die Kraft $7P$, nach oben gerichtet, angreift. Es genügt, den Kräfteplan für die eine Hälfte zu zeichnen.

In der Figur 196b ist $ib'b''b'''$ . . . . das Polygon der äußeren Kräfte. Nach Ziehen von $b'a \parallel O_1$ und $ia \parallel U_1$ findet man in a den Pol des Dreiecks *I II III*. Nun werden die Parallelen zu O_2, O_3 . . . . gezogen, ferner die Parallelen zu U_2, U_3 . . . . Die ersteren gehen durch die Eckpunkte $b''b'''$ . . . . . des Polygons der äußeren Kräfte, und die letzteren bilden, da in den Knotenpunkten der unteren Gurtung keine Lasten angreifen, einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt i ist. Vom Pole a aus wird ein Linienzug $abcdefgh$ gezeichnet, dessen Seiten der Reihe nach parallel zu V_1, D_2, V_2, D_3, V_3, D_4, V_4 sind, und dessen Eckpunkte abwechselnd auf einer roten und einer blauen Linie liegen. Eine Ausnahme bildet die zu V_4 parallele Seite gh, welche von O_4 zu O'_4 geht, da die Spannkraft V_4 im Knotenpunkte *VIII* mit O_4, O'_4 und $2P$ im Gleichgewichte ist, mithin mit diesen drei Kräften ein geschlossenes

Digitized by Google

Polygon bilden muß. Aus dem Umfahrungssinn der einzelnen Kräftepolygone findet man, daß sämtliche Stäbe der oberen Gurtung gedrückt und sämtliche Stäbe der unteren Gurtung gezogen werden. Zur Feststellung des Vorzeichens der Spannkräfte V und D ergibt sich bei der hier gewählten Anordnung des Kräfteplanes die einfache Regel:

Versieht man, vom Anfangspunkte a ausgehend, den Linienzug abcdefgh so mit Pfeilen, daß der Umfahrungssinn ab — bc — cd — de — .... nicht unterbrochen wird, so geben diese Pfeile an, in welchem Sinne die Kräfte V und D an den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen.

Man findet auf diese Weise, daß in Fig. 196 sämtliche Vertikalen gedrückt und sämtliche Diagonalen gezogen werden.

131. Fachwerkbalken mit wagerechter unterer Gurtung. (Bogensehnenträger.) Fig. 197 auf Tafel 2. Es mögen nur in den Knotenpunkten der unteren Gurtung Lasten angreifen. Belastung eines Knotenpunktes $= 2P$. An den Stützpunkten greifen die Widerstände $7P$ an. Man macht $\overline{b'i} = 7P$, zieht $ia \parallel O_1$ und $b'a \parallel U_1$ und zeichnet dann für den ersten Knotenpunkt der unteren Gurtung das aus $2P = \overline{b''b'}$, $U_1 = \overline{b'a}$, $V_1 = \overline{ab}$ und $U_2 = \overline{bb''}$ bestehende Kräftepolygon. Nun werden die Parallelen zu den Richtungen U_2, U_3 und U_4 der Stäbe der belasteten Gurtung so gezogen, daß diese Parallelen auf der Senkrechten ib' die Kräfte $2P$ abschneiden, ferner durch den Punkt i Parallelen zu den Richtungen O_2, O_3, O_4 und O'_4 der Stäbe der unbelasteten Gurtung. Der aus den Spannkräften V_1, D_2, V_2, D_3, V_3, D_4 bestehende Linienzug $abcd \ldots . g$ wird nun so eingetragen, daß die Eckpunkte b, c, d, e, f, g wechselweise auf den roten Linien U und den blauen Linien O liegen, und schließlich wird $\overline{gh} \parallel V_4$ gemacht. Von a ausgehend werden die Seiten des Polygonzuges $abcd \ldots .$ mit Pfeilen versehen. Diese Pfeile geben an, in welchem Sinne die Kräfte V und D an den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen. Man findet, daß V_1 und V_4 positiv sind, weil Zugspannungen erzeugend, dagegen V_2 und V_3 negativ. Die Spannkräfte D sind durchweg positiv. Die obere Gurtung wird gedrückt, die untere gezogen.

132. Englischer Dachstuhl mit gezogenen Diagonalen (Fig. 198 auf Tafel 2), **(Zahlenbeispiel).** Die einzelnen Dachbinder sind einander parallel und in 5,1^m Abstand angenommen. Stützweite 24^m, Feldweite 3,0^m. Die senkrecht wirkende Belastung besteht für das Quadratmeter der Horizontalprojektion der Dachfläche aus

54^k Eigengewicht (Deckung: Schiefer auf Winkeleisen).
75^k Schneelast.

Digitized by Google

$120 \sin^2(\beta + 10)^{kg}$ senkrechte Seitenkraft des Winddruckes*)

β = Neigungswinkel der oberen Gurtung. $tg\beta = \frac{4{,}8}{12} = 0{,}4$, also $\beta = 22°$ und $\sin(\beta + 10) = 0{,}53$. Daher Windbelastung

$$120 \cdot 0{,}53^2 = 34^{kg}$$

und Gesamtbelastung $54 + 75 + 34 = 163^{kg} = 0{,}163^t$. Somit kommen auf jeden Knotenpunkt

$$0{,}163 \cdot 5{,}1 \cdot 3{,}0 = 2{,}5^t.$$

Die wagerechte Seitenkraft des Winddruckes darf bei der geringen Neigung der Dachfläche vernachlässigt werden, weil der größte Winddruck und die größte Schneelast kaum gleichzeitig auftreten werden. Hingegen werden beide Dachhälften mit dem senkrechten Winddrucke von 34^{kg} belastet gedacht.

An jedem Stützpunkte greift die Kraft $A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2{,}5^t$ (nach oben gerichtet) an.

Die Parallelen zu den Spannkräften in der oberen, belasteten Gurtung schneiden auf dem Kräftezuge die Knotenpunktlasten ab. Die Parallelen zu den Spannkräften in der unteren, unbelasteten Gurtung gehen durch denselben Punkt; sie decken sich, da sie einerlei Richtung haben. Die Parallelen zu den Spannkräften in den Gitterstäben bilden einen bei a beginnenden zusammenhängenden Linienzug.

Nach Messung der Spannkräfte wurden die Ergebnisse in die rechte Hälfte der Figur 198a eingetragen.

133. Binder eines Pultdaches (Fig. 199a auf Tafel 2). Der einer gleichförmigen gänzlichen Belastung entsprechende Kräfteplan (Fig. 199b) wurde ähnlich wie vorhin gezeichnet. Die Füllungsstäbe: 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13 werden bei den hier gewählten Verhältnissen gedrückt, die Füllungsstäbe: 2, 4, 6, 11 gezogen. Obere Gurtung gedrückt, untere Gurtung gezogen.

134. Kräfteplan für den Dachstuhl in Fig. 200 auf Tafel 2. Der in Fig. 200a dargestellte Dachbinder hat bei b ein festes Auflager und wird bei a durch eine Strebe gestützt. Ist bei D ein Gelenk angeordnet, so wirkt der Stützenwiderstand A in der Richtung der Strebe, und es muß dann der Widerstand B des rechten Auflagers durch den Schnittpunkt C der Strebe mit der Mittelkraft $12P$ aus den Belastungen gehen. Nach Bestimmung von A und B (Fig. 200b) wird A mit der im Knotenpunkte a (Fig. 200a) angreifenden Last P zu der Mittelkraft A' zusammengesetzt, worauf die Spannkräfte für die ersten Stäbe der oberen und unteren Gurtung bestimmt werden können. Die Spannkräfte für die unbelastete, untere Gurtung gehen durch einen und

*) Die Windrichtung bilde mit der Wagerechten den Winkel 10°.

Digitized by Google

denselben Punkt, die für die belastete, obere Gurtung schneiden auf dem Zuge der Lasten die Strecken $2P$ ab. Die Parallelen zu den Spannkräften in den Vertikalen und in den Diagonalen bilden einen zusammenhängenden Linienzug, dessen Anfangspunkt a ist. Die eingetragenen Pfeile geben an, in welchem Sinne die Kräfte an den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen. Man findet, daß die Vertikalen gedrückt und die Diagonalen gezogen werden. Die obere Gurtung wird gedrückt, die untere gezogen.

135. Kräfteplan für einen belgischen Dachstuhl. Berücksichtigung des schrägen Winddruckes (Fig. 201 bis 203 auf Tafel 2). Unter der Voraussetzung, daß jedes Feld der oberen Gurtung mit $2P_o$ belastet wird, während in 3 Knotenpunkten des Untergurtes Lasten $2P_u$ angreifen, zeigt Fig. 201b den Kräfteplan für die senkrecht wirkende Belastung; es genügte, ihn für die linke Hälfte zu zeichnen. Die Spannkräfte der Stäbe der rechten Hälfte sind gleich denen der entsprechenden Stäbe der linken Hälfte. Die obere Gurtung sowie die Wandglieder 1, 3, 5, 7 werden gedrückt. Alle übrigen Stäbe werden gezogen.

Weiter soll angenommen werden, daß auf dem Dachbinder ein starker Winddruck wirkt. Der Einfallswinkel des Windes sei β (Fig. 222a), und der Neigungswinkel der oberen Gurtung gegen die Senkrechte $= \alpha$. Dann bildet die Normale zur Dachfläche mit der Windrichtung den Winkel $(\alpha - \beta)$, so daß die Geschwindigkeit des Windes rechtwinklig zur Dachfläche gleich $c \cos(\alpha - \beta)$ wird, wo c die Geschwindigkeit des Windes überhaupt bedeutet. Der rechtwinklig zur Dachfläche F wirkende Winddruck ist erfahrungsgemäß

$$\Sigma W = 0{,}12248\, c^2 \cos^2(\alpha - \beta)\, F;$$

er steht nämlich im geraden Verhältnis zur getroffenen Fläche und zu dem Quadrate der Geschwindigkeit, mit der sich der Wind rechtwinklig zur Dachfläche bewegt. Man kann etwa $c = 31^m$ und $\beta = 10°$ setzen. Dann findet man $\Sigma W = 120\, F \cos^2(\alpha - 10)$. F ist in Quadratmetern auszudrücken. Die Belastung eines Knotenpunktes ist in Fig. 202a

$$2W = \tfrac{1}{8} \Sigma W \text{ bezieh. } W = \tfrac{1}{10} \Sigma W.$$

Das bewegliche Lager sei auf der linken Seite angeordnet, und von dieser Seite möge auch der Wind kommen. Bei dieser Belastung sind die Füllungsglieder der rechten Hälfte spannungslos. Denn führt man durch irgend ein Feld der rechten Hälfte einen Schnitt (Fig. 204) und stellt die Momentgleichung für den rechtseitigen Stützpunkt auf, so erhält man, da B die einzige auf das rechte Trägerstück wirkende äußere Kraft ist,

$$Dr = 0,$$

wo r den Hebelarm von D bedeutet. Es sind aus diesem Grunde in

Digitized by Google

Fig. 202a die Füllungsglieder der rechten Hälfte fortgelassen worden. Der Stützenwiderstand A ist senkrecht und schneidet ΣW in C. Durch Punkt C muß der Widerstand B gehen. In Fig. 202b wurden aus dem gegebenen ΣW die Kräfte A und B bestimmt; hierauf wurde A mit der Belastung W des ersten Knotenpunktes zu A' zusammengesetzt. Die weitere Konstruktion des Planes ist aus der Fig. 202b zu ersehen. Die obere Gurtung wird durchweg gedrückt, die untere Gurtung auf der linken Trägerhälfte gezogen, auf der rechten gedrückt. Die Füllungsstäbe 1, 3, 5, 7 werden gedrückt, die Füllungsstäbe 2, 4, 6, 8 gezogen.

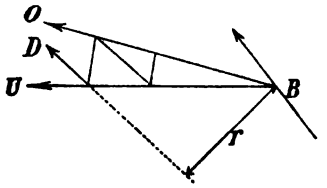


Fig. 204.

Fig. 203a und 203b zeigen die Ermittelung der Spannkräfte für den Fall, daß der Wind von der rechten Seite kommt. Es wird wieder ΣW mit dem senkrechten Stützenwiderstande A im Punkte C zum Schnitt gebracht und die Richtung des ebenfalls durch C gehenden Widerstandes B festgestellt. Die Füllungsstäbe auf der linken Hälfte werden spannungslos; sie sind in der Zeichnung fortgelassen worden. Man findet, daß die obere Gurtung gedrückt, die untere Gurtung gezogen wird. Die Füllungsstäbe 9, 11, 13, 15 werden gedrückt, die anderen gezogen.

Nachdem für jeden einzelnen Stab des Fachwerks durch Vergleichung der Pläne Fig. 202b und 203b festgestellt worden ist, ob durch den von der linken Seite oder durch den von der rechten Seite wirkenden Winddruck eine größere Spannkraft erzeugt wird, muß die größere Spannkraft zu der aus dem Plane Fig. 201b sich ergebenden addiert werden. In den meisten Fällen genügt es aber, die statische Berechnung eines Dachstuhles in der durch das Zahlenbeispiel in No. 132 erläuterten Weise durchzuführen und nur die lotrechte Seitenkraft des Winddruckes zu berücksichtigen. Nur bei hohen Dachstühlen zeichne man die Pläne für den schräg wirkenden Winddruck, stelle jedoch eine geringere Belastung durch Schnee in Rechnung, da es höchst unwahrscheinlich ist, daß bedeutende Winddrücke und große Schneelasten gleichzeitig wirken.

§ 28.

Einfluß von Kräften, welche nicht in den Knotenpunkten angreifen.

136. Auf einen Fachwerkstab ab (Fig. 205a) mögen irgend welche Lasten wirken, deren Mittelkraft $= R$ sei. Der Stab übt auf die Knoten

Digitized by Google

a und b gewisse Drücke aus, welche wir in die Seitenkräfte R_1, R_2, S zerlegt denken, deren erstere parallel zu R sind, während die entgegengesetzt gleichen Kräfte S in die Stabachse fallen. Die Kräfte R_1 und R_2 lassen sich schnell angeben. Man hat nur nötig, auf der Kraft R einen beliebigen Punkt c anzunehmen, das Dreieck abc als Seilpolygon aufzufassen und den zugehörigen Kräfteplan, Fig. 205b, zu zeichnen.

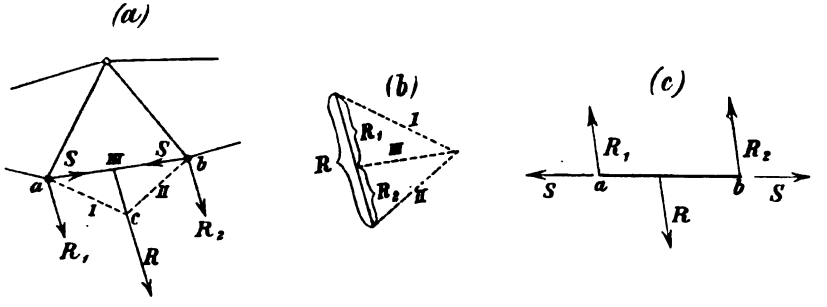


Fig. 205 a, b u. c.

Vergl. auch Seite 14, Fig. 15. Kennt man aber die von sämtlichen Stäben auf die Knotenpunkte übertragenen Kräfte R_1, R_2, so ist die Aufgabe, die nach der Richtung der Stabachsen wirkenden Kräfte S zu bestimmen, auf die Ermittelung der Spannkräfte S eines Fachwerks zurückgeführt, an welchem sämtliche äußeren Kräfte nur in den Knotenpunkten angreifen.

Sind sämtliche S gefunden, so kennt man die an jedem Stabe angreifenden Kräfte, Fig. 205c, und ist nun im stande, die auf die einzelnen Stabquerschnitte wirkenden Biegungsmomente M, Längskräfte N, Querkräfte Q und die durch diese hervorgerufenen Spannungen zu bestimmen.

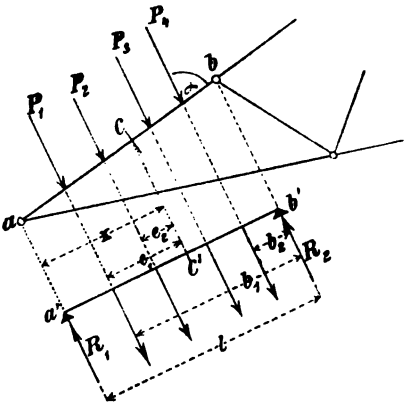


Fig. 206.

Einen der wichtigsten Fälle stellt die Fig. 206 dar. Der Stab ab wird durch parallele Kräfte P_1, P_2 .... belastet; die Spannkräfte S sind Drücke. (Obere Gurtung des Binders eines Pfettendaches.) Das Biegungsmoment für irgend einen Querschnitt C stimmt überein mit dem Biegungsmomente für den entsprechenden Querschnitt C' eines

Digitized by Google

einfachen Balkens $a'b'$, welcher rechtwinklig zu den Lasten P ist, und dessen Stützpunkte den Punkten a und b entsprechen. Dieses Moment kann nach No. 69 mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmt werden. Die Rechnung würde liefern, wenn z. B. C zwischen P_2 und P_3 liegt: $M = R_1 x - P_1 e_1 - P_2 e_2$, wobei $R_1 = \frac{\Sigma Pb}{l}$. Die auf den rechtwinklig zur Stabachse angenommenen Querschnitt C wirkende Längskraft ist $N = -S - (R_1 - P_1 - P_2)\cos\alpha$, wobei α den Winkel bedeutet, welchen die Lasten P mit ab bilden. Für die Spannungen σ_1 und σ_2 erhält man (nach Gleich. 17 Seite 62)

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Me_1}{J}; \quad \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{Me_2}{J}.$$

Auf diese Weise kann man auch das Eigengewicht der Fachwerkstäbe berücksichtigen; indes begnügt man sich in der Regel damit, seinem Einflusse auf die Spannkräfte S Rechnung zu tragen, indem man die Stabgewichte auf die Knotenpunkte verteilt.

137. Dreiecknetze aus Stäben und gegliederten Scheiben. Die vom Stabe ab (Fig. 205a) auf die Knotenpunkte a und b übertragenen Kräfte R_1, R_2, S sind unabhängig von seiner Gestalt. Tritt an die Stelle jenes Stabes eine irgendwie geformte ebene, vollwandige oder starre gegliederte Scheibe, die nur in den Gelenken a und b mit den übrigen Teilen des Fachwerks zusammenhängt, und auf welche dieselbe Last R wirkt, so bleiben die Kräfte R_1, R_2, S die nämlichen. Es sind deshalb die Untersuchungen in No. 136 auch für die Berechnung solcher Fachwerkträger wichtig, die aus einfacheren dadurch entstanden sind, daß einzelne Stäbe der letzteren durch gegliederte Scheiben ersetzt werden. Ein Beispiel hierfür ist das in der Fig. 207a dargestellte, aus 4 gegliederten Scheiben und 7 Stäben bestehende Dreiecknetz; es kann aufgefaßt werden als einfacher Polonceau-Träger, Fig. 207b, dessen obere Gurtstäbe durch Fischbauchträger ersetzt worden sind.

Die gesamte gleichförmige Belastung des Binders sei $= P$, mithin die Knotenlast $= \frac{1}{16} P$. Hat man unter Einführung der Knotenlasten $\frac{1}{4} P$ für den Träger in Fig. 207b den Kräfteplan 207c gezeichnet, so muß man den Fischbauchträger ab für die in der Fig. 207d veranschaulichte Angriffsweise berechnen. Außer den senkrechten Lasten $\frac{1}{16} P$ und den entsprechenden Stützenwiderständen $\frac{3}{32} P$ wirken auf diesen Träger noch in der Richtung ab die Drücke O', deren Größe der Plan Fig. 207c angibt. Fig. 207e zeigt den Kräfteplan für die senkrechte Belastung. Die Kräfte O' beanspruchen nämlich im vorliegenden Falle nur die obere Gurtung des Fischbauchträgers, und man

Digitized by Google

hat deshalb nur nötig, zu den für diese Gurtung aus dem Plane Fig. 207e erhaltenen Spannkräften (Drücken) 1′, 2′, 3′, 4′ noch den Wert O' (Druck) zu addieren, während die in Fig. 207e für die untere Gurtung und die Diagonalen gegebenen Kräfte ungeändert bleiben. Der Fischbauchträger bc wird ebenso behandelt. Zu jedem der Drücke, welche der Plan Fig. 207e für die obere Gurtung liefert, ist der Druck O'' zu fügen. Die Vorzeichen sind in die Figuren eingetragen worden.

Es ist auch möglich, einen zusammenhängenden Kräfteplan zu zeichnen. Der einzuschlagende Weg soll unter Voraussetzung des in Fig. 208a dargestellten Belastungsfalles beschrieben werden. Auf die eine Dachhälfte wirke ein Winddruck W, welcher die Knotenpunkte

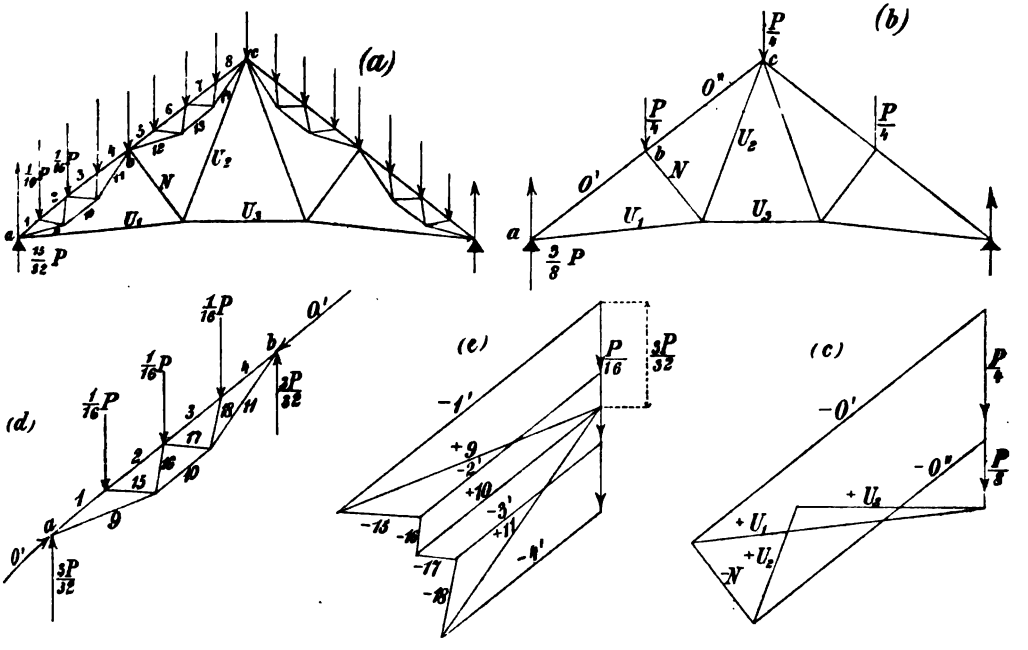


Fig. 207 a, b, c, d u. e.

mit $\frac{1}{8}W$ bezieh. $\frac{1}{16}W$ belastet und die Auflagerkräfte A und B hervorruft. Der Widerstand A sei senkrecht gerichtet;*) B geht durch den Schnittpunkt der Kräfte A und W. Wäre die Spannkraft U_1 gegeben, so könnte man das dem Knotenpunkte a entsprechende Kräftepolygon $dmefgd$ (Fig. 208b) zeichnen. Um U_1 zu finden, denke man den Fischbauchträger ab durch einen geraden Stab ab ersetzt und seine

*) Es liege also das bewegliche Auflager bei A.

Digitized by Google

Belastung $3 \cdot \frac{1}{8} W$ auf die Knotenpunkte a und b verteilt. In a greift dann die Last $2 \cdot \frac{1}{8} W = \overline{mf}$ an, und man erhält für a das Kräftepolygon $dmfgd$, in welchem $fg \parallel ab$ ist. Wird auch die Belastung des

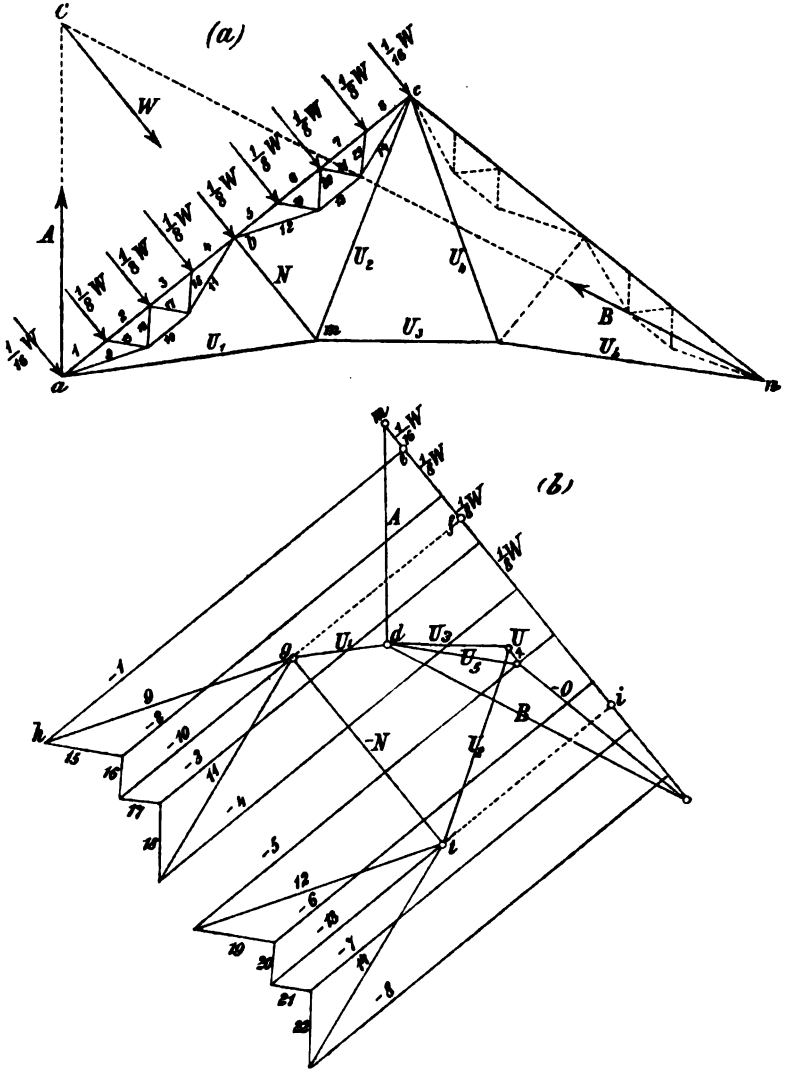


Fig. 208 a u. b.

Fischbauchträgers bc auf die Knotenpunkte b und c verteilt und dieser Träger durch einen Stab bc ersetzt, so kommt auf b die Belastung

Digitized by Google

$4 \cdot \frac{1}{8} W = \overline{fi}$ und man erhält nach Ziehen der Geraden $gt \parallel N$ und $it \parallel bc$ die im Stabe bm auftretende Spannkraft N. Der Kräfteplan läßt sich jetzt nach den früher gegebenen Regeln fertigstellen; man kann von Knotenpunkt zu Knotenpunkt vorgehen, ohne jedesmal mehr als zwei unbekannten Spannkräften zu begegnen. Die in der Fig. 208a gestrichelten Stäbe sind spannungslos. O bedeutet den Druck in der Gurtung cn.

Dem Leser wird empfohlen, in gleicher Weise den Belastungsfall in Fig. 207a, sowie den Einfluß eines auf die rechte Dachhälfte wirkenden Winddruckes zu untersuchen.

§ 29.

Kräftepläne für Polonceau-Träger, in Verbindung mit einigen allgemeineren Untersuchungen.

138. Die Entwicklung der Kräftepläne für die in den Figuren 210 und 212 dargestellten wichtigen Polonceau-Träger soll durch die Betrachtung des Trägers in Fig. 209 eingeleitet werden.

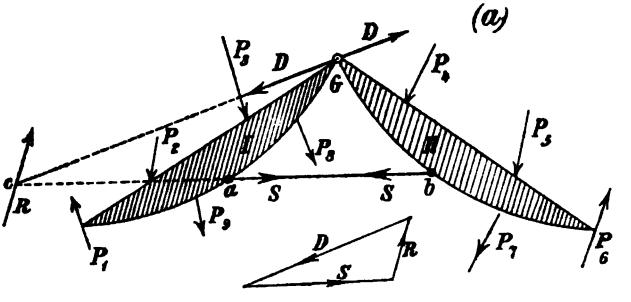


Fig. 209 a u. b.

Dieser Träger besteht aus zwei (vollwandigen oder gegliederten) Scheiben, welche miteinander durch ein Gelenk G und einen Stab ab verbunden sind. Bei a und b ist der Stab gelenkartig befestigt. An der Scheibe I greifen außer den äußeren Kräften P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, welche sämtlich gegeben sein mögen und deren Mittelkraft $= R$ sei, noch an: die Spannkraft S des Stabes ab und die Kraft D, mit welcher die Scheibe II im Punkte G auf die Scheibe I wirkt. Da Gleichgewicht nur dann besteht, wenn die Kraft D durch den gegebenen Schnittpunkt c von R und S geht, so ist die Richtung von D bekannt, und es lassen sich S und D mit Hilfe eines Kräftedreiecks bestimmen.

Digitized by Google

Nun sind alle auf die Scheibe *I* wirkenden Kräfte bekannt, desgleichen die an der Scheibe *II* angreifenden. Sind die Scheiben gegliedert und einfache Dreiecknetze (wie beispielsweise in den Figuren 210 u. 212), so ist der Träger ein innerlich statisch bestimmter. Für jede der beiden Scheiben läßt sich ein Cremonascher Kräfteplan zeichnen, wobei darauf zu achten ist, daß für das Kräftepolygon der Scheibe *I* die Reihenfolge P_1, P_2, P_3, D, P_8, S, P_9 zu wählen ist und für das Kräftepolygon der Scheibe *II* die Reihenfolge: D, P_4, P_5, P_6, P_7, S. In besonderen Fällen sind Vereinfachungen möglich, auf welche bei Lösung der beiden folgenden Aufgaben hingewiesen werden soll.

139. Kräfteplan für den Dachbinder in Fig. 210. Die Knotenlasten seien senkrecht und mögen zunächst gleich groß angenommen werden. Die Spannkraft im Stabe 11 sei S_{11}; sie läßt sich auf dem in No. 138 angegebenen Wege finden, wird aber im vorliegenden Falle kürzer mit Hilfe des *Ritter*schen Verfahrens abgeleitet. Führt man durch d einen senkrechten Schnitt und stellt die Momentengleichung für den Punkt d auf, so erhält man (wenn λ die Feldweite bedeutet)

$$A\,4\lambda - P(3\lambda + 2\lambda + \lambda) - S_{11} \cdot \overline{dr} = 0$$

und $\left(\text{wegen } A = \frac{7P}{2}\right)$

$$S_{11}\,\overline{dr} = 2P \cdot 4\lambda.$$

Nimmt man in der linken Auflagersenkrechten eine Kraft $R = 2P$ an, deren Moment bezüglich d gleich $2P \cdot 4\lambda$ ist, bringt hierauf Stabachse 11 mit R in g zum Schnitt, zieht die Gerade dg und zerlegt im Kräfteplane R nach den Richtungen $GD \parallel gd$ und $ED \parallel rg$, so ist $\overline{DE} = S_{11}$. Der Sinn von S_{11} ist so zu nehmen, daß der Umfahrungssinn des Polygons $EGDE$ ein stetiger ist.

Nachdem die auf die Scheibe *I* wirkenden Kräfte in der Reihenfolge S_{11}, A, P, P, ... aneinandergesetzt worden sind, bietet die Aufzeichnung eines *Cremona*schen Kräfteplanes keinerlei Schwierigkeiten; in Fig. 210b wurde er für die linke Hälfte des symmetrischen Trägers dargestellt. Die Vorzeichen der Spannkräfte gibt Fig. 210a an.

Es mögen noch zwei andere Verfahren, den Punkt D in Fig. 210b zu bestimmen, mitgeteilt werden, welche beide auch bei ungleich großen und schräg gerichteten Knotenlasten mit Vorteil anzuwenden sind.

Man beginne die Aufzeichnung des Kräfteplanes mit der Bestimmung der auf den Knoten f wirkenden Spannkräfte 1 und 2, ermittle hierauf 3 und 4, sodann 5 und 6. An jedem der folgenden Knotenpunkte (b oder a) begegnet man drei unbekannten Spannkräften. Geht man zum Knoten b und nimmt für die eine der drei Unbekannten

Digitized by Google

z. B. für 7 den beliebigen Wert $A_1 S$ an, so kann man das dem Knotenpunkte b entsprechende Kräftepolygon $A_1 SFLJB_1 A_1$ zeichnen und

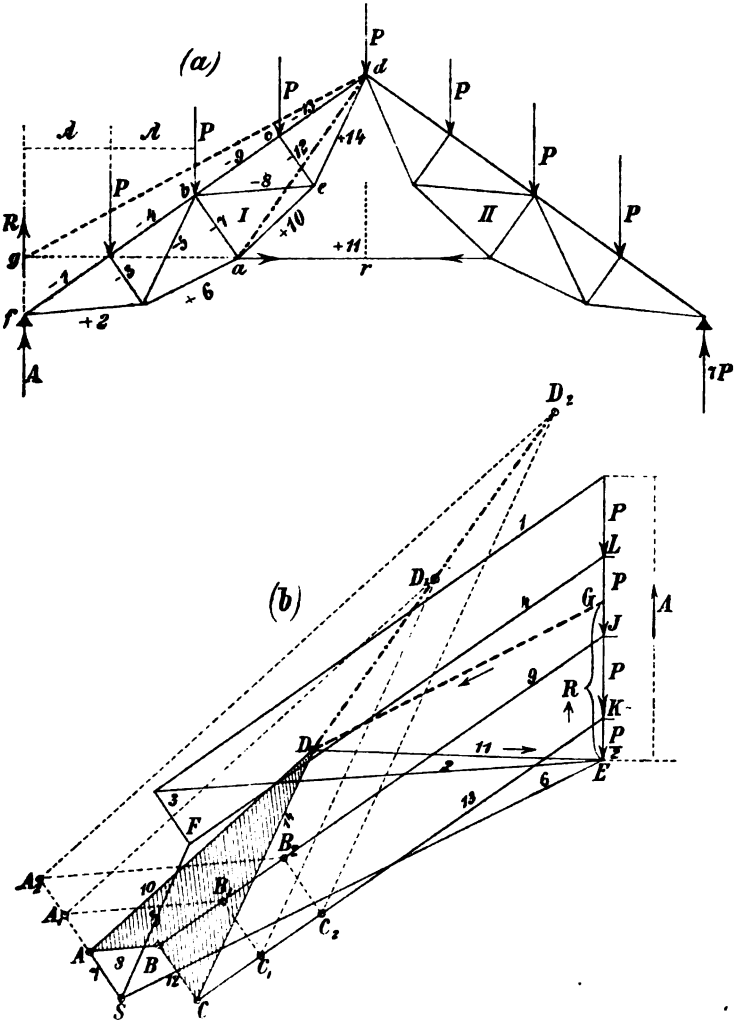


Fig. 210 a u. b.

hierauf die Kräftepolygone für die Knoten c und e, nämlich $B_1 JKC_1 B_1$ und $B_1 A_1 D_1 C_1 B_1$*). Eine zweite Annahme: $\overline{A_2 S}$ = Spannkraft 7

*) In Fig. 210b ist $A_1 B_1 \parallel A_2 B_2 \parallel 8$; $B_1 C_1 \parallel B_2 C_2 \parallel 12$; $C_1 D_1 \parallel C_2 D_2 \parallel 14$ $D_1 A_1 \parallel D_2 A_2 \parallel 10$.

Digitized by Google

liefert für e das Polygon $B_2 A_2 D_2 C_2 B_2$. Der Eckpunkt D des wirklichen Kräftepolygons für e muß aber auf der durch E zum Stabe 11 gezogenen Parallelen liegen; er ist bestimmt als Schnittpunkt dieser Parallelen mit der durch die Punkte D_1 und D_2 gelegten Geraden. Denn die Eckpunkte A, B, C des Kräftepolygons $ABCDA$ bewegen sich infolge Änderung der Spannkraft 7 auf den festen Geraden 7, 9, 13, und es beschreibt deshalb auch der Punkt D eine gerade Linie*).

Ein drittes Verfahren, den Punkt D zu bestimmen, gründet sich auf die folgende Überlegung. Betrachtet man in der Fig. 210a den

*) Es folgt dies aus dem geometrischen Satze:

Ändert ein n-Eck in der Weise seine Form, daß sämtliche Seiten durch feste Punkte einer und derselben Geraden gehen (die in den vorliegenden Anwendungen die unendlich ferne Gerade ist), während $n-1$ Eckpunkte gerade Linien beschreiben, so bewegt sich auch der letzte Eckpunkt in einer Geraden.

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich die wichtige Aufgabe lösen: ein ***n-Eck zu zeichnen, dessen sämtliche Eckpunkte 1, 2, 3 . . . . in gegebenen Geraden liegen, und dessen sämtliche Seiten gegebene Richtungen besitzen.***

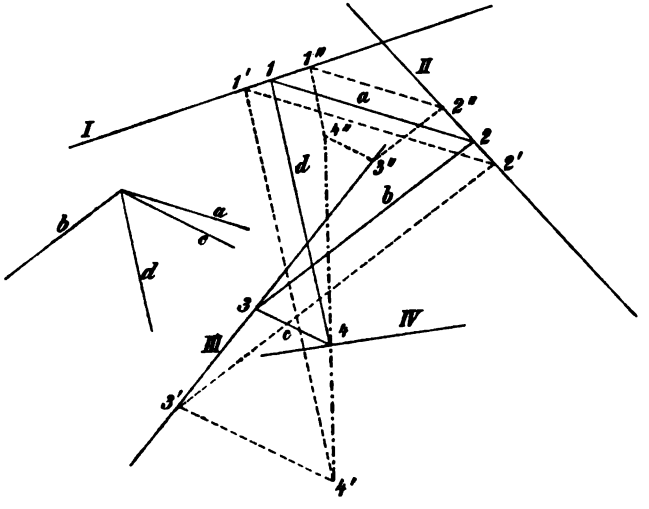


Fig. 211.

In der Fig. 211 wurde diese Aufgabe für den Fall $n = 4$ gelöst. Gesucht ist ein Polygon, dessen Eckpunkte 1, 2, 3, 4 auf den Geraden *I*, *II*, *III*, *IV*, liegen, und dessen Seiten den gegebenen Geraden a, b, c, d parallel sind. Es wurden zwei beliebige Vierecke $1'2'3'4'$ und $1''2''3''4''$ gezeichnet, deren Seiten den Geraden a, b, c, d parallel sind, und deren Ecken $1'$, $2'$, $3'$ und $1''$, $2''$, $3''$ beziehungsweise in *I*, *II*, *III* liegen. Dann liegt, nach dem vorstehenden Satze, 4 auf der Geraden $4'4''$, und es ist dieser Punkt deshalb der Durchschnittspunkt der Geraden $4'4''$ und *IV*.

Digitized by Google

Linienzug *abcd* als einen Kräftezug, *e* als den Pol desselben, und die Geraden 10, 8, 12, 14 als Seilstrahlen, so ist das Polygon $D_1 A_1 B_1 C_1 D_1$ ein zugehöriges Seilpolygon, ebenso das Polygon $D_2 A_2 B_2 C_2 D_2$. Die

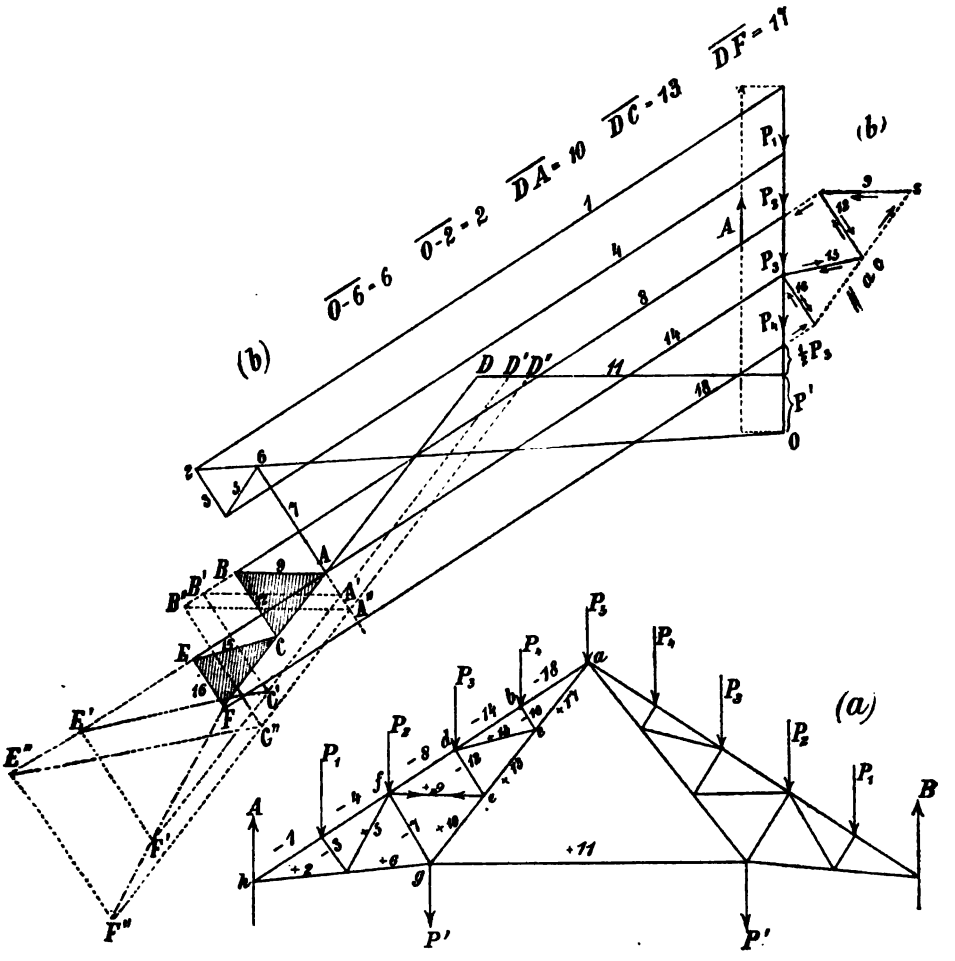


Fig. 212 a u. b.

Gerade $D_1 D_2$ muß deshalb parallel zu der Mittelkraft *ad* der Kräfte *ab*, *bc*, *cd* sein, und es ist ersichtlich, daß man, um den Punkt *D* zu finden, nur nötig hat, das eine der beiden Versuchspolygone, z. B.

Digitized by Google

$A_1 B_1 C_1 D_1 A_1$ zu zeichnen. Eine durch D_1 zur Geraden ad gezogene Parallele $D_1 D$ bestimmt auf der ED den Punkt D.

140. Kräfteplan für den Dachbinder in Fig. 212. Es handelt sich hier wieder um einen besonderen Fall des in Fig. 209 dargestellten Trägers. Man könnte die Spannkraft im Stabe 11 auf die in No. 139 angegebene Art bestimmen, hierauf die an der Scheibe agh angreifenden Kräfte in der Reihenfolge 11, P', A, P_1, P_2, ... aneinandersetzen und für diese Scheibe einen Cremonaschen Kräfteplan zeichnen. Ein zweiter Weg, der *ebenfalls bei beliebiger Gestalt der Gurtungen und bei beliebig gerichteten Lasten zum Ziele führt,* ist der folgende.

Nachdem man der Reihe nach die Spannkräfte 1, 2, 3, 4, 5, 6 bestimmt hat, gehe man zum Knotenpunkte f, an welchem (ebenso wie am Knoten g) drei unbekannte Spannkräfte, nämlich 7, 8, 9 auftreten, und nehme für die eine, z. B. für 7, nacheinander zwei beliebige Werte an. Die erste Annahme sei: $7 = \overline{6\,A'}$, die zweite: $7 = \overline{6\,A''}$. Kennt man 7, so ist man im stande, alle übrigen Spannkräfte zu bestimmen. In Fig. 212b sind $D'A'B'C'D'$ und $D''A''B''C''D''$ die jenen beiden Annahmen entsprechenden Kräftepolygone für den Knoten e und $D'C'E'F'D'$, $D''C''E''F''D''$ die Kräftepolygone für den Knoten c. $DABCD$ und $DCEFD$ sind die vorläufig unbekannten Kräftepolygone für e und c. Man kann nun wie folgt schließen.

1) Die Ecken A, B, D des Polygons $DABCD$ bewegen sich auf den gegebenen Geraden 7, 8, 11; mithin beschreibt auch C eine Gerade.
2) Die Ecken D, C, E des Polygons $DCEFD$ bewegen sich auf gegebenen Geraden; mithin beschreibt auch F eine Gerade, deren Lage durch die beiden Punkte F' und F'' bestimmt ist.

Da aber die Ecke F des wirklichen Kräftepolygons auf der Geraden 18 liegen muß, so ist die Lage dieses Punktes bestimmt und mit ihr sämtliche Spannkräfte 7 bis 18.

Liegen nun, wie in Fig. 212a, die Punkte a, b, d, f auf einer Geraden, desgleichen die Punkte a, c, e, g, so gelangt man schneller zum Ziele, wenn man beachtet, daß die am Knoten b angreifenden, gleich gerichteten Kräfte 14 und 18 durch ihre Mittelkraft 18—14 ersetzt werden dürfen, worauf es möglich ist, die Spannkraft 16 zu bestimmen. Zur Erläuterung des Verfahrens diene Fig. 213; es wurden dort 14 und 18, deren Sinn noch unbekannt ist, als Zugkräfte angenommen. In gleicher Weise läßt sich nun am Knoten c die Spannkraft 15, am Knoten d die

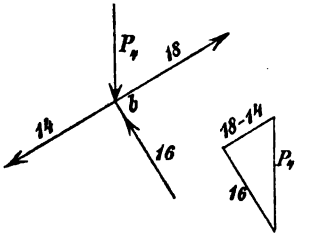


Fig. 213.

Digitized by Google

Spannkraft 12 und schließlich am Knoten e die Spannkraft 9 bestimmen. Die Ermittelung aller dieser Kräfte ist in der Fig. 212 angegeben worden. Jetzt ist man im stande, das Kräftepolygon für den Knotenpunkt f, an welchem nur noch zwei Unbekannte (7 und 8) auftreten, zu zeichnen und hierauf alle übrigen Spannkräfte zu bestimmen.

141. Erweiterung der Untersuchung in No. 138. Wird das Gelenk G des in Fig. 209 dargestellten Trägers durch 2 Stäbe cd und ef ersetzt, Fig. 214, so wirken auf die Scheibe I außer den gegebenen äußeren Kräften, deren Mittelkraft $= R$ sein möge, noch drei Spannkräfte S_1, S_2, S_3, welche sich mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens bestimmen lassen, vorausgesetzt, daß sich die Achsen der drei Stäbe nicht in einem Punkte schneiden*). Die Mittelkraft D aus S_2 und S_3 geht durch den Schnittpunkt G' der Stäbe cd und ef, sowie durch den Punkt g, in welchem R von ab getroffen wird. Man bezeichnet auch den Punkt G' (nach *Föppl*) als ein **gedachtes Gelenk**; dasselbe geht in ein **wirkliches Gelenk** über, sobald die beiden Punkte e und c oder die beiden Punkte f und d oder schließlich alle vier Punkte c, d, e, f zusammenfallen.

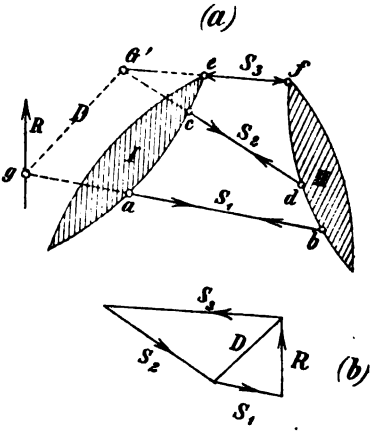


Fig. 214 a u. b.

Wirken auf die Stäbe ab, cd, ef Lasten, so werden diese nach No. 137 auf die Punkte a, b, c, d, e, f übertragen, worauf die Spannkräfte S_1, S_2, S_3 genau wie vorhin ermittelt werden können. An die Stelle jener Stäbe können auch starre Scheiben treten, welche durch je zwei (wirkliche oder gedachte) Gelenke mit den Scheiben I und II zusammenhängen. Einen solchen Fall stellt die Fig. 215 dar. Die Scheiben I und II wurden durch die Scheibe III und das Gelenk G_2 zu einem starren Gebilde verbunden. Indem man die auf die Scheibe III wirkenden Lasten auf die Punkte G_1 und G_3 verteilt, führt man die Berechnung des fraglichen Trägers auf diejenige des in No. 139 untersuchten Trägers zurück.

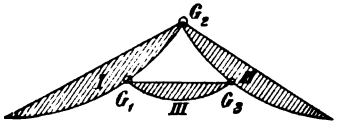


Fig. 215.

*) Die drei Geraden ab, cd, ef dürfen also auch nicht parallel sein.

Digitized by Google

Die vorstehenden Betrachtungen geben uns ein einfaches Mittel an die Hand, um aus statisch bestimmten gegliederten Scheiben und aus Stäben eine ganze Reihe von innerlich statisch bestimmten Fachwerkträgern herzuleiten. Ein Beispiel zeigt die Fig. 215a. Die beiden Scheiben *V* und *VI* wurden durch das Gelenk G_1 und den Stab 5 zu einem starren Gebilde vereinigt, welches wir als Scheibe (*V*, *VI*, 5) bezeichnen wollen, und in gleicher Weise wurden die Scheiben *IV* und *III* durch G_2 und 4 zur Scheibe (*IV*, *III*, 4) verbunden. Hierauf wurden die Scheiben (*V*, *VI*, 5) und (*III*, *IV*, 4) durch die Stäbe 1, 2, 3 zu einem starren Ganzen vereinigt und schließlich die Scheiben *I* und *II* hinzugefügt. Es entsteht ein Träger, welcher sich von dem in der Fig. 215 dargestellten Träger nur dadurch unterscheidet, daß an die Stelle der Scheibe *III* die Scheibe (*III*, *IV*, *V*, *VI*, 1, 2, 3, 4, 5) getreten ist. Da die einzelnen Scheiben Dreiecknetze sind, ist der Träger statisch bestimmt, sobald sämtliche äußeren Kräfte gegeben sind. Dies ist z. B. der Fall, wenn er nur ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk erhält.

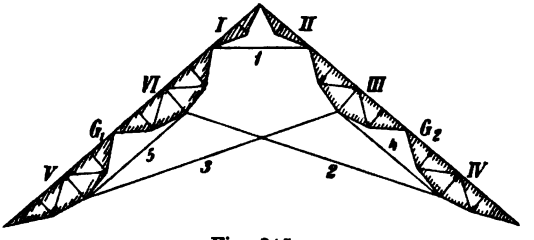


Fig. 215a.

IX. Abschnitt.

Der einfache Fachwerkbalken.

§ 30.

Die ungünstige Belastungsweise. Einflußlinien.

142. Belastungsgesetze. Wir gehen jetzt dazu über, die wichtigsten statisch bestimmten Träger ausführlicher zu behandeln und beginnen mit dem in einer lotrechten Ebene angenommenen *einfachen Fachwerkbalken*. Die Lasten seien senkrecht und abwärts gerichtet. Dann sind auch beide Stützenwiderstände senkrecht, und es ist deshalb für die folgenden Betrachtungen gleichgültig, auf welcher Seite das

Digitized by Google

feste oder das bewegliche Auflager liegt. Zunächst soll die Frage nach der ungünstigsten Belastungsweise entschieden werden. Wir setzen ein einfaches Dreiecknetz voraus und knüpfen an die im § 26 zur Erläuterung der Verfahren von *Culmann* und *Ritter* durchgeführten Untersuchungen an: sie zeigten, *daß die Spannkräfte in den Gurtungen des einfachen Fachwerkbalkens bei voller Belastung am größten werden, und daß die obere Gurtung stets gedrückt, die untere Gurtung stets gezogen wird.* Sodann wurde durch jene Untersuchung der bei Satteldächern vorkommende besondere Fall ausgeschieden, in welchem auch die Spannkräfte in den Gitterstäben bei voller Belastung des Balkens am größten werden. Es bleibt also nur noch anzugeben, für welchen Belastungszustand die Spannkraft in einem *Füllungsstabe* ihre Grenzwerte annimmt, wenn ein durch diesen Stab geführter Schnitt *tt* zwei Gurtstäbe trifft, die sich außerhalb der Stützweite schneiden. Der fragliche Stab sei eine links steigende Diagonale (Fig. 216), und es möge zunächst der Einfluß von Lasten untersucht werden, die auf den rechts vom Schnitte *tt* gelegenen Trägerteil wirken. Am linken Trägerteile greift dann nur eine äußere Kraft an, nämlich der Stützenwiderstand *A*. Um *D* zu finden, werde das auf Seite 210 beschriebene *Culmann*sche Verfahren angewendet. Der Schnittpunkt von *A* und *U* wird mit dem Schnittpunkt von *O* und *D* durch die Gerade *L* verbunden, und hierauf werden der Reihe nach die geschlossenen Kräftepolygone *A*, *U*, *L* und *L*, *D*, *O* gezeichnet (Fig. 216b). Es stellt sich heraus, daß die fragliche Diagonale *gezogen* wird, sobald sich *O* und *U* links von *A* oder rechts von *tt* schneiden. Der Fall, in welchem sich *O* und *U* zwischen *A* und *tt* treffen, ist durch die Voraussetzung ausgeschlossen. Um nun den Einfluß von Lasten zu bestimmen, welche auf den linken Trägerteil wirken, wird zweckmäßig der rechte Trägerteil betrachtet, weil jetzt an diesem nur eine einzige äußere Kraft, der Stützenwiderstand *B*, angreift. Das Kräftepolygon *B*, *U*, *D*, *O* wird ganz ebenso wie vorhin gefunden; es liefert für *D* einen *Druck*, sobald sich *O* und *U* links von *tt* oder rechts von *B* schneiden; ein zwischen *tt* und *B* liegender Schnittpunkt von *O* und *U* ist durch die Voraussetzung ausgeschlossen.

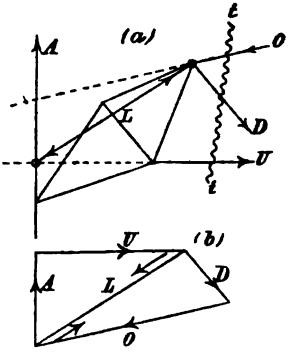


Fig. 216.

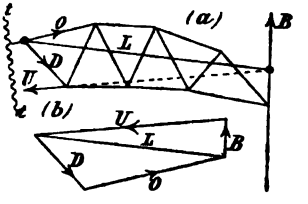


Fig. 217 a u. b.

Hieraus folgt der Satz:

Digitized by Google

Schneiden sich O und U außerhalb der Stützweite, so rufen alle Lasten, welche in Knotenpunkten rechts von tt angreifen, in der Diagonale D) einen Zug hervor und alle Lasten, welche in Knotenpunkten links von tt angreifen, einen Druck.*

Wir setzen jetzt voraus, daß die Belastung an der *unteren* Gurtung angreift (Fig. 218). Zwischen den Knoten F_1 und F_2, von denen der erste links von tt, der zweite rechts von tt liegt, wirke eine Last P; sie sei in zwei Seitenkräfte P_1 und P_2 zerlegt, welche in F_1 und F_2 angreifen. P_1 ruft in D einen Druck hervor, P_2 einen Zug. Bei einer bestimmten Lage von P wird $D = 0$ sein. Durch Lasten, welche sich rechts von dieser Grenzlage befinden, wird D gezogen; durch Lasten links von der Grenzlage wird D gedrückt. Bringt man nun den Gurtstab O mit den Auflagersenkrechten in A' und B' zum Schnitt und zieht die Geraden $A'F_1$ und $B'F_2$, so entspricht einer durch den Schnittpunkt E dieser Geraden gehenden Last P der Wert $D = 0$. Der Beweis hierfür ist der folgende: Wird $\overline{CG} = P$ gemacht (Fig. 218b) und $CO \parallel A'E$,

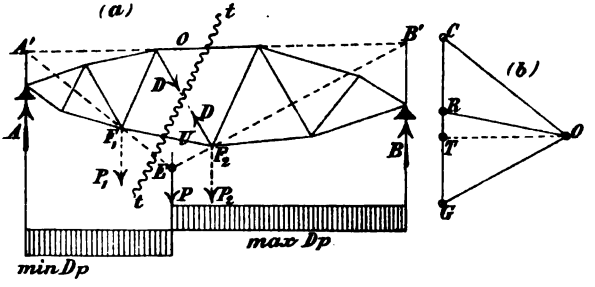


Fig. 218 a u. b.

$GO \parallel EB'$ gezogen, sodann $OR \parallel F_1F_2$ und $OT \parallel A'B'$, so ist nach No. 100: $CR = P_1$ und $RG = P_2$, ferner: $\overline{GT} = B$ und $\overline{TC} = A$. Es läßt sich deshalb das Polygon $A'F_1F_2B'$ als ein Seilpolygon der Kräfte A, P_1, P_2, B auffassen, und hieraus folgt, daß die Mittelkraft R der links von tt am Träger angreifenden äußeren Kräfte A und P_1 durch den Schnittpunkt der Gurtstäbe O und U geht, welche mit den vom Schnitte tt getroffenen Seilpolygonseiten zusammenfallen. Auf Seite 213 wurde aber nachgewiesen, daß sich $D = 0$ ergibt, sobald jene Mittelkraft R durch den Schnittpunkt von O und U geht. Es ist

*) In der Folge bezeichnen wir, um kurz zu sein, die Stäbe und die in denselben wirksamen Spannkräfte mit denselben Buchstaben.

Digitized by Google

demnach die Senkrechte durch E eine *Belastungsscheide;* links von E liegt die *negative,* rechts von E die *positive Beitragstrecke* des Trägers. Die ausschließliche Belastung der letzteren Strecke erzeugt in der fraglichen Diagonale den größten Zug d. i. $_{max}D_p$ und die ausschließliche Belastung der ersteren den größten Druck, nämlich $_{min}D_p$. Durch den Zeiger p ist angedeutet, daß es sich hierbei nur um den Einfluß der beweglichen Last handelt.

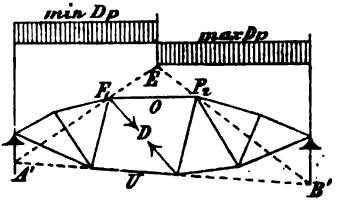


Fig. 219.

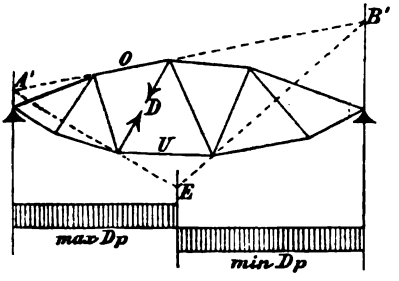


Fig. 220.

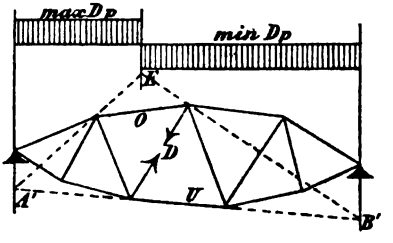


Fig. 221.

Ganz ähnlich wird der Fall untersucht, in welchem die Lasten in den Knotenpunkten der oberen Gurtung angreifen; er ist in der Fig. 219 dargestellt worden, während die Figuren 220 und 221 die ungünstigsten Belastungsweisen für eine rechts steigende Diagonale angeben.

143. Einflußlinien. Die Einflußlinien für die Spannkräfte in den Stäben eines einfachen Fachwerkbalkens lassen sich schnell zeichnen, sobald die Spannkräfte infolge der in den Figuren 222 und 223 dargestellten Belastungszustände bekannt sind. In Fig. 222 ist angenommen worden, daß nur der dem Stützpunkte B benachbarte Knoten K belastet ist und zwar so stark, daß am linken Auflager der Widerstand $A = 1$ hervorgerufen wird. Die Spannkraft, welche bei diesem Belastungszustande, den wir in der Folge kurz den *Zustand „$A = Eins$"* nennen wollen, in irgend einem Stabe der oberen oder unteren Gurtung entsteht, soll mit O' und U' bezeichnet werden, die Spannkraft in einem Füllungsstabe mit D'. Man findet diese Kräfte am schnellsten mit Hilfe eines *Cremona*schen Planes; vergl. Seite 255 und Fig. 239.*)

*) Es genügt, die Spannkräfte in den links vom belasteten Knoten K liegenden Stäben zu bestimmen. Die Größe der in K anzunehmenden Last braucht man also nicht zu kennen.

Digitized by Google

In Fig. 223 ist der Zustand „$B = Eins$“ dargestellt worden; ihm mögen die Spannkräfte O'', U'', D'' entsprechen. Ist der Träger symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte, so ist der Kräfteplan für den Belastungsfall in Fig. 223 das Spiegelbild des Kräfteplanes für den Belastungsfall in Fig. 222. Es genügt dann für die folgenden Untersuchungen, den einen dieser beiden Kräftepläne zu zeichnen.

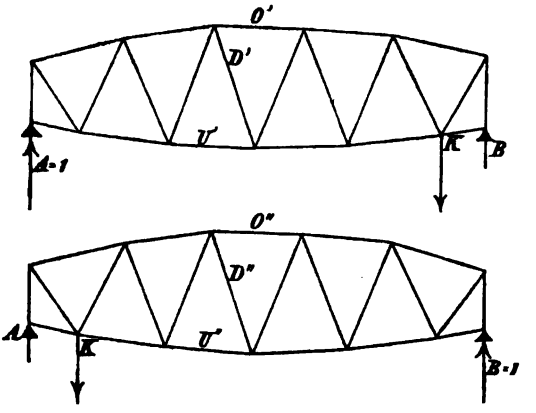


Fig. 222 u. 223.

Es bewege sich nun über den Balken eine senkrechte Last P; sie greife in den Knotenpunkten der unteren Gurtung an, Fig. 224. Gesucht sei die Einflußlinie für die Spannkraft in irgend einem Stabe des Balkens, beispielsweise für die Spannkraft D im Füllungsstabe CF_2. Liegt P rechts von F_2, im Abstande b von B, so greift links von dem durch D und durch zwei Gurtstäbe geführten Schnitte tt nur *eine* äußere Kraft an, nämlich der Widerstand $A = P\frac{b}{l}$ der linken Stütze. In dem fraglichen Füllungsstabe entsteht die Spannkraft

$$D = A \cdot D' = \frac{Pb}{l} D' = P\eta, \quad \text{wobei } \eta = D' \frac{b}{l}.$$

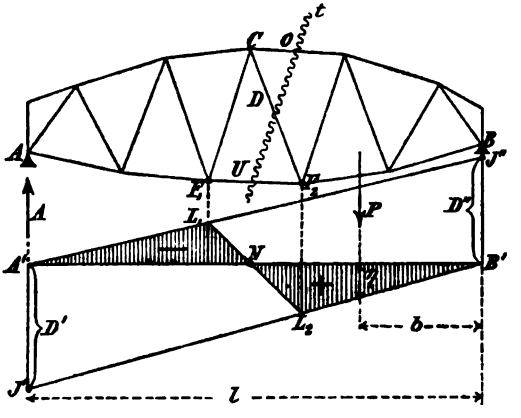


Fig. 224.

Trägt man also von einer Wagerechten $A'B'$ aus, auf der Senkrechten durch A die Strecke $\overline{A'J'} = D'$ ab und verbindet J' mit dem senkrecht unter B gelegenen Punkte B' durch eine Gerade, welche die Senkrechte durch F_2 in L_2 schneidet, so ist die Gerade $B'L_2$ ein Teil der gesuchten

Digitized by Google

Einflußlinie; denn die unter der Last P gemessene Ordinate dieser Geraden ist $= D' \frac{b}{l} = \eta$.

Ganz ebenso findet man, daß der Einfluß einer zwischen A und F_1 angreifenden Last P gleich der mit P multiplizierten Ordinate einer Geraden AL_1 ist, welche auf der rechten Auflagersenkrechten die Strecke $\overline{B'J''} = D''$ abschneidet. Dem Felde F_1F_2, entspricht dann (nach dem in No. 63 Seite 116 bewiesenen Satze) die Gerade L_1L_2, weshalb die in der Fig. 224 schraffierte Fläche die gesuchte Einflußfläche für die Spannkraft D ist. Im vorliegenden Falle ist D' positiv und D'' negativ.

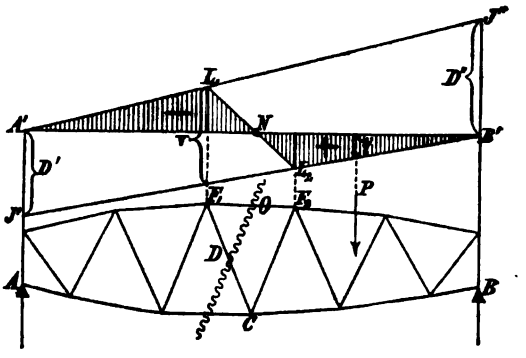


Fig. 225.

Fig. 225 stellt die Einflußlinie für die Spannkraft D im Stabe F_1C für den Fall vor, daß die Belastung an der oberen Gurtung angreift.

Man könnte auch die Einflußlinie $A'L_1L_2B'$ in der Weise finden, daß man die Gerade $B'L_2J'$ wie vorhin mittels der Ordinate $A'J' = D'$ festlegt, hierauf den Nullpunkt N in der auf Seite 237 angegebenen Weise bestimmt, durch N die Gerade L_2L_1 zieht und L_1 mit A' verbindet.

Man kann ferner den Einfluß des Stützenwiderstandes A auf die Spannkraft D mit Hilfe der Momentengleichung

$$Dr = Ax$$

bestimmen, wo r und x (Fig. 226) die Hebelarme von D und A in Bezug auf den Schnittpunkt F der Gurtstäbe O und U bedeuten, und findet dann für $A = 1$ den Wert

$$D' = +1\frac{x}{r},$$

und ganz in derselben Weise für den Einfluß von $B = 1$

$$D'' = -1\frac{x'}{r}.$$

Hieraus folgt dann, daß sich die Linien $A'L_1$ und $B'L_2$ in einem Punkte C der durch F gezogenen Senkrechten schneiden müssen, und

Digitized by Google

daß es also genügt, eine der beiden Strecken D' oder D'' aufzutragen. Bei weit abliegendem Punkte F ist dieses Verfahren allerdings unbequem.

Zu einer anderen, sehr wichtigen Eigenschaft der Einflußlinie für D gelangt man durch folgende Betrachtung.

Man nehme die über den Balken wandernde Last 1 im Punkte F_2 angreifend an und untersuche den Gleichgewichtszustand der rechts vom Schnitte tt angreifenden Kräfte in der Weise, daß man die von den beiden äußeren Kräften, nämlich dem Stützenwiderstande B und der Last 1 herrührenden Beiträge zur Spannkraft D getrennt ermittelt und dann zusammenzählt. B erzeugt für sich allein

$$D = B \cdot D'' = \frac{a_2}{l} D'' = -z,$$

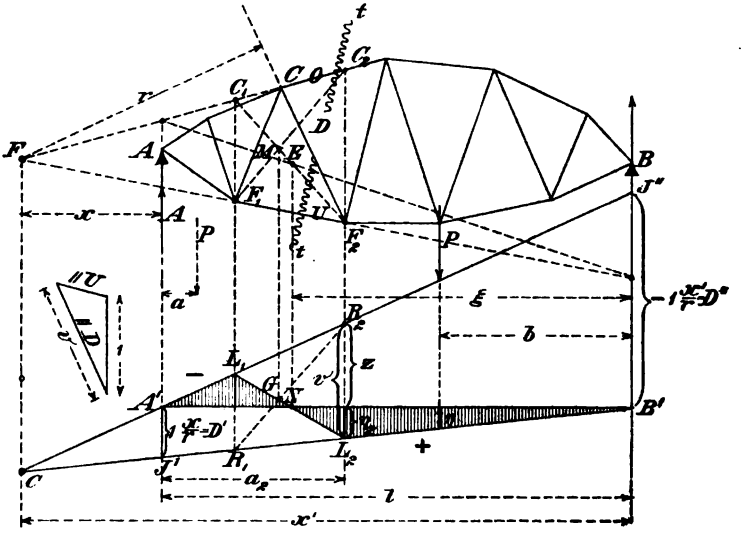


Fig. 226.

und die Wirkung der in P_2 angreifenden Kraft 1 erhält man durch Zerlegung von 1 nach den Richtungen von D und U, weil $O = 0$ ist, sobald B verschwindet. Die Seitenkraft parallel zu D sei v; dann entsteht infolge B und 1 zusammen:

$$D = v - z.$$

Dieser Wert muß aber gleich η_2 sein, und daraus folgt die wichtige Beziehung

$$\eta_2 + z = v,$$

Digitized by Google

mit deren Hilfe nach Auftragung der einen der beiden Geraden $B'J'$ oder $A'J''$ stets die andere schnell festgelegt werden kann.

Aus der Bedingung, daß sich die Geraden $A'L_1$ und $B'L_2$ in der Senkrechten durch den Schnittpunkt F der Gurtstäbe O und U treffen müssen, folgt noch: Bestimmt man in den Senkrechten durch F_1 und F_2 die Punkte C_1 und C_2 der Geraden O, ferner den Punkt R_1 der Geraden CL_2 und den Punkt R_2 der Geraden CL_1, so muß der Schnittpunkt G der Geraden L_1L_2 und R_1R_2 in der Senkrechten durch den Schnittpunkt M der Geraden C_1F_2 und C_2F_1 liegen. Bringt man weiter O mit der linken Auflagersenkrechten zum Schnitt, U mit der rechten, so trifft die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte die Gerade C_1F_2 in einem Punkte E, der senkrecht über dem Nullpunkte N (der in Figur 218 bereits auf andere Weise bestimmt worden ist) liegt. Es leuchtet ein, daß die Einflußlinie durch die Strecke v und einen der beiden Punkte G und N vollständig bestimmt ist. Greifen die Lasten in den Knotenpunkten der oberen Gurtung an, Fig. 225, so wird v durch Zerlegung der Last 1 nach den Richtungen O und D gewonnen.

Um die Einflußlinie für die Spannkraft in einem Gurtstabe zu finden, beachte man, daß diese Kraft im geraden Verhältnis steht zu dem Angriffsmoment für den dem fraglichen Stabe gegenüberliegenden Knotenpunkt. So ist z. B. die Spannkraft O_m der oberen Gurtung (Fig. 227): $O_m = -\frac{M_m}{r_m}$, wo M_m = Angriffsmoment in Bezug auf Knotenpunkt m und r_m = Abstand des Punktes m vom Stabe O_m. Greift nun die Belastung an der unteren Gurtung an und zeichnet man ein Dreieck $A'CB'$, dessen Spitze C senkrecht unter m liegt, und dessen Seite $B'C$ auf der Senkrechten durch A die Strecke $A'J' = x_m$ abschneidet, so ist dieses Dreieck die Einflußfläche für M_m.

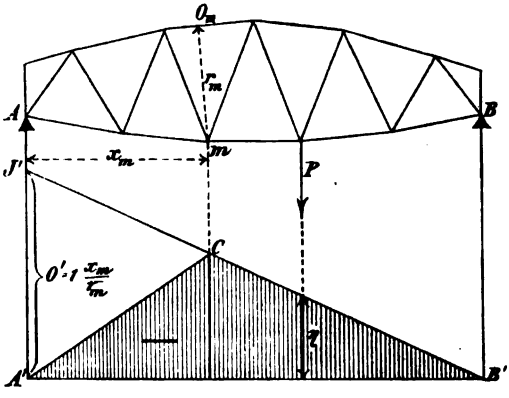


Fig. 227.

Macht man $\overline{A'J'} = -\frac{x_m}{r_m}$, so ist Dreieck $A\,CB'$ die Einflußfläche für O_m. Will man den für den Belastungszustand: $A = Eins$ gezeichne-

Digitized by Google

ten Kräfteplan benutzen, was namentlich dann zu empfehlen ist, wenn die Einflußlinien für die Spannkräfte D auf die vorhin beschriebene Weise gezeichnet werden, so mache man $\overline{A'J'} = O'$.

Daß $O' = -\frac{x_m}{r_m}$ ist, erkennt man, indem man das *Ritter*sche Verfahren auf den Belastungszustand $A = 1$ anwendet.

Für spätere Untersuchungen wird sich noch die Lösung der folgenden Aufgabe als nützlich erweisen. Gegeben sind die Einflußlinien für die Spannkräfte O und U in sämtlichen Gurtstäben eines Dreiecknetzes (gleichgültig ob einfacher Balken, oder *Gerber*scher Balken oder irgend eine andere Trägerart); gesucht sind die Einflußlinien für die Spannkräfte D in den Füllungsstäben.

Zunächst werde vorausgesetzt, daß die über den Träger wandernde senkrechte Lasteinheit in den Knotenpunkten der oberen Gurtung angreift. Die an einem Knotenpunkte K der unteren Gurtung wirkenden Spannkräfte mögen mit U_1, U_2, D_1, D_2 bezeichnet werden, Fig. 228. Die Ordinaten der Einflußlinien dieser Spannkräfte seien an ein und derselben (beliebigen) Stelle C beziehungsweise $= \eta_1, \eta_2, \eta', \eta''$; sie stellen diejenigen Spannkräfte U_1, U_2, D_1, D_2 vor, welche durch eine in C angreifende Last $P = 1$ hervorgerufen werden. Sind η_1 und η_2 bekannt, so findet man η' und η'', indem man das Kräftepolygon für den Knotenpunkt k zeichnet; man ist auf diese Art im stande, aus den Einflußlinien für U_1 und U_2 die Einflußlinien für D_1 und D_2 abzuleiten. In der Fig. 228 wurden η_1 und η_2 positiv angenommen; für η' ergab sich ein positiver, für η'' ein negativer Wert.

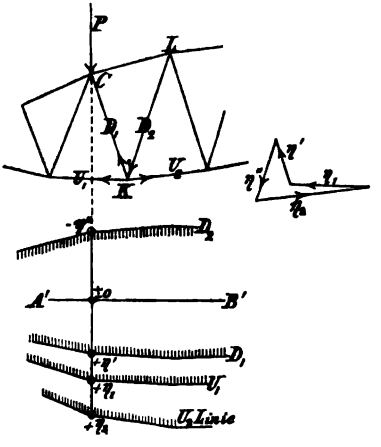


Fig. 228.

Auf die gleiche Weise lassen sich, wenn die Belastung unten angreift, die D-Linien aus den O-Linien ableiten; es werden dann Kräftepolygone für die Knotenpunkte der oberen Gurtung gezeichnet.*)

*) Es ist in der Regel vorteilhaft, keineswegs aber Bedingung, die Kräftepolygone für die Knoten der *unbelasteten* Gurtung zu zeichnen. Man könnte z. B. auch D_2 in Fig. 228 mit Hilfe des Kräftepolygons für den oberen Knoten L bestimmen; nur muß man dann darauf achten, daß, falls P bei L liegt, diese Kraft in das fragliche Polygon einzureihen ist.

Digitized by Google

Bei statisch bestimmtem Träger ist in der Regel die Einflußlinie für irgend eine Stabkraft bereits durch eine geringe Anzahl von Ordinaten gegeben. Beispielsweise läßt sich die Einflußlinie für die Spannkraft D im Stabe CF_2 des in der Fig. 224 dargestellten einfachen Balkens zeichnen, sobald zwei Ordinaten bekannt sind, nämlich irgend eine Ordinate der Geraden $B'L_2$ und irgend eine Ordinate der Geraden $A'L_1$. Ermittelt man den Nullpunkt N oder die Strecke v auf die früher beschriebene Weise, dann genügt es sogar, eine einzige Ordinate mit Hilfe eines Kräftepolygons zu bestimmen.

Hinsichtlich der Benutzung und Verwertung der Einflußlinien für den einfachen Balken, die uns vor allem einen guten Überblick über die Wirkung der Lasten verschaffen, verweisen wir auf § 19, und gehen nunmehr zur Darstellung derjenigen Verfahren über, welche uns am schnellsten die gesuchten Spannkräfte liefern.

§ 31.

Spannkräfte in den Gurtungen.

a. Gleichmäßige Belastung.

144. Die größten Spannkräfte in den Gurtungen entstehen bei voller Belastung des Trägers; sie lassen sich daher bei gleichförmiger Verkehrslast sehr schnell mit Hilfe des *Cremona*schen Verfahrens bestimmen. Es empfiehlt sich, zwei Kräftepläne zu zeichnen, einen für die ständige Belastung, einen zweiten für die Verkehrsbelastung.

Die ständige Belastung (g für die Längeneinheit) verteilt sich auf die Knoten der unteren und oberen Gurtung; die oben angreifende Last sei $= g_o$, die unten wirkende $= g_u$ für die Längeneinheit. Handelt es sich beispielsweise um einen Brückenträger mit oben liegender Fahrbahn, so ist

$$g_o = g_f + \tfrac{1}{2} g_t + g_{qo} \text{ und } g_u = \tfrac{1}{2} g_t + g_{qu},$$

wobei g_f den auf den fraglichen Hauptträger entfallenden Teil des Gewichtes der Fahrbahn,

g_{qo} desgl. des Gewichtes der oberen Querversteifung,

g_{qu} „ „ „ „ unteren „ ,

g_t das Gewicht des Hauptträgers

bedeutet, alle Gewichte für die Längeneinheit der Stützweite l gerechnet.*)

*) Bei unten liegender Fahrbahn wäre: $g_o = \tfrac{1}{2} g_t + g_{qo}$ und $g_u = g_f + \tfrac{1}{2} g_t + g_{qu}$.

Digitized by Google

In dem in der Fig. 229 dargestellten Falle kommt dann auf einen Knotenpunkt der oberen Gurtung die Last $g_o\lambda$, auf einen Knotenpunkt der unteren Gurtung die Last $g_u\lambda$. Der für diesen Belastungsfall (nach den im § 27 entwickelten Regeln) gezeichnete *Cremona*sche Plan liefert die in den Gurtungen und den Wand-

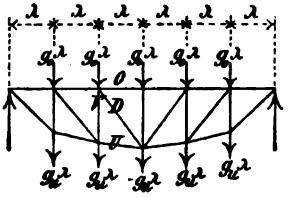


Fig. 229.

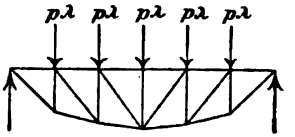


Fig. 230.

gliedern durch die ständige Belastung hervorgerufenen Spannkräfte O_g, U_g, D_g, V_g; der Kräfteplan für den Belastungsfall in Fig. 230 liefert die größten Werte O_p und U_p, zu denen schließlich die O_g und U_g addiert werden.

Meistens begeht man nur einen unwesentlichen Fehler, wenn man bei oben liegender Fahrbahn die gesamte Last g oben angreifend annimmt und bei unten liegender Fahrbahn nur die unteren Knoten mit g belastet. Es genügt dann im vorliegenden Falle, einen Kräfteplan für den in der Fig. 231 dargestellten Zustand gänzlicher Belastung zu zeichnen; er liefert neben den größten Werten O und U noch für die Wandglieder gewisse Spannkräfte D_q und V_q, aus denen sich die Spannkräfte D_g und V_g mit Hilfe der Gleichungen

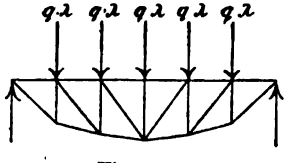


Fig. 231.

$$D_g = \frac{g}{q} D_q \text{ und } V_g = \frac{g}{q} V_q$$

ermitteln lassen. Die Multiplikation mit $\frac{g}{q}$ kann in der auf Seite 193 beschriebenen Art durch Zeichnung ausgeführt werden.

b. Die Verkehrslast besteht aus einem Zuge von Einzellasten.

145. Die Spannkraft O in einem Stabe BC (Fig. 232), welchem der Knotenpunkt A gegenüberliegt, ist nach Seite 212: $O = -\frac{M}{r}$, wobei M das Angriffsmoment für den Knoten A und $r = \overline{AE}$ die

Digitized by Google

Länge des von A auf BC gefällten Lotes bedeutet. Hat man M mit Hilfe des in No. 82 beschriebenen Verfahrens in der Form Hy dargestellt (H = Polweite des benutzten Seilpolygons), so ergibt sich (ohne Vorzeichen) $O = H\frac{y}{r}$. Trägt man also auf AE die Strecke $AE' = y$ auf, macht $\overline{BD} = H$ und zieht durch E' zu BC eine Parallele, welche AB in B' und AD in D' schneidet, so ist $\overline{B'D'} = O$. Ist die in Fig. 233 mit a bezeichnete wagerechte Projektion der Gurtstäbe konstant, so empfiehlt es sich, für H ein Vielfaches von a zu wählen, also $H = \varepsilon a$ zu setzen, wobei ε eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Bezeichnet man dann die senkrechte Höhe des Trägers im Punkte A mit h und den Neigungswinkel des Gurtstabes gegen die Wagerechte mit β, so erhält man (wegen $r = h\cos\beta$) die Gleichung

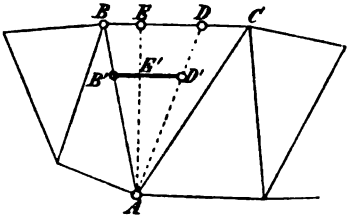


Fig. 232.

$$O = -\frac{M}{h}\sec\beta$$

und (wegen $M = \varepsilon a y$) ohne Vorzeichen: $\frac{1}{\varepsilon}O = a\sec\beta\,\frac{y}{h} = \overline{BC}\,\frac{y}{h}$;

denn es ist $\overline{BC} = a\sec\beta$.

Trägt man nun auf der Senkrechten AR die Strecke $\overline{AR'} = y$ auf und zieht durch R' zu BC eine Parallele, welche AB in B' und AC in C' schneidet, so erhält man

$$\overline{B'C'} = \frac{1}{\varepsilon}O, \text{ also}$$

$$O = \varepsilon\cdot\overline{B'C'}.$$

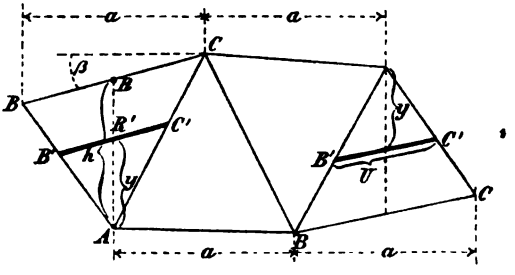


Fig. 233.

Auf dieselbe Weise werden die Kräfte U bestimmt.

Es empfiehlt sich, zur Ermittelung der O und U ein in möglichst großem Maßstabe gezeichnetes Trägernetz zu benutzen, damit tunlichst alle Linien $B'C'$ innerhalb des Netzes liegen. Der Kräfteplan zeichnet sich dann durch große Übersichtlichkeit aus. Die Multiplikation mit ε führt man am besten aus, indem man den Kräftemaßstab ändert. Hat man beispielsweise $H = \varepsilon a = 2a$ gewählt und bei der Ermittelung

Digitized by Google

der Momente den Kräftemaßstab $1^{cm} = 20^t$ angewendet, so geben die Strecken $B'C'$, im Maßstabe $1^{cm} = \varepsilon \cdot 20 = 40^t$ gemessen, die Kräfte O und U an.

146. Aufgabe. Paulischer Bogensehnenträger. Es ist die Form eines Fachwerkbalkens zu bestimmen, dessen Obergurtstäbe durch gleich große Spannkräfte O beansprucht werden. Die untere Gurtung sei wagerecht; die Wandglieder seien abwechselnd senkrecht und geneigt. Der Träger sei symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch seine Mitte; das Lot vom mittelsten Knotenpunkte der unteren Gurtung auf den gegenüberliegenden Obergurtstab soll die vorgeschriebene Länge r_4 erhalten. Vergl. Fig. 234, in welcher die Felderzahl = 8 ist. Die Feldweite sei λ.

Man ermittelt zunächst nach No. 82 (vergl. Fig. 128 u. 130 auf Tafel 1) die den Knotenpunkten 1, 2, 3, 4 entsprechenden Ordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 und zwar mit Hilfe einer Polweite $H = \varepsilon\lambda$*). Hierauf findet man für den Gurtstab ed die Spannkraft $O = \frac{Hy_4}{r} = \varepsilon \frac{y_4\lambda}{r_4}$, wofür nach einer entsprechenden Änderung des Kräftemaßstabes gesetzt werden darf; $O = \frac{y_4\lambda}{r_4}$. Dieser Wert wird zweckmäßig durch Zeichnung bestimmt, Fig. 234b. Gesetzt nun, es sei die Lage des Gurtstabes ab bekannt. Macht man dann $\overline{1b'} = y_1$ und zieht $b'a' \parallel ba$, so stellt die Strecke $b'a'$ die Spannkraft im Stabe ba vor. Diese Spannkraft soll aber gleich dem vorhin gefundenen Werte O sein; man hat also, um die unbekannte Lage von ab zu bestimmen, nur nötig, um den Punkt b' mit dem Halbmesser $\overline{b'a'} = O$ einen Kreisbogen zu schlagen, welcher $a1$ in a' schneidet und hierauf $ab \parallel a'b'$ zu ziehen. Jetzt verbindet man b mit 2 durch eine Gerade, macht $\overline{2c'} = y_2$, trägt die Strecke $\overline{c'b''} = O$ ein und zieht $bc \parallel b''c'$. So fortfahrend kann man auch die Lagen der Stäbe cd und de finden.

Zieht man durch den Punkt b' zur unteren Gurtung eine Parallele, welche die Füllungsstäbe $b2$ und $c2$ beziehungsweise in b_1 und c_1 schneidet, so stellt die Strecke b_1c_1 die Spannkraft U_2 im Untergurtstabe 12 vor; denn es ist (mit $\overline{1b} = h_1$): $U_2 = \frac{M_1}{h_1} = \frac{Hy_1}{h_1} = \frac{\lambda y_1}{h_1}$, und für die Strecke b_1c_1 findet man leicht den Wert $\overline{b_1c_1} = \frac{\lambda y_1}{h_1}$. In gleicher Weise werden die Spannkräfte U_3 und U_4 der Stäbe 23 und 34

*) Es wird daran erinnert, daß es sich um die durch Verkehrslast und ständige Belastung hervorgebrachten Momente Hy handelt.

Digitized by Google

gefunden. U_1 ist gleich der wagerechten Seitenkraft der Spannkraft O im Stabe ab.

In der Fig. 234c ist noch der häufig vorkommende Fall dargestellt worden, in welchem der Träger an dem einen oder an beiden Enden ein Feld von der Länge λ_1 besitzt, während alle übrigen Feldweiten $= \lambda$ sind. Es muß dann aufgetragen werden: $1b' = y_1 \frac{\lambda}{\lambda_1}$; im übrigen aber ist genau wie vorhin zu verfahren.

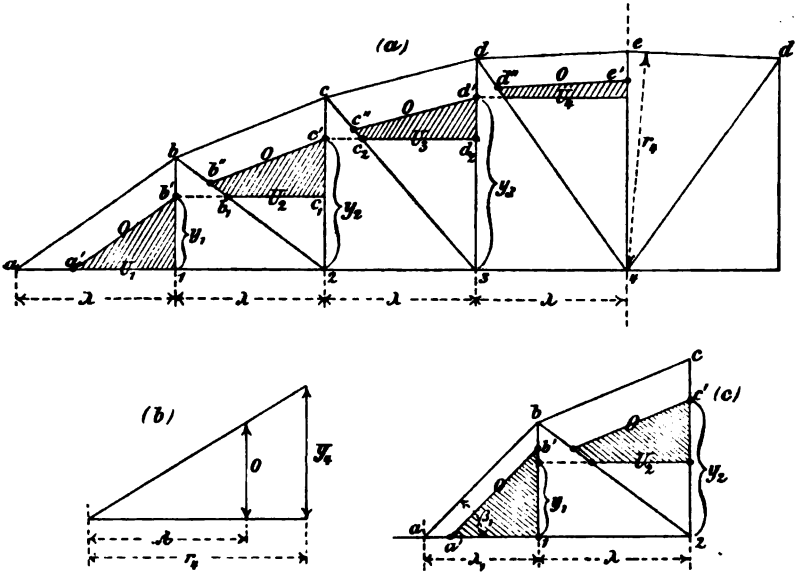


Fig. 234 a, b u. c.

Hervorzuheben ist allerdings, daß bei Eisenbahnbrücken die Linie der größten Momente Hy infolge der ungleichen Radstände und Achslasten, recht unregelmäßig verläuft, und daß die strenge Erfüllung der Bedingung einer gleich großen Obergurt-Spannkraft zu einer ästhetisch nicht befriedigenden Gurtform führt. Man wird also gut tun, die y-Linie vorher etwas abzurunden.

Bei gleichförmiger Verkehrslast ist die Linie der größten Momente eine Parabel (Fig. 124 Seite 135); es müssen sich also auch die Längen r_1, r_2, r_3, r_4 der von den Knotenpunkten 1, 2, 3, 4 auf die gegenüberliegenden Obergurtstäbe gefällten Lote zueinander verhalten, wie die Ordinaten einer über der Spannweite l errichteten Parabel, deren Pfeilhöhe zweckmäßig gleich r_4 gemacht wird. Die Gurtstücke ab, bc, cd, ... sind bestimmt als Tangenten der um die Punkte 1, 2, 3, . . . mit den Halbmessern r_1, r_2, r_3, . . . beschriebenen Kreisbögen.

Digitized by Google

§ 32.

Spannkräfte in den Füllungsstäben.

a. Gleichmäßige Belastung.

147. Aus den in No. 142 durchgeführten Untersuchungen geht hervor, daß die Laststellungen, welche ${}_{max}D_p$ und ${}_{min}D_p$ erzeugen, sich zur vollen Belastung ergänzen. Bezeichnet man also die bei voller Belastung des Balkens mit p f. d. Längeneinheit in der Diagonale entstehende Spannkraft mit D_p, so muß sein

$$ {}_{max}D_p + {}_{min}D_p = D_p = \frac{p}{g} D_g,$$

wo D_g die Spannkraft infolge der gleichförmigen ständigen Belastung g bedeutet. Hat man also ${}_{max}D_p$ in der Form

$$ {}_{max}D_p = Cp$$

erhalten, worin C einen von p unabhängigen Wert vorstellt so findet man

$$ {}_{min}D_p = -Cp + \frac{p}{g} D_g$$

und, nach Hinzurechnung des Einflusses der ständigen Belastung

$$ {}_{max}D = Cp + D_g$$

$$ {}_{min}D = -Cp + \frac{q}{g} D_g. \quad q = g + p.$$

Nun ist aber der Inhalt des positiven Teiles der Einflußfläche (Fig. 226 Seite 240) gleich $\frac{1}{2} p \xi \eta_2$ und man erhält deshalb

$$ {}_{max}D_p = \tfrac{1}{2} p \xi \eta_2.$$

Hiernach ist ${}_{max}D_p$ gleich der Spannkraft, die in der Diagonale CF_2 durch eine in F_2 angreifende Einzellast von der Größe $\frac{1}{2} p \xi$ hervorgerufen wird, und es wird daher der oben mit C bezeichnete Wert:

$$ C = \tfrac{1}{2} \xi \cdot D'.$$

Der Nullpunkt N wird nach dem auf Seite 236 beschriebenen Verfahren ermittelt.

148. Näherungsregel. Die Ermittelung der Grenzwerte der Spannkräfte D wird etwas vereinfacht, wenn die bewegliche Last nur in den Knotenpunkten auf der einen Seite des Schnittes tt angreift. Handelt es sich z. B. um die Spannkraft ${}_{max}D_p$ in der linkssteigenden

Digitized by Google

Diagonale CF_2 (Fig. 235), so nehme man an, daß der Träger zwischen F_2 und B gleichförmig belastet ist und in F_2 noch die Einzellast $\frac{p\lambda}{2}$ trägt, wobei λ die wagerecht gemessene Stützweite des Feldes F_1F_2 bedeutet. Man rechnet dann etwas zu ungünstig, weil man gewissermaßen das Feld F_1F_2 mit $p\lambda$ belastet denkt und den negativen Einfluß der in F_1 angreifenden Knotenlast $\frac{p\lambda}{2}$ vernachlässigt. Links vom Schnitte tt greift jetzt nur A an, und zwar ergibt sich mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen aus der auf B bezogenen Momentengleichung:

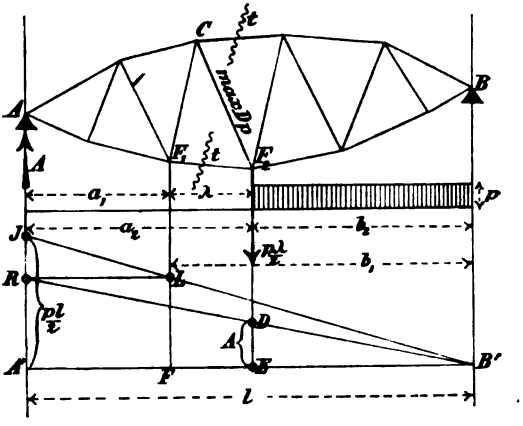


Fig. 235.

$$Al - pb_2\frac{b_2}{2} - \frac{p\lambda}{2}b_2 = 0$$

für A der Wert

$$A = \frac{pb_2(b_2+\lambda)}{2l} = \frac{pb_1b_2}{2l}.$$

Um A durch Zeichnung zu bestimmen, trage man von einer Wagerechten $A'B'$ aus auf der linken Auflagersenkrechten die Strecke $\overline{A'J} = \frac{pl}{2}$ auf und bringe die Gerade $B'J$ mit der Senkrechten durch F_1 in L zum Schnitt. Nun ziehe man $LR \parallel B'A'$ und verbinde R mit B' durch eine Gerade; letztere schneidet auf der Senkrechten durch F_2 den gesuchten Wert $ED = A$ ab. Denn es ist

$$\overline{ED} = \overline{A'R}\frac{b_2}{l} = \overline{FL}\frac{b_2}{l} = A'J\frac{b_1}{l}\frac{b_2}{l} = \frac{pl}{2}\frac{b_1}{l}\frac{b_2}{l} = \frac{pb_1b_2}{2l}.$$ *)

Nach Ermittelung von A findet man

$$_{max}D_p = A \cdot D'.$$

*) Bei gleich großen Feldweiten findet man auch A sehr übersichtlich mittels eines die Knotenlasten verbindenden A-Polygons.

Digitized by Google

Gleichzeitig mit der Spannkraft ${}_{max}D_p$ der Diagonale CF_2 entsteht ${}_{min}D_p$ in der Diagonale CF_1, es kann also jeder Wert A zur Berechnung zweier Diagonalen verwertet werden.

Nach Ermittelung von A kann man die Spannkraft ${}_{max}D_p$ sehr schnell mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens bestimmen. Vergl. Fig. 216.

Ganz ebenso wird bei Bestimmung von ${}_{min}D_p$ verfahren. Es wird der Träger zwischen F_1 und A mit pa_1 belastet, außerdem in F_1 mit $\frac{p\lambda}{2}$; sodann wird der am rechten Auflager angreifende Widerstand $B = \frac{pa_1a_2}{2l}$ ermittelt und das Culmannsche Verfahren angewendet. Vergl. Fig. 217.

Es ist sehr zu empfehlen, die Grenzwerte ${}_{max}D_p$ und ${}_{min}D_p$ stets in dieser einfachen Weise zu ermitteln. Man erhält für die Diagonalen größere Beanspruchungen, als wenn die in den Figuren 218 bis 221 dargestellten Belastungsfälle vorausgesetzt werden und trägt gewissermaßen verschiedenen ungünstigen Einflüssen Rechnung, deren Feststellung zum Teil sehr schwierig, zum Teil noch gar nicht geglückt ist. Wir erinnern an dieser Stelle nur daran, daß alle bisherigen Entwicklungen an die Voraussetzung gelenkartiger Knotenpunkte gebunden sind, also an eine Annahme, welche bei Anwendung von Nietverbindungen gar nicht und selbst bei Anordnung von zweckmäßig ausgebildeten Gelenkbolzen wegen der an diesen auftretenden Reibungswiderstände nur annähernd erfüllt ist. Wir werden uns mit den Spannungen, welche durch starre Knotenverbindungen hervorgerufen werden (und welche man als *Nebenspannungen* zu bezeichnen pflegt), später noch zu beschäftigen haben. Die betreffenden Untersuchungen führen meistens zu recht langwierigen Zahlenrechnungen und werden deshalb zurzeit nur selten durchgeführt.

b. Beanspruchung durch einen Zug von Einzellasten.

149. Die ungünstigste Zugstellung. Wir betrachten eine linksteigende Diagonale CF_2, Fig. 236. Die Lasten mögen an den Knoten der unteren Gurtung angreifen. Es soll diejenige Stellung der Verkehrslast gefunden werden, welche ${}_{max}D_p$ hervorruft. Wir ermitteln auf die vorhin beschriebene Weise die Belastungsscheide E und nehmen an, es sei die Einflußlinie für D gegeben; sie besteht nach der in No. 143 durchgeführten Untersuchung aus drei Geraden *I*, *II*, *III*, welche den Trägerteilen AF_1, F_1F_2, F_2B entsprechen; der Nullpunkt N liegt auf der Senkrechten durch E. Der Lastenzug sei von B aus bis in

Digitized by Google

das Feld F_1F_2 vorgeschoben. Eine Last P rechts von F_2 erzeugt, wenn die Einflußlinie für die Last „Eins“ gezeichnet worden ist: $D = P\eta$ und eine Last P zwischen F_1 und F_2 ruft $D = P(\eta - \eta')$ hervor. Bezüglich der Bezeichnungen sei auf die Figur verwiesen. Infolge sämtlicher Lasten entsteht

$$D = \Sigma P\eta - \Sigma' P\eta',$$

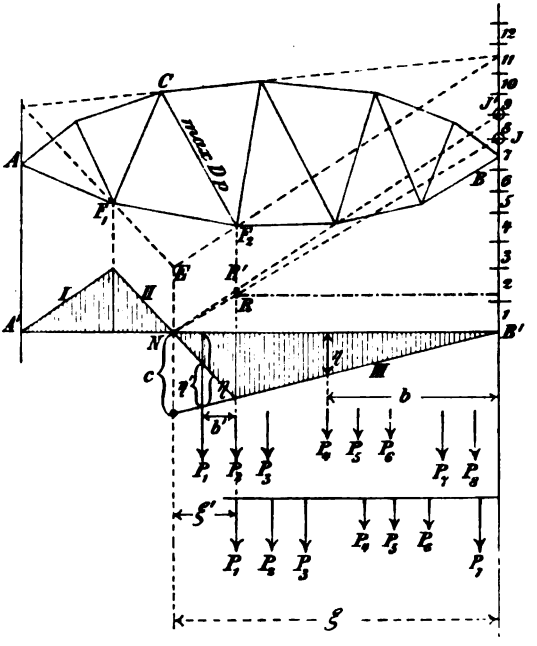


Fig. 236.

wobei sich das Zeichen Σ *über alle Lasten* erstreckt, das Zeichen Σ' hingegen *nur über die Lasten zwischen* F_1 *und* F_2. Nach Einführung von $\eta = c\frac{b}{\xi}$ und $\eta' = c\frac{b'}{\xi'}$ ergibt sich

$$D = c\left\{\frac{1}{\xi}\Sigma Pb - \frac{1}{\xi'}\Sigma' Pb'\right\}.$$

Hierbei bedeutet b den Abstand einer Last vom rechten Auflager und b' den Abstand einer im Felde F_1F_2 liegenden Last vom Querträger F_2. Die übrigen Bezeichnungen sind der Figur zu entnehmen. Wird der Lastenzug um die Strecke Δb nach links verschoben, so geht b über in $b + \Delta b$ und b' in $b' + \Delta b$, und es ändert sich D um

$$\Delta D = c\Delta b\left\{\frac{\Sigma P}{\xi} - \frac{\Sigma' P}{\xi'}\right\}.$$

Digitized by Google

Vorausgesetzt ist hierbei, daß keine neue Last auf den Träger gekommen ist und daß eine Last, welche vor der Verschiebung außerhalb des Feldes F_1F_2 lag, sich auch nach der Verschiebung noch rechts von F_2 befindet. Eine etwa in F_2 angreifende Last gehört nach der Verschiebung zu $\Sigma' P$; vor der Verschiebung ist sie ohne Einfluß auf die Summe $\Sigma' Pb'$.

Ist nun $\Delta D > 0$, d. h. ist

$$\frac{\Sigma P}{\Sigma' P} > \frac{\xi}{\xi'},$$

so wird infolge der vorgenommenen Zugverschiebung die Spannkraft D vergrößert, und es ergibt sich daher zur Bestimmung der ungünstigsten Stellung der Verkehrslast die folgende einfache Regel.

Man nehme zuerst die *Grundstellung* an, setze also voraus, daß die erste Last des von B aus vorrückenden Belastungszuges bei F_2 liegt. Diese Stellung erzeugt in den meisten Fällen die Spannkraft $_{max}D_p$. Nun denke man den Zug nach links verschoben, so daß P_1 in das Feld F_1F_2 tritt, und sehe nach, ob $\frac{\Sigma P}{P_1} > \frac{\xi}{\xi'}$ ist. Ist dies nicht der Fall, so ist die Grundstellung die gefährlichste; ist hingegen $\frac{\Sigma P}{P_1} > \frac{\xi}{\xi'}$, so muß der Lastenzug nach links verschoben werden; es wird dann die Last P_2 über F_2 gestellt und die Ungleichung $\frac{\Sigma P}{P_1 + P_2} > \frac{\xi}{\xi'}$ untersucht; wird dieselbe erfüllt, so muß P_3 über F_2 gestellt werden u. s. w.

Soll die ungünstigste Stellung des Lastenzuges durch Zeichnung bestimmt werden, so reihe man die Lasten $P_1, P_2, P_3 \ldots$ von B' aus auf einer Senkrechten aneinander;*) den Belastungszug selbst zeichne man auf einen Papierstreifen, um ihn bequem gegen den Träger verschieben zu können. Nachdem festgestellt worden ist, wieviel Lasten sich in der Grundstellung auf dem Träger befinden (wobei eine etwa bei B liegende Last mitgezählt wird), bestimme man auf der Senkrechten durch B' die Strecke $\overline{B'J} = \Sigma P$ (also in Fig. 236: $\overline{B'J} = P_1 + P_2 + \ldots + P_7$), und verbinde J mit dem Nullpunkte N durch eine Gerade, welche die Senkrechte durch F_2 in R schneiden möge. Trifft nun eine durch R gelegte Wagerechte die auf der Senkrechten $B'J$ aufgetragene Last P_1, so ist die Grundstellung die gefährlichste, trifft sie eine andere Last P_m, so muß der Zug so weit nach links verschoben werden, daß P_m beim Knoten F_2 liegt. In dem in der Fig. 236 dargestellten Falle muß also P_2 in F_2 angreifen, damit $_{max}D_p$

*) In der Fig. 236 wurden die Lasten mit den Ziffern 1, 2, 3, ... bezeichnet.

Digitized by Google

entsteht. Infolge der Verschiebung des Zuges ändert sich natürlich im allgemeinen die Summe ΣP der auf dem Träger befindlichen Lasten. Rückt man z. B. den Zug in Fig. 236 so weit vor, daß P_2 bei F_2 liegt, so wächst ΣP um P_8. Punkt J ist zu ersetzen durch J', ferner R durch R'. Die Wagerechte durch R' trifft wieder die Last P_2, und hieraus folgt dann, daß eine weitere Verschiebung des Zuges unterbleiben muß.

In gleicher Weise läßt sich die Frage entscheiden, die wievielte Last eines von A aus vorrückenden Zuges bei F_1 liegen muß, damit ${}_{min}D_p$ entsteht.

Bei den üblichen Feldweiten der Eisenbahnbrücken kommen nur zwei Belastungsfälle in Betracht; entweder muß P_1 oder P_2 über dem Querträger liegen.

150. Ermittelung der Spannkräfte D für Grundstellungen. Erstes Verfahren. In den folgenden Untersuchungen soll es sich nur um den Einfluß der Verkehrslast handeln. Indem wir dies ausdrücklich hervorheben, unterlassen wir es, die Spannkräfte durch den Zeiger p zu kennzeichnen.

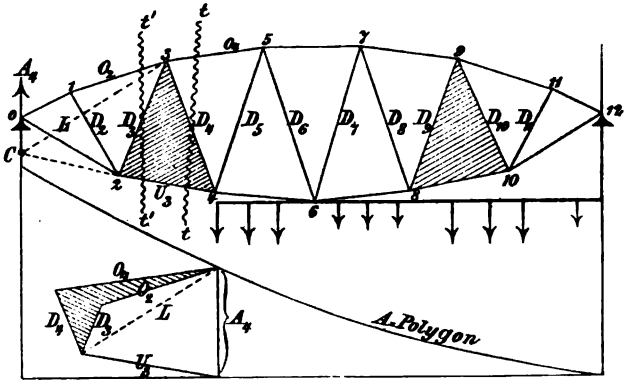


Fig. 237.

Um die Spannkraft ${}_{max}D_4$ in der Diagonale 34 des in Figur 237 dargestellten Balkens zu finden, belaste man den Balken rechts vom Schnitte tt. Wirkt die Last am Untergurte, so muß die Verkehrslast vom rechten Auflager aus bis Knoten 4 vorrücken. Links von tt greift nur der Stützenwiderstand A_4 an. Besteht die Verkehrslast aus einem beweglichen Lastenzuge, so wird A mit Hilfe des in No. 81 eingeführten A-Polygons bestimmt.

Bringt man nun U_3 mit A_4 in C zum Schnitt, verbindet C mit 3 durch die Gerade L, zerlegt A_4 nach den Richtungen von U_3 und L, hierauf Hilfskraft L nach den Richtungen von O_4 und D_4, so erhält man

Digitized by Google

die Größe von ${}_{max}D_4$. Die den Sinn der Kräfte angebenden Pfeile können fortbleiben; es ist ja bekannt, daß D_4 gezogen wird.

Die Spannkraft ${}_{min}D_3$ entsteht, wenn der Balken rechts vom Schnitte $t't'$ belastet wird, also gleichzeitig mit ${}_{max}D_4$. Man erhält ${}_{min}D_3$ am schnellsten, indem man das Kräftepolygon für den Knotenpunkt 3 zeichnet; denn von den vier an diesem Punkte angreifenden Kräften O_4, D_4, D_3, O_2 sind die beiden ersten bekannt. In der Fig. 237 wurde dieses Kräftepolygon durch Schraffierung hervorgehoben, desgleichen das Dreieck, dessen zwei Seiten von den Diagonalen begrenzt werden, deren Spannkräfte gleichzeitig Grenzwerthe annehmen; die dritte Seite dieses Dreiecks ist ein Stab derjenigen Gurtung, an welcher die Belastung angreift.

Auf die beschriebene Weise kann man die Spannkräfte ${}_{max}D$ in allen links steigenden und die ${}_{min}D$ in allen rechts steigenden Diagonalen bestimmen, indem man die Verkehrslast vom rechten Auflager aus der Reihe nach bis zu den Knotenpunkten 10, 8, 6, 4 vorschiebt. Ist der Träger symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte, so ist natürlich:

$$ {}_{min}D_4 = {}_{min}D_9 \text{ und } {}_{max}D_3 = {}_{max}D_{10}. $$

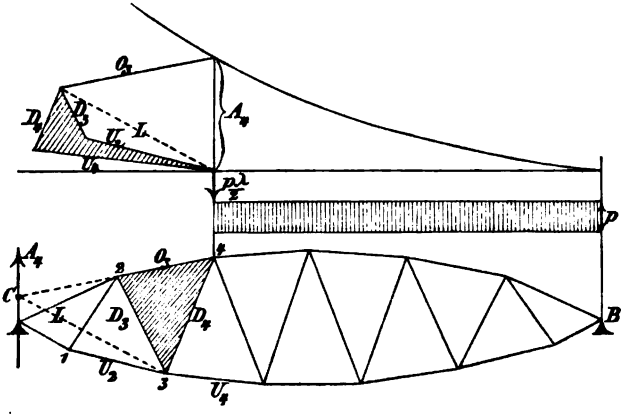


Fig. 238.

Bei unsymmetrischem Träger muß man, um ${}_{min}D_2$, ${}_{min}D_4$, ... ${}_{max}D_3$, ${}_{max}D_5$ . . . . zu erhalten, noch den Einfluß einer von A nach rechts vorrückenden Verkehrslast untersuchen. Man hat dann nur nötig, das beschriebene Verfahren auf das Spiegelbild des Trägers anzuwenden.

In der Figur 238 ist angenommen worden, *daß die Belastung an der oberen Gurtung angreift.* Es wurde gleichförmige Belastung vorausgesetzt; dieselbe reicht von B bis 4, während in 4 noch die Einzellast

Digitized by Google

$\frac{p\lambda}{2}$ hinzugefügt wurde. Am linken Auflager greift A_4 an. Infolge dieser Belastung entstehen gleichzeitig: $_{max}D_3$ und $_{min}D_4$. Bei der Anwendung des Culmannschen Verfahrens wurde O_3 mit A_4 in C zum Schnitte gebracht. Die Gerade L verbindet dann den Punkt C mit dem Knoten 3. Nach Ermittelung von D_4 ergab sich D_3 aus dem Kräftepolygone für den unteren Knoten 3*).

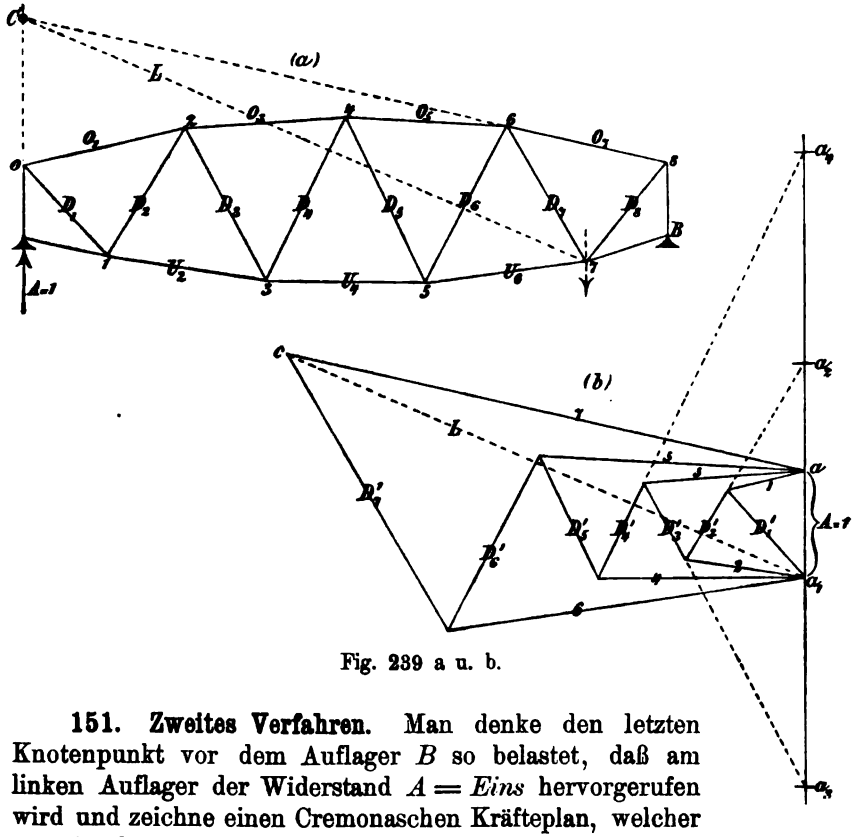


Fig. 239 a u. b.

151. Zweites Verfahren. Man denke den letzten Knotenpunkt vor dem Auflager B so belastet, daß am linken Auflager der Widerstand $A = Eins$ hervorgerufen wird und zeichne einen Cremonaschen Kräfteplan, welcher nur die Spannkräfte in den links von jenem belasteten Knoten befindlichen Stäben zu enthalten braucht**), Fig. 239. Dieser Plan möge

*) Man könnte auch U_3 oder U_4 mit A zum Schnitt bringen. Im ersten Falle verbindet L den Punkt $A_4 U_3$ mit 2, im zweiten Falle den Punkt $A_4 U_4$ mit 4. Wir empfehlen dem Leser, stets mehrere Verfahren anzuwenden, um durch Vergleichung der Ergebnisse die Zuverlässigkeit der Zeichnung zu prüfen.

**) Es ist deshalb auch nicht nötig, anzugeben, wie groß die Last sein muß, welche $A = 1$ hervorbringt.

Digitized by Google

für die Diagonalen die Spannkräfte D' liefern. Greift nun die Verkehrsbelastung in den Knotenpunkten der oberen Gurtung an, und ist sie beispielsweise von B aus bis zum Knoten 4 vorgerückt, so entsteht gleichzeitig ${}_{max}D_3$ und ${}_{min}D_4$. Bei dieser Laststellung wirkt am linken Auflager der Widerstand A_4; er ruft die Spannkräfte hervor

$$(1) \qquad \begin{cases} {}_{max}D_3 = A_4 D'_3 \text{ (Zug)} \\ {}_{min}D_4 = A_4 D'_4 \text{ (Druck).} \end{cases}$$

Wirkt die Verkehrslast auf die Knotenpunkte der unteren Gurtung und reicht sie von B bis 5, so ruft sie den Widerstand A_5 und die Spannkräfte

$${}_{min}D_4 = A_5 D'_4 \text{ (Druck)}$$
$${}_{max}D_5 = A_5 D'_5 \text{ (Zug)}$$

hervor. Nach Aufzeichnung des Kräfteplanes in Fig. 539b kann man also sämtliche Grenzwerte D sehr schnell ermitteln. Das ganze Verfahren zeichnet sich durch große Übersichtlichkeit und durch Einfachheit in der Begründung aus.

Die Zuverlässigkeit des für $A = 1$ gezeichneten Kräfteplanes läßt sich sehr leicht mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens prüfen. Bringt man beispielsweise O_7 mit A in C zum Schnitt, verbindet den Punkt C mit 7 durch eine Gerade L und zieht im Kräfteplane durch den Anfangspunkt a_1 von A eine Parallele zu L, so muß diese durch den Schnittpunkt c der Spannkräfte O_7 und D'_7 gehen.*) Um dies einzusehen, denke man durch die Stäbe O_7, D_7 und U_6 einen Schnitt gelegt und löse (nach Culmann) die Aufgabe: drei Kräfte O_7, D_7, U_6 zu bestimmen, welche dem Widerstande $A = 1$ das Gleichgewicht halten.

Eine andere beachtenswerte Eigenschaft des Kräfteplanes in Fig. 239b ergibt sich aus der folgenden von *Mohr* herrührenden Untersuchung. Es sei durch das Fachwerk ein Schnitt geführt, welcher O_3, D_3 und U_2 trifft, Fig. 240. Die am linken Trägerteile angreifende Kraft A sei ersetzt durch zwei in 2 und 3 wirksame Kräfte P_1 und P_2. Dieselben sind durch die Gleichungen gegeben

$$P_1 - P_2 = A; \; P_1 \lambda_3 = A x_3.$$

Mit Hilfe der zweiten Bedingung läßt sich P_1 auf die in der Fig. 240b angegebene Weise durch Zeichnung finden. Wird nun P_1 nach den Richtungen von O_3 und D_3 zerlegt, P_2 nach den Richtungen von U_2 und D_3, so ergibt sich das in der Fig. 240c dargestellte, aus A, O_3, D_3, U_2 bestehende Kräftepolygon, und hieraus folgt, daß

*) In der Fig. 239b haben wir die Spannkräfte in den Gurtungen nur mit Ziffern bezeichnet.

Digitized by Google

in Fig. 239b die Verlängerung von D'_3 auf der Richtungslinie von A die Strecke $\overline{aa_3} = P_1$ abschneiden muß.

Sind die wagerechten Projektionen der Diagonalen gleich groß $= \lambda$, so ist $x_3 = 3\lambda$ und $P_1 = 3A$. Dieser Fall ist in der Fig. 239 vorausgesetzt worden; es ergibt sich dann $\overline{aa_3} = 3\overline{aa_1}$ und ebenso findet man $\overline{a_1a_4} = 4\overline{a_1a}$, wobei a_4 den Schnittpunkt von D'_4 und A bezeichnet. Auf diese Weise ist man im stande, von vornherein auf der Verlängerung von A diejenigen Punkte anzugeben, durch welche im Kräfteplane die Verlängerungen der Spannkräfte D' gehen müssen.

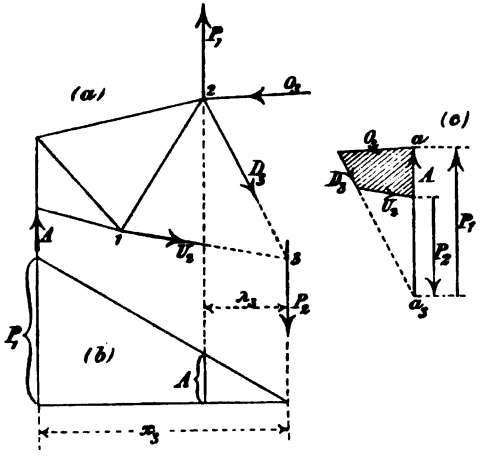


Fig. 240 a, b u. c.

Es kann vorkommen, daß sich für die Spannkräfte der Stäbe in der Nähe von B sehr lange Linien ergeben. Man wähle dann für diese Kräfte einen kleineren Maßstab wie für die Spannkräfte in der Nähe von A. Will man z. B. D'_3, D'_6 und D'_7 in kleinerem Maßstabe haben, so verkleinere man das Kräftepolygon $A\,O_3D'_4U_4$ und schließe an dieses verkleinerte Polygon (am besten in einer neuen Figur) die folgenden Kräftepolygone an. Noch zweckmäßiger ist es, das verkleinerte Polygon $A\,O_3D'_4U_4$ mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens zu ermitteln.

152. Drittes Verfahren. In der Figur 241 wurde die Spannkraft $_{max}D_4$ für den Fall einer an der unteren Gurtung angreifenden Verkehrslast mittels des Culmannschen Verfahrens bestimmt und hierauf behufs Ermittelung von D_3 das Kräftepolygon für den Knotenpunkt 3 gezeichnet. Es wurde jedoch die Reihenfolge der Kräfte in den einzelnen Polygonen anders gewählt wie früher. Die Last reicht von B bis 4,

Digitized by Google

so daß am linken Auflager der Widerstand A_4 angreift. Legt man durch den Schnittpunkt C von U_3 und A_4 Parallelen zu O_4 und O_2, deren erste den Stab 34 in 4′ und deren zweite den Stab 32 in 3′ schneidet, zieht man ferner durch 3 eine Senkrechte, welche U_2 in 3″ trifft, so ist das Dreieck $C33''C$ ähnlich dem Kräftedreieck LA_4U_3 und das Viereck $C3'34'C$ ähnlich dem Kräfteviereck $O_2D_3D_4O_4$, und hieraus folgt, wenn die bei 3 gemessene senkrechte Trägerhöhe mit h_3 bezeichnet wird, und die Längen der Strecken 34′ und 33′ beziehungsweise $= a_4$ und $= a_3$ sind

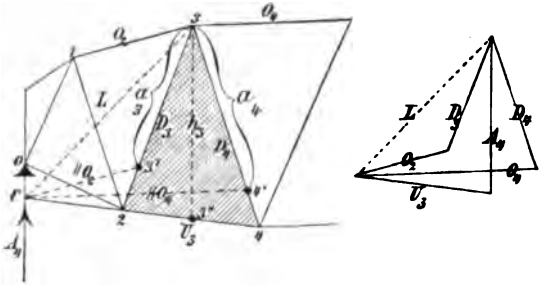


Fig. 241.

$$(2) \quad {}_{max}D_4 = A_4 \frac{a_4}{h_3}; \quad {}_{min}D_3 = -A_4 \frac{a_3}{h_3}.$$

Das vorstehende Verfahren empfiehlt sich, sobald die Widerstände A mit Hilfe von Tabellen berechnet werden. Die Strecken a_4, a_3, h_3 entnehme man einer Zeichnung.

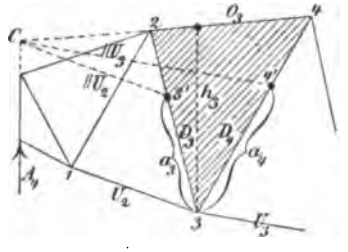


Fig. 242.

Fig. 242 stellt den Fall dar, in welchem die Verkehrslast in den Knoten der oberen Gurtung angreift. Um ${}_{max}D_3$ und ${}_{min}D_4$ zu ermitteln, wird O_3 mit A_4 in C zum Schnitt gebracht. Durch C werden zu U_2 und U_3 Parallelen gezogen, welche beziehungsweise den Stab 32 in 3′ und den Stab 34 in 4′ treffen. Nach Messung von $33' = a_3$ und $34' = a_4$ ergibt sich

$$ {}_{max}D_3 = +A_4 \frac{a_3}{h_3}; \quad {}_{min}D_4 = -A_4 \frac{a_4}{h_3}.$$

153. Der Lastenzug überschreitet die Grundstellung. Zunächst seien die Spannkräfte ${}_{max}D$ und ${}_{min}D$ eines Balkens mit *oben* angreifender Verkehrslast gesucht, beispielsweise ${}_{max}D_5$ und ${}_{min}D_6$ für den Träger in Fig. 243. Der von B aus vorrückende Lastenzug habe die Grundstellung überschritten. Es greift dann links von dem durch O_5, D_6, U_6 geführten Schnitte außer dem Stützenwiderstande A noch der Druck P' an, welchen die zwischen den Knoten 4 und 6 wirkenden

Digitized by Google

Lasten auf den Knoten 4 ausüben. Der Widerstand A wird stets durch die unter der ersten Last gelegene Ordinate des A-Polygons dargestellt, und P' kann nach dem auf Seite 139 angegebenen Verfahren bestimmt werden. In der Fig. 243 ist angenommen worden, daß die 2te Last beim Knoten 6 liegt. Es wird dann auf der Senkrechten durch 4, von der Wagerechten $A'B'$ aus die Strecke $\overline{ab} = P_1$ aufgetragen und die Gerade cb

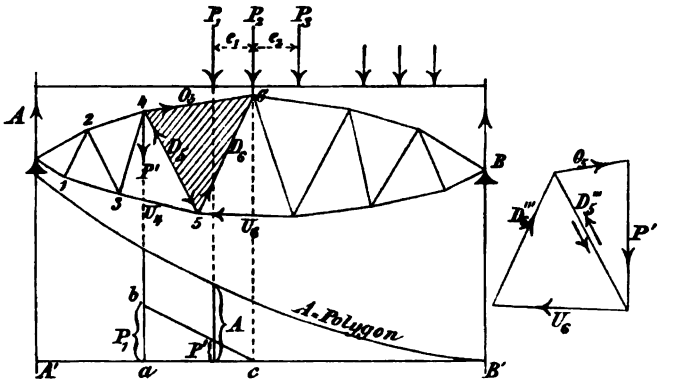


Fig. 243.

gezogen, wobei c den senkrecht unter 6 gelegenen Punkt der Geraden $A'B$ bezeichnet. Die Gerade cb schneidet auf der Richtungslinie der Last P_1 die Knotenlast P' ab. Steht die dritte Last bei 6, so muß

$$ab = P_1 + P_2 \frac{e_2}{e_1 + e_2}$$

gemacht werden (Seite 139).

Die durch den Stützendruck A in den Diagonalen hervorgerufenen Spannkräfte bestimme man auf die vorhin beschriebene Weise. Die von P' erzeugten Spannkräfte sollen mit D''' bezeichnet werden; um sie zu finden, löse man die Aufgabe: „drei Kräfte O_5, D'''_6 und U_6 zu bestimmen, welche mit P' im Gleichgewichte sind." Da nun die (früher stets mit L bezeichnete) Linie, welche den Schnittpunkt von P' und O_5 mit dem Schnittpunkte von U_6 und D_6 verbindet, mit D_5 zusammenfällt, so hat man P' nach den Richtungen von O_5 und D_5 zu zerlegen, und D_5 nach den Richtungen von D_6 und U_6. Hierauf sind die Kräftepolygone so mit Pfeilen zu versehen, daß ihr Umfahrungssinn ein stetiger ist. Man findet, daß P' in D_5 einen Druck und in D_6 einen Zug erzeugt.*) Schließlich werden die durch A und P' hervorgerufenen

*) Es ist meistens zu empfehlen, den Kräfteplan, welcher den Einfluß von P' angibt, in größerem Maßstabe zu zeichnen.

Digitized by Google

Spannkräfte addiert. Ist beispielsweise der Einfluß von A mit Hilfe des zweiten Verfahrens (No. 151) ermittelt worden, so findet man

$$_{max}D_5 = AD'_5 + D'''_5; \quad _{min}D_6 = AD'_6 + D'''_6.$$

Es ist auf die Vorzeichen der Spannkräfte zu achten. D'_5 und D'''_6 sind positiv, D'''_5 und D'_6 sind negativ.

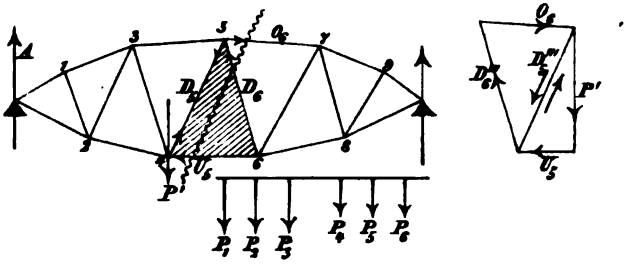


Fig. 244.

In Fig. 244 ist der Fall einer an der *unteren* Gurtung angreifenden Verkehrslast dargestellt worden. Gesucht sind $_{min}D_5$ und $_{max}D_6$. Hat man den Einfluß von A wieder nach dem zweiten Verfahren bestimmt, so findet man

$$_{min}D_5 = A_6 D'_5 + D'''_5; \quad _{max}D_6 = A_6 D'_6 + D'''_6.$$

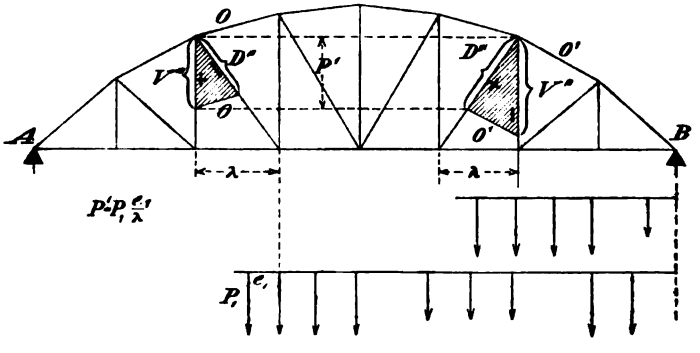


Fig. 245.

Die Spannkräfte D'_6 und D'''_5 sind positiv; D'_5 und D'''_6 sind negativ.

Für den am häufigsten vorkommenden Fall eines Fachwerks mit Vertikalen und einer geraden Gurtung vereinfacht sich die vorstehende Untersuchung ganz erheblich. Liegt z. B. die Trägeranordnung in Fig. 245 vor, so findet man links von der Mitte $V''' = + P'$, während D'''

Digitized by Google

mittels einer Parallelen zu dem mit O bezeichneten Gurtstabe gewonnen wird. Rechts von der Mitte ist die senkrechte Projektion von D''' gleich P'; V'''' wird mittels einer Parallelen zum Gurtstabe O' bestimmt.

§ 33.

Das Zimmermannsche Verfahren.

a. Das Netzwerk.

154. Allgemeines. Durch ein irgendwie belastetes Netzwerk werde ein Schnitt tt geführt, welcher die Stäbe O_5, D_5, U_4 trifft, Fig. 246. Die Mittelkraft aus den am *linken* Trägerteile angreifenden äußeren Kräften (welche sämtlich senkrecht sein mögen) sei Q; sie habe von den Knoten 4 und 5 die Abstände c_4 und c_5 und werde in zwei senkrechte Seitenkräfte P_1 und P_2 zerlegt, von denen die erste durch den Knoten 4, die zweite durch den Knoten 5 geht. In der Fig. 246

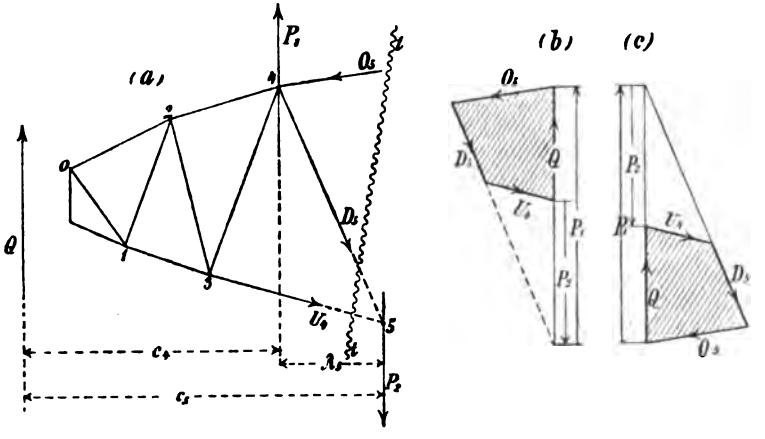


Fig. 246.

wurde die Querkraft Q positiv angenommen; sie ist dann nach oben gerichtet und liegt links vom Schnitte tt. P_1 wirkt aufwärts, P_2 abwärts; beide Kräfte sind, wenn die Horizontalprojektion der Länge des Stabes D_5 mit λ_5 bezeichnet wird, durch die Gleichungen gegeben

$$P_1\lambda_5 = Qc_5; \quad P_2\lambda_5 = Qc_4.$$

Außerdem ist

$$P_1 - P_2 = Q.$$

Beachtet man, daß $Qc_5 = M_5$ das Angriffsmoment für den Knoten 5 ist und $Qc_4 = M_4$ das Angriffsmoment für den Knoten 4, so erhält man

Digitized by Google

$$P_1 = \frac{M_5}{\lambda_5} \text{ und } P_2 = \frac{M_4}{\lambda_5}.$$

Kennt man P_1 und P_2, so kann man auf die bereits auf Seite 257 beschriebene Weise die Spannkräfte O_5, D_5, U_4 finden, indem man das Kräftepolygon in Fig. 246b oder 246c zeichnet. *Dabei empfiehlt es sich, nach Zimmermann, das Kräftepolygon in das in entsprechend großem Maßstabe gezeichnete Trägernetz einzutragen*, so zwar, daß die Spannkraft D_5 mit dem Stabe D_5 zusammenfällt. Man erhält dann die sehr übersichtlichen Anordnungen in Fig. 247 oder Fig. 248, welche den Figuren 246b und 246c entsprechen. Der Umfahrungssinn des geschlossenen Kräftepolygons ist durch den Sinn der Querkraft $Q = \frac{M_5}{\lambda_5} - \frac{M_4}{\lambda_5}$ gegeben.

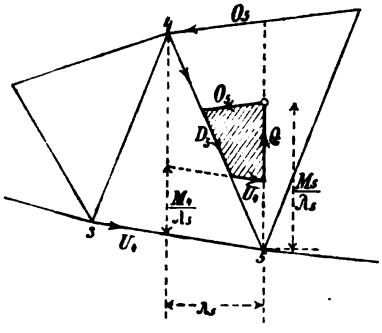


Fig. 247.

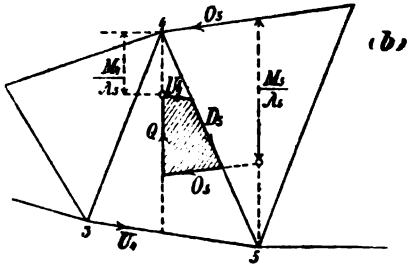


Fig. 248.

Das *Zimmermann*sche Verfahren ist besonders bei konstantem λ zu empfehlen. Bestimmt man die Momente mit Hilfe eines Seilpolygons, dessen Polweite $= \varepsilon\lambda$ ist, wo ε eine beliebige Zahl bedeutet, und bezeichnet man die bei den Knoten 4 und 5 gemessenen Ordinaten des Seilpolygons mit y_4, y_5, so erhält man (wegen $M_m = Hy_m = \varepsilon\lambda y_m$) sehr einfach:

$$\frac{M_5}{\lambda} = \varepsilon y_5; \quad \frac{M_4}{\lambda} = \varepsilon y_4.$$

Besitzen zwar nicht alle Diagonalen, jedoch die Mehrzahl derselben die gleiche Horizontalprojektion λ, so bleibt das Verfahren immerhin einfach, da man nur nötig hat, für die wenigen Felder mit verschieden großen λ eine kleine Hilfskonstruktion auszuführen. Hat z. B. die Horizontalprojektion der die Knoten 5 und 4 verbindenden Diagonale

Digitized by Google

die von $\lambda = \frac{H}{\lambda}$ abweichende Länge λ', so sind an Stelle der Werte εy_5 und εy_4 die Werte $\frac{M_5}{\lambda'} = \frac{M_5}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\lambda'} = \varepsilon y_5 \frac{\lambda}{\lambda'}$ und $\frac{M_4}{\lambda'} = \varepsilon y_4 \frac{\lambda}{\lambda'}$ aufzutragen, welche nach Fig. 249 durch Zeichnung bestimmt werden können.*)

In der Regel wird es sich empfehlen, die Strecken εy durch die Ordinaten y zu ersetzen und den Kräftemaßstab entsprechend abzuändern. War dann beispielsweise der Kräftemaßstab für die Zeichnung, welche das Seilpolygon enthält: 1 *Zentimeter* $= n$ *Tonnen*, so ergeben sich die Spannkräfte im Maßstabe: 1 *Zentimeter* $= \varepsilon n$ *Tonnen*.

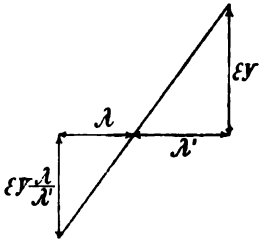


Fig. 249.

155. Spannkräfte in den Gurtungen. Die Ermittelung der größten Spannkräfte in den Gurtungen soll an dem in der Fig. 250 dargestellten Netzwerke erläutert werden. Die Verkehrslast bestehe aus einem Zuge von Einzellasten; sie erzeugt für die Knotenpunkte m Angriffsmomente, welche nach No. 82 mit Hilfe eines Seilpolygons in der Form $M_m = Hy_{p_m}$ dargestellt werden können, wobei $H = \varepsilon\lambda$ zu wählen

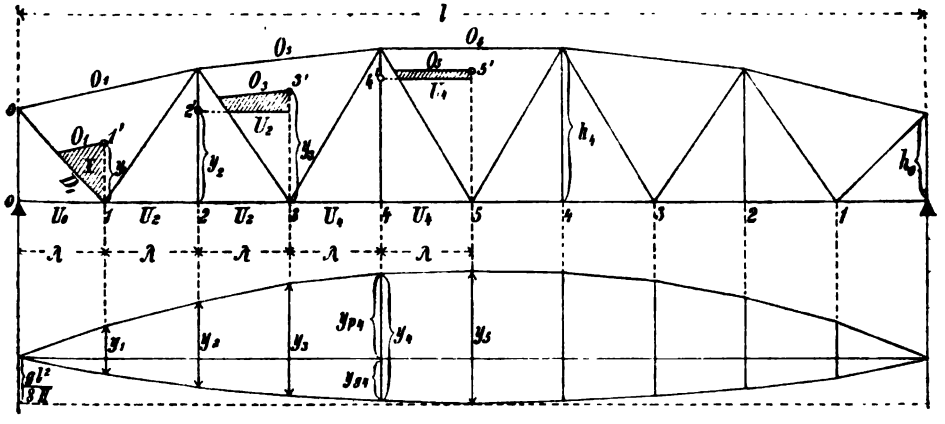


Fig. 250.

ist. Zu den Werten y_{p_m} sind noch die von der ständigen Belastung hervorgerufenen y_{g_m} zu fügen; letztere sind (nach Seite 142) die Ordinaten einer Parabel, deren Pfeil $= \frac{gl^2}{8H}$ ist. Hat man sämtliche

*) Dieser Fall kommt hauptsächlich bei schiefen Brücken vor, welche häufig ein kürzeres oder längeres Endfeld erhalten.

Digitized by Google

Werte $y_m = y_{p\,m} + y_{g\,m}$ gefunden, so trägt man in das Trägernetz die Ordinaten ein: $\overline{11'} = y_1$, $\overline{22'} = y_2$, $\overline{33'} = y_3$ u. s. w. und findet nun die Spannkräfte O und U auf die angegebene Weise. In Fig. 250 wurde dieselbe Anordnung gewählt wie in Fig. 247.*)

Zu beachten ist, daß gleichzeitig mit der größten Spannkraft O_1 die größten Spannkräfte V_0 und D_1 in der Endvertikale und der ersten Diagonale entstehen. V_0 und D_1 ergeben sich aus dem für den oberen Knoten 0 gezeichneten Kräftepolygon. Wird der in 0 angreifende Teil der ständigen Belastung mit G_0 bezeichnet, so findet man durch Vergleichung des Kräftepolygons in Fig. 252b mit dem Polygon I in Fig. 250: (ohne Vorzeichen)

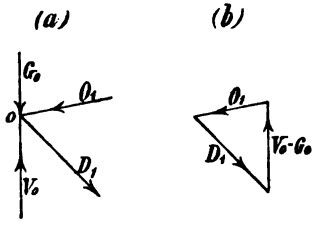


Fig. 252 a u. b.

$$V_0 - G_0 = y_1 \text{ und hieraus } V_0 = y_1 + G_0.$$

Die Endvertikale wird auf Druck beansprucht.

Zahlenbeispiel. Der in Fig. 250 abgebildete Träger habe eine Stützweite von 36m; ferner sei $h_4 = 4{,}92^m$, $h_2 = 4{,}28^m$; $h_0 = 3{,}00^m$. Der Träger sei ebenso belastet, wie der im § 19 untersuchte Balken. Es können dann die Werte y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 der Figur 130 auf Tafel I entnommen werden. Die Polweite ist dort: $H = 4\lambda$ und der Kräftemaßstab: $1^{cm} = 20^t$; die Spannkräfte O, U, D_1, V_0 sind also mit dem Maßstabe: $1^{cm} = 4 \cdot 20 = 80^t$ zu messen. Das Trägernetz zeichne man in möglichst großem Maßstabe; es ist nicht nötig, daß dieser Maßstab mit dem Längenmaßstabe auf Tafel I übereinstimmt. Von der ständigen Belastung $g = 1{,}74^t$ f. d. Meter greife der Teil $g_0 = 0{,}45^t$ an der oberen Gurtung an; auf den oberen Knoten 0 kommt dann die Last: $G_0 = 0{,}45 \cdot 3{,}6 = 1{,}62^t$. Man findet auf dem oben angegebenen Wege

$$O_1 = -113{,}3^t;\quad O_2 = -200{,}3^t;\quad O_3 = -221{,}5^t;$$
$$U_0 = 0;\quad U_2 = +164{,}0^t;\quad U_4 = +211{,}4^t;$$
$$D_1 = +145{,}2^t;\quad V_0 = -114{,}4^t.$$

---

*) Damit am unteren Knotenpunkte 2 Gleichgewicht besteht, müssen die Spannkräfte in den Stäben 12 und 23 gleich groß sein, Fig. 251; sie wurden mit U_2 bezeichnet. U_4 ist die Spannkraft für den Teil 3—5 der unteren Gurtung. Dem Stabe 0—1 entspricht $U_0 = 0$. Die Vertikalen werden nur gezogen; der größte Zug in einer Vertikale ist gleich der größten Belastung ihres unteren Knotenpunktes.

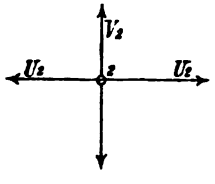


Fig. 251.

Digitized by Google

Liegen die Knotenpunkte eines Netzwerks zum Teil zwischen den Querträgern, wie bei dem in der Figur 253 dargestellten Träger, so muß, behufs Bestimmung der y_p, die ständige Belastung g in die Teile g_0 und g_u zerlegt werden. Sodann sind zwei Parabeln zu zeichnen; die eine erhält den Pfeil $\frac{g_0 l^2}{8H}$, die andere den Pfeil $\frac{g_u l^2}{8H}$. In die erste Parabel wird ein Polygon beschrieben, dessen Ecken in den Senkrechten durch die oberen Knoten liegen, in die zweite ein Polygon, dessen Ecken den unteren Knoten entsprechen. Die Ordinaten beider Polygone werden addiert.

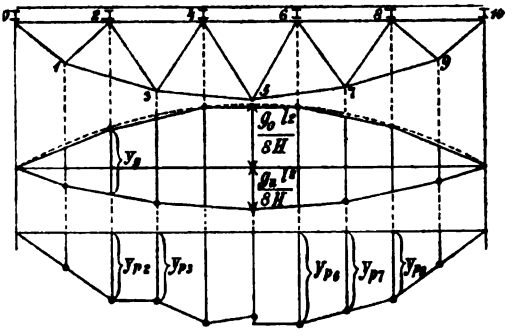


Fig. 253.

Die Angriffsmomente Hy_p für die zwischen den Querträgern liegenden Knoten (1, 3, 5, 7, 9) müssen streng genommen nach dem auf Seite 143 beschriebenen Verfahren ermittelt werden. Man begeht jedoch einen nur unwesentlichen Fehler, wenn man sich darauf beschränkt, nach No. 82 die y_p für die Angriffspunkte (2, 4, 6, 8) der Querträger zu bestimmen, diese Werte als Ordinaten aufzutragen und deren Endpunkte durch gerade Linien zu verbinden, wie dies in der rechten Hälfte der Figur 253 angegeben worden ist. Das so erhaltene Polygon liefert dann genügend genaue Näherungswerte für die den übrigen Knoten (1, 3, 5, 7, 9) entsprechenden y_p.

Bei gleichförmiger Verkehrslast und konstanter Feldweite können die Werte $\frac{M_m}{\lambda}$ auch sehr schnell berechnet werden. Liegt beispielsweise der in der Fig. 254 abgebildete symmetrisch belastete Balken vor,

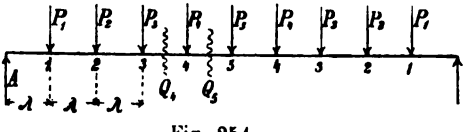


Fig. 254.

so bestimme man zuerst die Querkräfte Q. Für das 5te Feld erhält man

$$Q_5 = A - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$$

und, da $A = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \frac{1}{2} P_5$ ist, $Q_5 = \frac{1}{2} P_5$. Für das 4te Feld wird erhalten

$$Q_4 = A - (P_1 + P_2 + P_3) = Q_5 + P_4,$$

für das 3te Feld $Q_3 = Q_4 + P_3$. u. s. f.

Digitized by Google

Nun ist aber $\frac{M_m}{\lambda} - \frac{M_{m-1}}{\lambda} = Q_m$, also $\frac{M_m}{\lambda} = \frac{M_{m-1}}{\lambda} + Q_m$, und man findet daher der Reihe nach (wegen $M_0 = 0$)

$$\frac{M_1}{\lambda} = Q_1; \quad \frac{M_2}{\lambda} = \frac{M_1}{\lambda} + Q_2; \quad \frac{M_3}{\lambda} = \frac{M_2}{\lambda} = Q_3 \text{ u. s. f.}$$

Für einen gleichmäßig mit 1,74^t f. d. Meter belasteten Balken von 36^m Stützweite, mit 10 gleichlangen Feldern, ist

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = 1{,}74 \cdot 3{,}6 = 6{,}264^t.$$

Die Berechnung der $\frac{M}{\lambda}$ geschieht nach folgendem Ansatz:

$Q_5 = \frac{1}{2} P_5 = \frac{1}{2} \cdot 6{,}264 = 3{,}132$	$(M_1 \mid \lambda^*) = 28{,}188 = Q_1$
$+ \ 6{,}264 = P_4$	$+ \ 21{,}924 = Q_2$
$Q_4 = 9{,}396$	$(M_2 \mid \lambda) = 50{,}112$
$+ \ 6{,}264 = P_3$	$+ \ 15{,}660 = Q_3$
$Q_3 = 15{,}660$	$(M_3 \mid \lambda) = 65{,}772$
$+ \ 6{,}264 = P_2$	$+ \ 9{,}396 = Q_4$
$Q_2 = 21{,}924$	$(M_4 \mid \lambda) = 75{,}168$
$+ \ 6{,}264 = P_1$	$+ \ 3{,}132 = Q_5$
$Q_1 = 28{,}188$ Tonnen	$(M_5 \mid \lambda) = 78{,}300$ Tonnen.

Im vorliegenden Falle hätte man sich auch (der gleich großen Lasten P wegen) der Parabelgleichung: $M = \frac{1}{2} z x (l - x)$ bedienen können, wo $z =$ Belastung für die Längeneinheit. Für den Knoten m erhält man mit $x = m\lambda$ und $l = 10\lambda$

$$\frac{M_m}{\lambda} = \frac{z\lambda}{2} m (10 - m) = \frac{1{,}74 \cdot 3{,}6}{2} m (10 - m) = 3{,}132\, m (10 - m)$$

und hieraus der Reihe nach für $m = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\frac{M}{\lambda} = 28{,}188; \ 50{,}112; \ 65{,}772; \ 75{,}168; \ 78{,}300.$$

Bei dem in der Figur 253 dargestellten Träger sind die Belastungen der Knotenpunkte 1, 2, 3 . . . . ungleich groß. Man muß hier entweder (wie leicht einzusehen) mit 2 Parabelgleichungen rechnen oder das zuerst angegebene, auf Berechnung der Querkräfte fußende Verfahren anwenden.

156. Spannkräfte in den Füllungsstäben. Wir setzen zunächst voraus, daß die Grenzwerte der Spannkräfte D durch Grundstellungen der Verkehrslast hervorgerufen werden und erläutern den einzuschlagenden Weg an dem in der Fig. 255 dargestellten Träger. Soll beispielsweise ${}_{max}D_3$ bestimmt werden, so ist der Lastenzug von B aus bis zum Knoten 3 vorzuschieben; er ruft am linken Auflager den Widerstand A_3 hervor und erzeugt die Momente: $M_3 = A_3 x_3$ und $M_2 = A_3 x_2$,

*) $(M_1 \mid \lambda) = \frac{M_1}{\lambda}$.

Digitized by Google

weshalb

$$y_{p3} = \frac{M_3}{\varepsilon\lambda} = \frac{A_3 x_3}{\varepsilon\lambda} = \frac{A_3 l}{\varepsilon\lambda}\frac{x_3}{l} \quad \text{und} \quad y_{p2} = \frac{A_3 l}{\varepsilon\lambda}\frac{x_2}{l}.$$

Trägt man also auf der rechten Auflagersenkrechten die Strecke $\overline{B'R_3} = \frac{A_3 l}{\varepsilon\lambda}$ auf, und zieht die Gerade $A'R_3$, so schneidet diese auf den Senkrechten durch die Knoten 2 und 3 die Strecken $\overline{CD} = y_{p2}$ und $\overline{EF} = y_{p3}$ ab, zu denen noch die von der ständigen Belastung

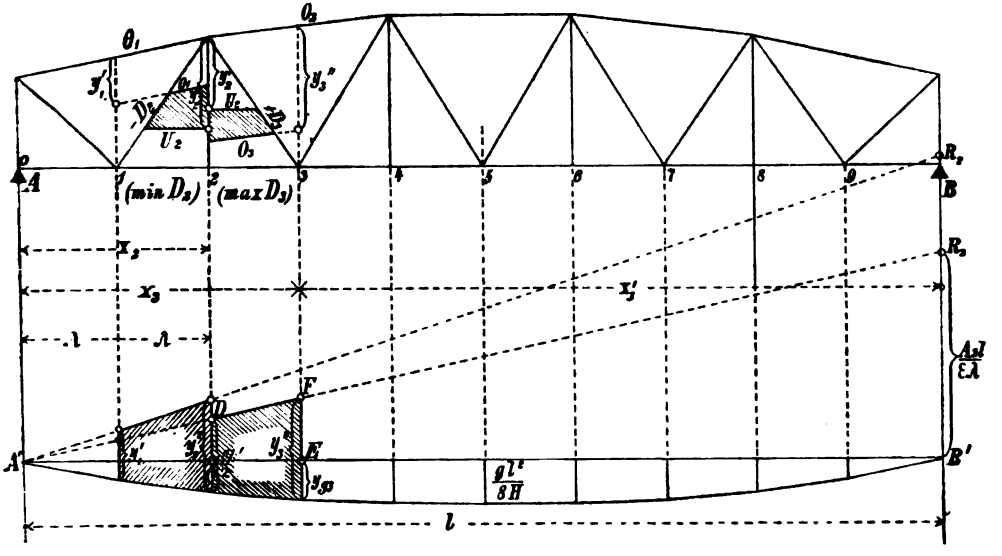


Fig. 255.

herrührenden Werte y_{p2} und y_{p3} zu fügen sind. Die Addition liefert die Werte y'_2 und y''_3, aus denen nun mit Hilfe des *Zimmermann*schen Verfahrens die Spannkraft $_{max}D_3$ gefunden werden kann. Auf dieselbe Art wird nach Auftragen von $\overline{B'R_2} - A_2\frac{l}{\varepsilon\lambda}$ die Spannkraft $_{min}D_2$ bestimmt.

In der Fig. 255 wurde die in Fig. 248 angegebene Anordnung gewählt. Zeichnet man dann die Kräftepolygone, welche die größten Spannkräfte in den Gurtungen liefern (Fig. 250) und diejenigen, welche die größten D ergeben (Fig. 255) in ein und dasselbe Trägernetz ein (was stets zu empfehlen ist), so liegen die Polygone nebeneinander, und der Kräfteplan gewinnt an Übersichtlichkeit.

Digitized by Google

Die Auflager-Widerstände A wurden in No. 82 mit Hilfe eines Seilpolygons dargestellt, welchem die Polweite l entspricht; vergl. auch Fig. 126 auf Tafel I. Entscheidet man sich nun für die Anwendung des *Zimmermann*schen Verfahrens, so ist es zweckmäßig, die Polweite l durch die Polweite $\varepsilon\lambda$ zu ersetzen; die Ordinaten des Seilpolygons stellen dann die Werte $A\frac{l}{\varepsilon\lambda}$ vor. Wir werden dieses Seilpolygon in der Folge das „$A\frac{l}{\varepsilon\lambda}$-Polygon“ nennen.

Zahlenbeispiel. Dem Leser wird empfohlen, auf dem angegebenen Wege die Spannkräfte D für den bereits in No. 155 untersuchten Halbparabelträger von 36^m Stützweite zu bestimmen. Wird das $A\frac{l}{\varepsilon\lambda}$-Polygon sowie die Parabel, welche die y_g liefert, im Maßstabe $1^{cm} = 20^t$ gezeichnet und $H = 4\lambda$ (also $\varepsilon = 4$) gewählt, so werden die Spannkräfte D im Maßstabe $1^{cm} = 80^t$ erhalten. Man findet

$$\begin{array}{l|l|l|l} {}_{min}D_2 = -92{,}4^t & {}_{min}D_4 = -44{,}3^t & {}_{min}D_6 = -19{,}5^t & {}_{min}D_8 = +2{,}1^t \\ {}_{max}D_2 = +67{,}8^t & {}_{max}D_5 = +38{,}9^t & {}_{max}D_7 = +16{,}2^t & {}_{max}D_9 = -14{,}2^t \end{array}$$

und, da der Träger in Bezug auf die Senkrechte durch seine Mitte symmetrisch ist,

$${}_{max}D_3 = {}_{max}D_9 = -14{,}2^t \;|\; {}_{min}D_3 = +2{,}1^t \;|\; {}_{max}D_4 = +16{,}2^t \;|\; {}_{min}D_5 = -19.5^t.$$

Die Diagonale D_3 wird nur gedrückt; D_8 wird nur gezogen. Die Diagonalen D_4 und D_5 werden abwechselnd gezogen und gedrückt. D_1 wurde bereits in No. 155 angegeben.

Bei konstanter Feldweite lassen sich die durch den Lastenzug hervorgerufenen Werte $\frac{M_m}{\lambda}$ auch sehr schnell mit Hilfe der früher mitgeteilten Tabellen berechnen.

Wird z. B. der in Fig. 255 dargestellte Halbparabelträger durch einen von B bis zum Knoten 3 reichenden Lastenzug beansprucht, so entstehen die Momente $M_2 = A_2 2\lambda$; $M_3 = A_3 3\lambda$. Haben die Fahrzeuge die in der Fig. 111 angegebenen Radstände und Achsenbelastungen und wird der Zug von drei vorwärts fahrenden Lokomotiven gezogen, so gilt die Tabelle I auf Seite 310.

Nun ist die Länge der zu belastenden Strecke: $x'_3 = 7\lambda = 7 \cdot 3{,}6 = 25{,}2^m$; ihr entspricht laut Spalte 2 jener Tabelle die Zuglänge $c_1 = 23{,}6$ und die Achsenzahl $n = 12$; ferner ergibt sich:

$$\mathfrak{P}_n = 132, \quad \mathfrak{S}_n = 1647{,}0$$

und

$$b_n = x'_3 - c_1 = 1{,}6^m,$$

weshalb man erhält:

$$A_3 = \frac{\mathfrak{S}_n + \mathfrak{P}_n b_n}{l} = \frac{1647.0 + 132 \cdot 1{,}6}{36} = 51{,}6167$$

und

$$\frac{M_2}{\lambda} = 2A_3 = 103{,}233; \quad \frac{M_3}{\lambda} = 3A_3 = 154{,}850.$$

Digitized by Google

Die ständige Belastung ist $g = 1{,}74^t$ f. d. Meter; sie erzeugt (vergl. das Zahlenbeispiel auf Seite 266): $\frac{M_2}{\lambda} = 50{,}112^t$ und $\frac{M_3}{\lambda} = 65{,}772^t$, so daß sich schließlich ergibt:

$$\frac{M_2}{\lambda} = 103{,}233 + 50{,}112 = 153{,}34^t$$

und

$$\frac{M_3}{\lambda} = 154{,}850 + 65{,}772 = 220{,}62^t.$$

Besonders einfach gestaltet sich die Berechnung der $\frac{M}{\lambda}$ bei gleich großen Feldweiten und Knotenlasten. Sollen z. B. für den in der Fig. 256 dargestellten Balastungsfall die Werte $\frac{M_3}{\lambda}$ und $\frac{M_4}{\lambda}$ bestimmt werden, so findet man

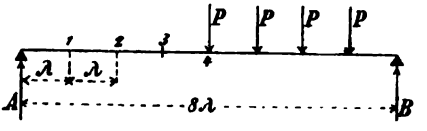


Fig. 256.

$$A = P(\tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5}) = \tfrac{10}{5} P$$

und $M_3 = A4\lambda$; $M_4 = A5\lambda$ also: $\frac{M_3}{\lambda} = \frac{40}{5} P$ und $\frac{M_4}{\lambda} = \frac{50}{5} P$. Hierzu sind noch die von der ständigen Last herrührenden Werte $\frac{M}{\lambda}$ zu addieren; sie werden auf die am Schluß von Nr. 165 angegebene Weise bestimmt.

Es sei noch der Fall untersucht, in welchem ein Zug von Einzellasten die Grundstellung überschreitet. Gesucht sei ${}_{max}D_3$ für den Träger in Fig. 257. Das zweite Rad des von B aus vorrückenden Zuges liege am Knoten 3. Verlangt wird die zeichnerische Bestimmung der Werte $y = \frac{M}{\varepsilon\lambda}$.

Nachdem man $A\frac{l}{\varepsilon\lambda}$ auf die vorhin angegebene Weise bestimmt hat*), findet man: $M_2 = Ax_2$ und $M_3 = Ax_3 - P_1 e_1$ also $y_{p2} = \frac{M_2}{\varepsilon\lambda} = A\frac{l}{\varepsilon\lambda}\frac{x_2}{l}$ und $y_{p3} = \frac{M_3}{\varepsilon\lambda} = A\frac{l}{\varepsilon\lambda}\frac{x_3}{l} - \frac{P_1 e_1}{\varepsilon\lambda}$. Nun streiche man zunächst das zweite Glied des für y_{p3} gefundenen Ausdrucks und be-

*) Zu beachten ist, daß $A\frac{l}{\varepsilon\lambda}$ gleich der unter der *ersten* Last gemessenen Ordinate des $A\frac{l}{\varepsilon\lambda}$-Polygons ist.

Digitized by Google

stimme y'_2 und y''_3 genau wie in Fig. 255. Schließlich bringe man von y''_3 den Wert $\frac{P_1 e_1}{\varepsilon\lambda}$ in Abzug; er wird zweckmäßig gerechnet und

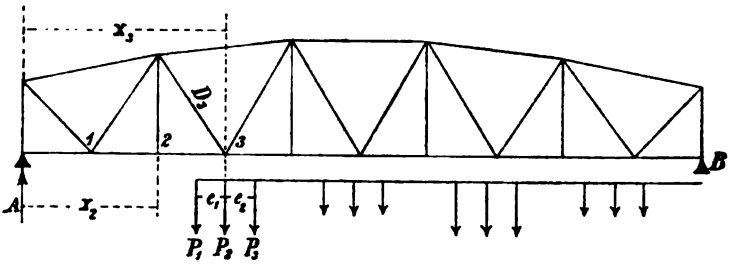


Fig. 257.

ist für den vorhin untersuchten Halbparabelträger $= \frac{13 \cdot 1{,}4}{4 \cdot 3{,}6} = 1{,}27'$.

Läge P_3 am Knoten 3, so müßte y''_3 um $\frac{P_1(e_1+e_2)+P_2 e_2}{\varepsilon\lambda}$ verkleinert werden.

Durch Anwendung der eben entwickelten Regeln auf den vorhin untersuchten Halbparabelträger überzeugt man sich, daß die Grenzwerte der Spannkräfte in den Diagonalen infolge von Grundstellungen entstehen. (Eine Ausnahme bildet D_1, welches gleichzeitig mit O_1 seinen Grenzwert annimmt.)

b. Das Fachwerk mit Vertikalen.

157. Die Verkehrslast greift in den Knotenpunkten der oberen Gurtung an. Wir betrachten das m^{te} Feld des Balkens (Fig. 258), tragen auf der Vertikale mm vom unteren Knotenpunkte m aus die Strecke $\overline{ma} = \frac{M_m}{\lambda_m}$ ab und auf der $(m-1)^{ten}$ Vertikale die Strecke $\overline{(m-1)b} = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m}$, ziehen durch a eine Parallele zu O_m, welche die Diagonale D_m in c schneidet, hierauf durch b eine Parallele zu U_m, welche D_m in d und V_m in e trifft, und erhalten: Spannkraft O_m = Strecke $\overline{ac}$, Spannkraft U_m = Strecke $\overline{dc}$,

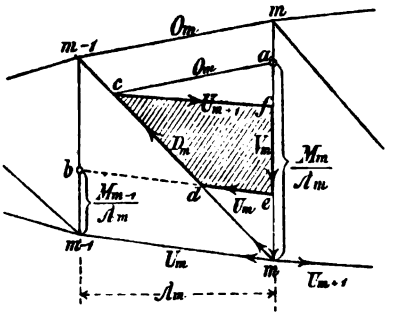


Fig. 258.

Digitized by Google

Spannkraft D_m = Strecke dc. Um die Spannkraft V_m zu finden, zeichnen wir das Kräftepolygon für den unteren Knotenpunkt m, ziehen also $cf \parallel U_{m+1}$ und finden $V_m = \overline{ef}$. Dabei ist angenommen worden, daß nicht nur die Verkehrslast, sondern auch die gesamte ständige Belastung in den Knoten der oberen Gurtung angreift. Die in das Kräftepolygon $edcfe$ des unteren Knotens m eingetragenen Pfeile geben an, in welchem Sinne die Kräfte U_m, D_m, U_{m+1}, V_m an diesem Knoten angreifen. In Figur 258 wird die Diagonale D_m gezogen, die Vertikale V_m gedrückt. Ein Irrtum bezüglich der Vorzeichen ist ausgeschlossen, wenn man daran denkt, daß die untere Gurtung stets gezogen ist.

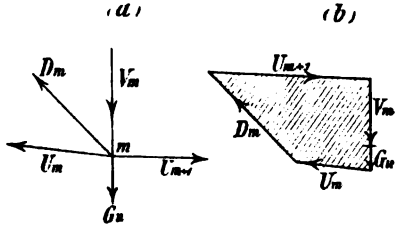


Fig. 259.

Greift nun am unteren Knotenpunkte m die ständige Last G_m an, so entsteht das in der Figur 259b dargestellte Kräftepolygon. Der vorhin ermittelte *Druck* $V_m = \overline{ef}$ ist um G_m zu verkleinern. Es empfiehlt sich nun, die Grenzwerte sämtlicher Kräfte V zunächst unter der Voraussetzung unbelasteter unterer Knotenpunkte zu ermitteln und hierauf zu jedem dieser Werte (unter Berücksichtigung der Vorzeichen) den Betrag $(+ G_m)$ zu addieren.

Die in der Figur 258 angegebene Anordnung des Kräfteplanes empfiehlt sich bei der Bestimmung der Grenzwerte der Spannkräfte D_m und V_m. Um die größten Spannkräfte in den Gurtungen zu ermitteln, entscheidet man sich, (um das Zusammenfallen verschiedener Polygone zu vermeiden) zweckmäßiger für die Anordnung in Figur 260; alle diese Kräftepolygone werden in dasselbe Netz eingezeichnet.

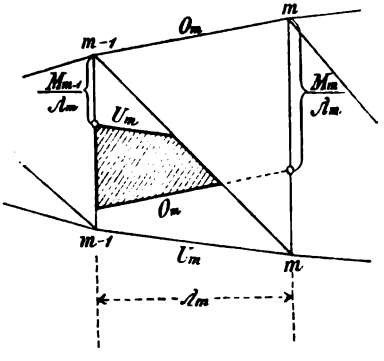


Fig. 260.

158. Die Verkehrslast greift in den Knotenpunkten der unteren Gurtung an. Trägt man auf den das Feld begrenzenden Vertikalen von den oberen Knotenpunkten m und $m-1$ aus die Strecken $\overline{ma} = \frac{M_m}{\lambda_m}$

Digitized by Google

und $\overline{(m-1)\,b} = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m}$ ab, zieht $ade \parallel O_m$ und $bc \parallel U_m$ (Fig. 261), so erhält man $\overline{bc} = U_m$, $\overline{cd} = D_m$ und $\overline{de} = O_m$. Wird noch $cf \parallel O_{m-1}$ gezogen, so ist $fcdef$ das Kräftepolygon für den oberen Knoten $m-1$ und man erhält $\overline{ef} = V_{m-1}$, vorausgesetzt, daß auch die ständige Belastung ausschließlich in den Knoten der unteren Gurtung wirkt. Die in die Fig. 261 eingetragenen Richtungspfeile geben an, in welchem Sinne die Spannkräfte D_m, O_m, V_{m-1}, O_{m-1} am oberen Knoten $m-1$ angreifen. Im vorliegenden Falle wird Diagonale D_m gezogen und Vertikale V_{m-1} gedrückt.

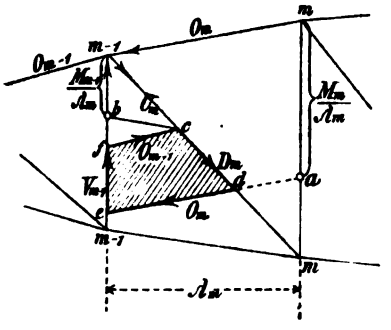


Fig. 261.

Greift am oberen Knoten $m-1$ die ständige Last G_0 an, so entsteht das in der Fig. 262 b dargestellte Kräftepolygon; der vorhin

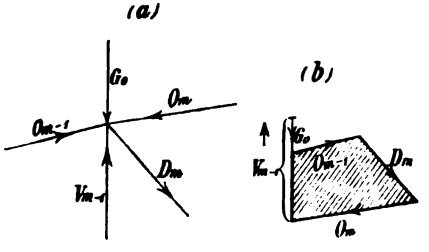


Fig. 262 a u. b.

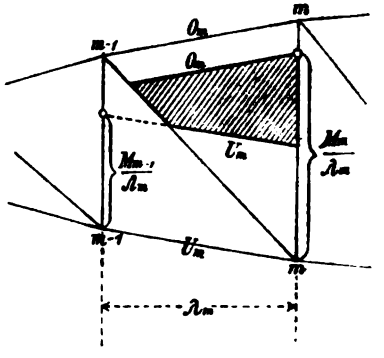


Fig. 263.

erhaltene *Druck* $V_{m-1} = \overline{ef}$ wird um den Druck G_0 vergrößert. Es ist ratsam, zunächst die Grenzwerte sämtlicher Kräfte V unter der Voraussetzung unbelasteter oberer Knoten zu bestimmen und hierauf zu jedem dieser Werte den Betrag $(-G_0)$ zu addieren.

Weiter empfiehlt es sich, die in der Fig. 261 angegebene Anordnung des Kräfteplanes nur bei Bestimmung der Grenzwerte D und V beizubehalten und die größten Spannkräfte in den Gurtungen auf die in der Fig. 263 veranschaulichte Weise zu ermitteln.

Digitized by Google

§ 34.

Fachwerkträger mit Gegendiagonalen.

159. Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen. Ein Fachwerkbalken, dessen Füllungsstäbe wechselweise Vertikalen und linkssteigende Diagonalen sind, Fig. 264, werde durch einen Schnitt tt in zwei Teile zerlegt. O_m, U_m, D_m sind die Spannkräfte in den Stäben des m^{ten} Feldes, β_m, γ_m, φ_m deren Neigungswinkel gegen die Wagerechte. γ_m und φ_m werden nach unten positiv gezählt, β_m nach oben. Wirken auf den Träger nur senkrechte äußere Kräfte, so muß sein

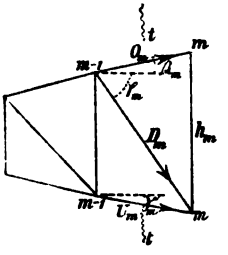


Fig. 264.

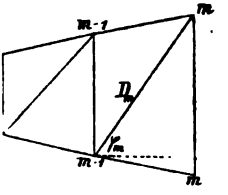


Fig. 265.

$$O_m \cos\beta_m + D_m \cos\varphi_m + U_m \cos\gamma_m = 0, \text{ also}$$
$$D_m \cos\varphi_m = -O_m \cos\beta_m - U_m \cos\gamma_m.$$

Nun ist aber (nach Seite 245): $O_m = -\dfrac{M_m \sec\beta_m}{h_m} = -\dfrac{M_m}{h_m \cos\beta_m}$ und $U_m = +\dfrac{M_{m-1}}{h_{m-1}\cos\gamma_m}$, wobei h_m = Länge der m^{ten} Vertikale, mithin

$$D_m \cos\varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}.$$

Ganz ebenso ergibt sich für eine rechtssteigende Diagonale (Fig. 265)

$$D_m \cos\varphi_m = \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{M_m}{h_m} = -\left[\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right],$$

so daß sich also — dieselben Momente vorausgesetzt — die wagerechten Seitenkräfte der beiden Spannkräfte D nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Die Belastung des Trägers bestehe aus einer ständigen und einer beweglichen. Erstere sei gleichmäßig über die Stützweite verteilt und $= g$ für die Längeneinheit; sie erzeugt die Momente

$$M_{m\,g} = \frac{g x_m x'_m}{2} \text{ und } M_{(m-1)g} = \frac{g x_{m-1} x'_{m-1}}{2},$$

wo x_m und x'_m die Abstände des Knotens m von den Auflagersenk-

Digitized by Google

rechten A und B bedeuten, Fig. 266. Wird zur Abkürzung gesetzt

$$\frac{x_m x'_m}{2h_m} = \eta_m,$$

so ergibt sich für die durch die ständige Belastung hervorgerufene Spannkraft in einer linkssteigenden Diagonale die Formel

$$D_{mg} \cos \varphi_m = g\,(\eta_m - \eta_{m-1}).$$

Es sei nun $\eta_m > \eta_{m-1}$, also D_{mg} positiv. Eine von B aus bis m vorrückende Verkehrslast*) erzeugt ebenfalls eine positive Spannkraft D, und es ist deshalb ${}_{max}D_m$ positiv. Wenn dagegen die Verkehrslast von A bis $m-1$ vorrückt, so ruft sie in der fraglichen Diagonale einen Druck hervor, welcher größer oder kleiner sein kann als der Zug D_{mg}. Im ersten Falle ist ${}_{min}D_m$ ein Druck, im zweiten Falle ein Zug. Wird nun angenommen, daß ${}_{min}D_m$ für die linkssteigende Diagonale ein Druck ist, daß aber diese Diagonale aus einem Seile besteht,

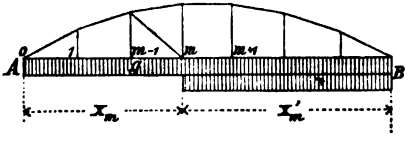


Fig. 266.

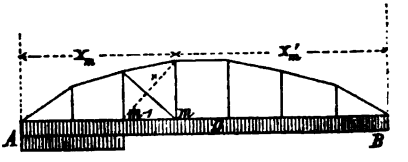


Fig. 267.

welches einem Drucke keinen Widerstand leistet, so muß, soll der Träger starr sein, in dem betreffenden Felde noch eine rechtssteigende Diagonale, die ebenfalls aus einem Seile bestehen darf, angeordnet werden. Bei jedem Belastungszustande, welcher die linkssteigende Diagonale auf Druck beansprucht, wird die rechtssteigende Diagonale gezogen.**)

Diejenige der beiden sich kreuzenden Diagonalen, für welche D_{mg} positiv ist; nennen wir die *Hauptdiagonale*, die andere die *Gegendiagonale*.

---

*) Wir sprechen, der kürzeren Ausdrucksweise wegen, nur von Grundstellungen der Verkehrslast.

**) Es gibt Laststellungen, bei denen beide Diagonalen gleichzeitig gezogen werden; die Aufgabe, die Spannkräfte D zu berechnen, ist dann statisch unbestimmt und fällt unter die im II. Bande unseres Buches vorgetragenen Untersuchungen. Für die Praxis genügen indessen die oben gegebenen Formeln. In neuerer Zeit sucht man Fachwerke mit Gegendiagonalen zu vermeiden; ihre Theorie darf aber hier nicht fehlen, schon weil sie für die Umrechnung älterer Brücken auf Grund der neuen Belastungsvorschriften wichtig ist.

Digitized by Google

Nehmen also die Werte η von den Auflagern nach der Mitte hin zu, so sind auf der linken Hälfte des Trägers die linkssteigenden und auf der rechten Hälfte die rechtssteigenden Diagonalen die Hauptdiagonalen. Bei nach der Mitte hin abnehmenden η findet das Umgekehrte statt. Sind sämtliche η gleich groß, so ist das Eigengewicht — und überhaupt jede gleichmäßig über den ganzen Träger verteilte Belastung — ohne Einfluß auf die Spannkraft D. Die Trägerform, welche diesem Grenzfalle entspricht, findet man mittels der Gleichung

$$\eta = \frac{xx'}{2h} = \text{Konst.},$$

woraus

$$h = \frac{xx'}{2 \cdot \text{Konst.}}.$$

Soll $h = f$ sein für $x = x' = \frac{1}{2}l$ (Fig. 268), so folgt: $f = \frac{l^2}{8 \cdot \text{Konst.}}$ und Konst. $= \frac{l^2}{8f}$, weshalb

$$h = \frac{4fx(l-x)}{l^2}.$$

Dies ist die Gleichung einer *Parabel*, deren Pfeil $= f$ ist, und der hiernach berechnete Träger heißt *Parabelträger*. Die eine Gurtung darf beliebig geformt werden; die Lagen der Knotenpunkte der anderen Gurtung ergeben sich mit Hilfe der Gleichung

$$h_m = \frac{4fx_m x'_m}{l^2}.$$

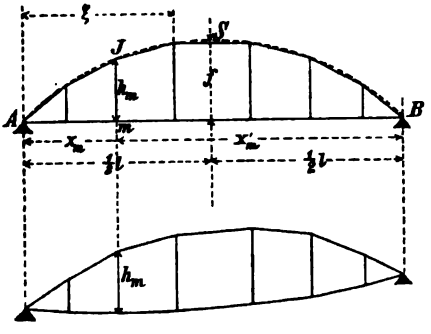


Fig. 268.

Zu beachten ist, daß f stets die Parabelordinate für $x = \frac{1}{2}l$ bedeutet, daß also bei fehlender Mittelvertikale (Fig. 268) $h_{max} < f$ ist. Liegt h_{max} bei $x = \xi$, und besitzt es einen gegebenen Wert, so findet man $\left(\text{wegen } h_{max} = \frac{4f\xi(l-\xi)}{l^2}\right)$

$$f = \frac{h_{max} l^2}{4\xi(l-\xi)}.$$

Es ist aber stets zu empfehlen, f anzunehmen und hierauf die Längen h durch Rechnung oder Zeichnung zu bestimmen. Wie man den einer beliebigen Abscisse x_m entsprechenden Punkt J einer Parabel $AJSB$ durch Zeichnung findet, ist auf Seite 135 (Fig. 124) angegeben worden.

Digitized by Google

In den folgenden allgemeinen Untersuchungen über Träger mit ausschließlich gezogenen Diagonalen beschäftigen wir uns nur mit dem Falle nach der Mitte hin wachsender Werte η, da dieser bei allen im Hochbau und Brückenbau angewandten Trägern mit Gegendiagonalen vorliegt.

Um zu entscheiden, ob in irgend einem (z. B. dem m^{ten}) Felde der linken Trägerhälfte eine linkssteigende Zugdiagonale genügt, bestimme man für diese Diagonale die Spannkraft $_{min}D$. Soll dies beispielsweise mittels des *Zimmermann*schen Verfahrens geschehen, so werden die der gefährlichsten Belastung entsprechenden Werte $\frac{M_m}{\lambda_m}$ und $\frac{M_{m-1}}{\lambda_m}$ auf die in No. 156 angegebene Weise ermittelt, hierauf die Strecken

$$\overline{ma} = \frac{M_m}{\lambda_m} \text{ und } \overline{(m-1)b} = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} \text{ (vergl. Fig. 269a)}$$

aufgetragen und durch die Punkte a und b zu O_m bezw. U_m Parallelen gezogen, welche die fragliche Diagonale in den Punkten d und c schneiden mögen. Die Strecke $\overline{dc}$ stellt dann die Spannkraft $_{min}D$ vor, und zwar ist $_{min}D$ positiv oder negativ, je nachdem c oberhalb oder unterhalb d liegt. Vergl. Fig. 262. In dem in der Fig. 269a dargestellten Falle ergibt sich mithin für $_{min}D$ ein negativer Wert, und es ist deshalb eine Gegendiagonale nötig.

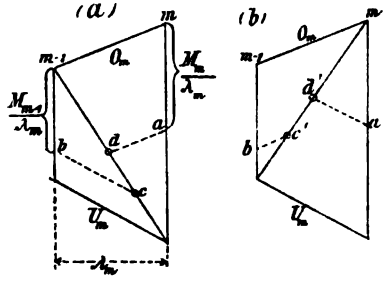


Fig. 269.

Zieht man nun nach Einzeichnung dieser Gegendiagonale: $bc' \parallel O_m$ und $ad' \parallel U_m$ (Fig. 269b), so findet man den größten Zug in der Gegendiagonale: $_{max}D = \text{Strecke } \overline{d'c'}$.

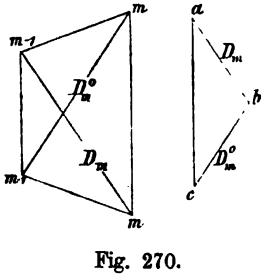


Fig. 270.

Hat man die Spannkraft $_{min}D_m$ in der Hauptdiagonale des m^{ten} Feldes nach einem der im § 32 beschriebenen Verfahren bestimmt und einen negativen Wert erhalten, welcher in Fig. 270 nach Größe und Richtung durch die Strecke ab dargestellt sein möge, so findet man den größten Zug $_{max}D_m^{\circ}$, durch welchen die in jenem Felde nötig

Digitized by Google

werdende Gegendiagonale beansprucht wird, indem man durch b eine Parallele zur Gegendiagonale und durch a eine Senkrechte zieht, welche jene Parallele in c schneidet. Es ist dann $\overline{bc} = {}_{max}D^{o}_{m}$.

Bei gewissen Trägerarten, z. B. beim Parabelträger und auch bei dem in No. 146 untersuchten Paulischen Träger, sind in allen Feldern Gegendiagonalen nötig, bei vielen Trägern (z. B. bei dem in der Fig. 271 dargestellten) nur in einzelnen und zwar dann in

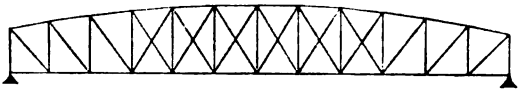


Fig. 271.

den mittelsten Feldern. Die Spannkräfte O, U, V in den Stäben der Felder ohne Gegendiagonalen werden auf die früher gezeigte Weise bestimmt; die Ermittelung der Spannkräfte in den Feldern mit Gegendiagonalen soll im Folgenden gelehrt werden. Wir beginnen mit der

160. Bestimmung von ${}_{min}V_{m}$. Die fragliche Vertikale gehöre der linken Trägerhälfte an, und trenne zwei Felder mit Gegendiagonalen. Es sind zwei Belastungsfälle zu untersuchen. Greift die veränderliche Belastung an der unteren Gurtung an, so ist sie einmal von B bis $m+1$ vorzuschieben, Fig. 272, ein zweites Mal von A bis $m-1$, Fig. 273. Im ersten Falle treten im m^{ten} und im $(m+1)^{ten}$ Felde die linksteigenden Diagonalen in Tätigkeit, im zweiten Falle die rechtssteigenden. Die Bestimmung von ${}_{min}V_{m}$ kann mit Hilfe der in den §§ 32 und 33 angegebenen Verfahren erfolgen, wobei darauf zu achten ist, daß in dem in der Fig. 272 dargestellten Belastungsfalle neben der Spannkraft ${}_{min}V_{m}$ noch die größte Spannkraft in der $(m+1)^{ten}$ Hauptdiagonale entsteht, während der Belastungsfall in Fig. 273 die größte Spannkraft in der Gegendiagonale des m^{ten} Feldes hervorbringt.

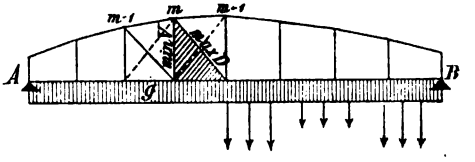


Fig. 272.

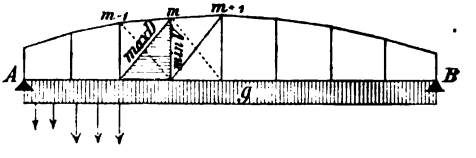


Fig. 273.

Digitized by Google

Greift die veränderliche Belastung an der oberen Gurtung an, so ist nacheinander der Einfluß einer von B bis m und einer von A bis m reichenden Belastung zu untersuchen. Fig. 274 und 275.

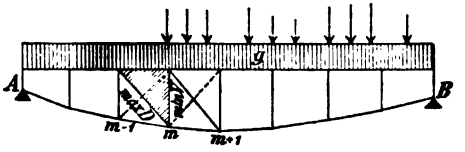


Fig. 274.

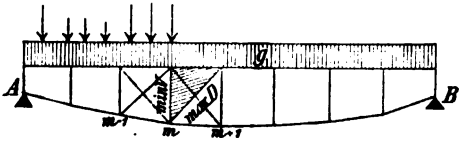


Fig. 275.

Die beiden, für $_{m}V_{m}$ erhaltenen Werte werden schließlich miteinander verglichen; der ungünstigere der beiden Werte ist natürlich maßgebend für die Bestimmung des Querschnitts der Vertikale.

161. Bestimmung von $_{max}V_{m}$ (Fig. 276). *Unter der Voraussetzung, daß die Belastung in den Knoten der unteren Gurtung angreift,* entsteht, wenn keine Gegendiagonalen vorhanden sind, die Spannkraft $_{max}V_{m}$, sobald die veränderliche Belastung von A aus bis m vorgerückt ist. Sind aber Gegendiagonalen vorhanden, so wird bei dieser Laststellung die Gegendiagonale des $(m+1)^{\text{ten}}$ Feldes die größte Inanspruchnahme erleiden, vielleicht wird auch im m^{ten} Felde eine dort etwa vorhandene Gegendiagonale gespannt. Auf jeden Fall lassen die bis jetzt abgeleiteten Gesetze im Stich.

Wir denken nun den Träger voll belastet. Auf der linken Hälfte sind dann die linkssteigenden Diagonalen gespannt, und wir dürfen behaupten:

1) Alle Lasten rechts von $(m+1)$ tragen zu der Spannkraft V_{m} in *negativem* Sinne bei, alle Lasten links von m in *positivem* Sinne. Durch Entlastung des Trägers in der Nähe von B wird also V_{m} vergrößert. Es nähert sich V_{m} dem Werte $_{max}V_{m}$.

2) Alle Lasten rechts von $(m+1)$ tragen zu der Spannkraft D_{m+1} der linkssteigenden Diagonale in *positivem* Sinne bei, so daß Entlastung des Trägers in der Nähe von B die Kraft D_{m+1} verkleinert.

Jetzt entlasten wir den Träger rechts von $(m+1)$, vergrößern dadurch V_{m} und verkleinern D_{m+1} und setzen diese Entlastung so lange fort, bis $D_{m+1}=0$, bis also $\frac{M_{m}}{h_{m}}=\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}}$ ist.

Digitized by Google

Sobald dies erreicht ist, Fig. 276, greift am oberen Knotenpunkte m keine Diagonale an, und das Kräftepolygon für diesen Knotenpunkt

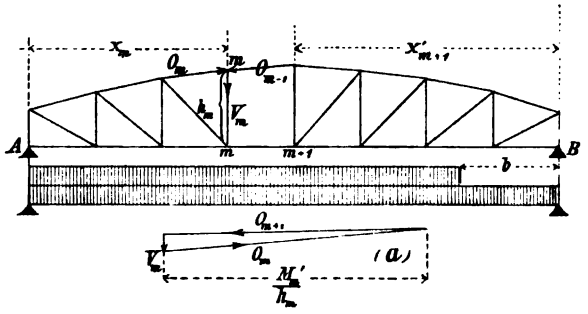


Fig. 276.

ist das in Fig. 276a dargestellte. Es besteht aus V_m, O_m und O_{m+1}. Je größer O_m und O_{m+1} sind, desto größer wird V_m*). Da nun durch weitere Entlastung die Spannkräfte O_m und O_{m+1} verkleinert werden, wird auch V_m wieder verkleinert. Daraus folgt der Satz:

Entlastet man, von dem Zustande voller Belastung ausgehend, den Träger rechts von $(m+1)$ derart; daß beide Diagonalen des $(m+1)^{ten}$ Feldes spannungslos sind, so nimmt die Spannkraft in der m^{ten} Vertikale ihren größten positiven Wert an.

Wir bezeichnen mit M_m und M_{m+1} die Momente infolge *voller* Belastung, mit M'_m und M'_{m+1} die Momente nach der Entlastung und nehmen an, daß der Träger nur rechts von $(m+1)$ entlastet wird. Bedeutet dann ΔA die Abnahme des Stützenwiderstandes, so werden die Momente verkleinert um $\Delta M_m = \Delta A x_m$ bezw. $\Delta M_{m+1} = \Delta A x_{m+1}$. Es entsteht $M'_m = M_m - \Delta M_m$, bezw. $M'_{m+1} = M_{m+1} - \Delta M_{m+1}$. Da nun $\Delta M_m : \Delta M_{m+1} = x_m : x_{m+1}$, so folgt: Trägt man auf den verlängerten Vertikalen m und $m+1$ von einer Wagerechten aus die Werte auf: $\overline{DE} = M_m \mid \lambda_{m+1}$**) und $\overline{FH} = M_{m+1} \mid \lambda_{m+1}$ (Fig. 277) und macht hierauf: $\overline{EE'} = \Delta M_m \mid \lambda_{m+1}$, ferner $\overline{HH'} = \Delta M_{m+1} \mid \lambda_{m+1}$, so schneiden sich die Geraden $E'H'$ und $\overline{EH}$ in einem Punkte S der Auflagersenkrechten A. Die Strecken $\overline{DE'}$ und $\overline{FH'}$ stellen beziehungsweise die Werte $M'_m \mid \lambda_{m+1}$ und $M'_{m+1} \mid \lambda_{m+1}$ vor, und der

*) Wir nehmen zunächst an, daß die gesamte ständige Belastung in den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreift. Die unter dieser Voraussetzung ermittelten Spannkräfte $_{max}V_m$ müssen dann auf die in No. 158 angegebene Weise verbessert werden.

**) $M_m \mid \lambda_{m+1} = \dfrac{M_m}{\lambda_{m+1}}$. Warum wir diese Verhältnisse (welche *Kräfte* sind) auftragen und nicht die Momente, wird sogleich einleuchten.

Digitized by Google

Schnittpunkt C' der Geraden $E'H'$ und DF ist (nach No. 68) ein Punkt in der Richtung der für das $(m+1)^{\text{te}}$ Feld sich ergebenden Querkraft

$$Q_{m+1} = \frac{M'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{M'_m}{\lambda_{m+1}}.$$

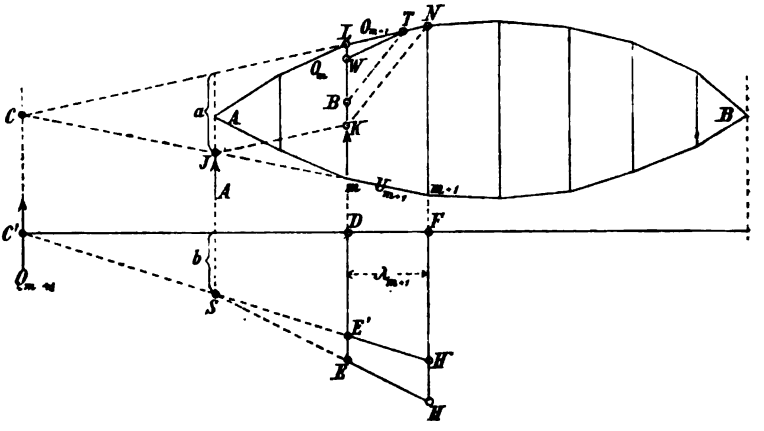


Fig. 277.

Um letzteres einzusehen, betrachte man $E'H'$ und DF als Seite und Schlußlinie eines Seilpolygons, dessen Polweite $= \lambda_{m+1}$ ist.

Soll nun die vorgenommene Entlastung des Trägers zur Spannkraft ${}_{max}V_m$ führen, so müssen die Diagonalen des $(m+1)^{\text{ten}}$ Feldes spannungslos sein, und es muß dann die Querkraft Q_{m+1} durch den Schnittpunkt C der Gurtkräfte O_{m+1} und U_{m+1} gehen. Durch diese Bedingung ist die Lage der Geraden $C'SE'$ vollständig bestimmt; man ist somit im stande, den Wert $M'_m \mid \lambda_{m+1}$ und mithin auch $M'_m \mid h_m$ zu ermitteln, und zwar ohne erst angeben zu müssen, auf welche Weise der Träger rechts von $m+1$ entlastet werden muß. Kennt man aber $M'_m \mid h_m$, so läßt sich ${}_{max}V_m$ mit Hilfe des in der Fig. 276a dargestellten Kräftepolygons finden.

Da nun die Bestimmung des Punktes C in der Regel unbequem ist, so ist es zweckmäßiger, die Gleichung zu benutzen (siehe Fig. 277):

$$\overline{DE'} : h_m = b : a, \text{ woraus } \frac{M'_m}{\lambda_{m+1}} = \overline{DE'} = \frac{h_m b}{a}.$$

Es folgt dann

$$O_{m+1} = \frac{M'_m}{h_m \cos \beta_{m+1}} = \frac{b}{a} \lambda_{m+1} \sec \beta_{m+1} = \frac{b}{a} \overline{LN},$$

Digitized by Google

wobei L und N die Endpunkte des Gurtstabes O_{m+1} (dessen Neigungswinkel $= \beta_{m+1}$ und dessen Länge $= \lambda_{m+1} \sec \beta_{m+1}$ ist) bezeichnen. Bringt man den Untergurtstab U_{m+1} mit der linken Auflagersenkrechten in J zum Schnitt, legt durch J zu O_{m+1} eine Parallele, welche die m^{te} Vertikale in K trifft, zieht die Gerade KN, macht $\overline{LB} = b$ und $BT \parallel KN$, so ist (wegen $\overline{LK} = a$)

$$\overline{LT} = \overline{LN} \frac{b}{a} = O_{m+1}.$$

Wird schließlich noch $TW \parallel O_m$ gezogen, so ist

$$\overline{LW} = {}_{max} V_m.$$

Über die Darstellung der Werte $M \mid \lambda$ wurde das Nötige im § 31 mitgeteilt. Besteht die Verkehrslast aus einem Zuge von Einzellasten, so empfiehlt es sich, diejenige Laststellung anzunehmen, welche das größte Moment M_m erzeugt.

Der Satz, auf welchen sich die beschriebene Darstellung von ${}_{max} V_m$ stützt, wurde vom Verfasser zuerst in der 11ten Auflage von des „Ingenieurs Taschenbuch" (Hütte) veröffentlicht unter gleichzeitiger Mitteilung von Formeln für gleichförmige Belastung. Wir lassen die Ableitung der letzteren hier folgen.

Die Entlastung der Strecke b (Fig. 276), welche zunächst kleiner als x'_{m+1} vorausgesetzt werden möge, bewirkt eine Verkleinerung von A um $\Delta A = \frac{p b^2}{2l}$. Es entsteht deshalb

$$M'_m = M_m - \frac{p b^2}{2l} x_m \quad \text{und} \quad M'_{m+1} = M_{m+1} - \frac{p b^2}{2l} x_{m+1},$$

und man erhält zur Berechnung von b die Gleichung $(M'_m \mid h_m = M'_{m+1} \mid h_{m+1}$

$$\frac{M_m}{h_m} - \frac{p b^2}{2l} \frac{x_m}{h_m} = \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{p b^2}{2l} \frac{x_{m+1}}{h_{m+1}},$$

woraus $\left(\text{mit } M = \frac{q x x'}{2}\right)$

$$\text{(I)} \quad \frac{p b^2}{2l} = \frac{M_{m+1} h_m - M_m h_{m+1}}{x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1}} \quad \text{und} \quad b^2 = \frac{q l}{p} \frac{x_{m+1} x_{m+1} h_m - x_m x'_m h_{m+1}}{x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1}}.$$

Nun ergibt sich

$$\frac{M'_m}{h_m} = \frac{x_{m+1} M_m - x_m M_{m+1}}{x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1}} = \frac{q x_m x_{m+1} \lambda_{m+1}}{2 (x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1})}$$

und nach Fig. 276a, mit Beachtung der Winkel-Bezeichnungen in Fig. 264

$${}_{max} V_m = \frac{M'_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}),$$

wofür mit Rücksicht auf die oben angreifende ständige Belastung g_o der verbesserte Wert

$$\text{(II)} \quad {}_{max} V_m = \frac{M'_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}) - \tfrac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1})$$

anzunehmen ist. Man erhält schließlich

$$\text{(III)} \quad {}_{max} V_m = \frac{q x_m x_{m+1} \lambda_{m+1}}{2 (x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1})} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}) - \tfrac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Digitized by Google

Liefert Gleichung I für b einen Wert, der größer ist als x'_{m+1}, so entsteht $M'_{m+1} = M_{m+1} - \frac{p b^2}{2l} x_{m+1} + \frac{p(b - x'_{m+1})^2}{2}$, und es müßte jetzt b aus der Bedingung

$$\frac{M_m}{h_m} - \frac{p b^2}{2l}\frac{x_m}{h_m} = \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{p b^2}{2l}\frac{x_{m+1}}{h_{m+1}} + \frac{p(b - x'_{m+1})^2}{2h_{m+1}}$$

berechnet werden. Man findet aber dann ${}_{max}V_m$ genügend genau und etwas zu groß, wenn man $b = x'_{m+1}$ setzt. Es führt dies zu

$$\text{(IV)} \quad {}_{max}V_m = \frac{x_m(q x'_m l - p x'_{m+1})^2}{2 l h_m}(\operatorname{tg}\beta_m - \operatorname{tg}\beta_{m+1}) - \tfrac{1}{2} g_o(\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Noch zweckmäßiger ist es, mit Rücksicht auf die geringere Bedeutung, welche die ${}_{max}V$ gegenüber den ${}_{min}V$ für die Querschnittsermittelung besitzen, die Berechnung von b zu sparen und stets die Gleichung III anzuwenden. Man erhält dann für ${}_{max}V$ entweder einen genauen oder einen etwas zu großen Wert. Aus demselben Grunde ist es auch bei der oben gezeigten zeichnerischen Bestimmung von ${}_{max}V$ nicht nötig, auf eine nähere Untersuchung der durch unseren Satz vorgeschriebenen Entlastung des Trägers einzugehen; vielmehr genügt es, vorauszusetzen, daß es möglich sei, durch Beseitigung von Lasten rechts von $m+1$ die Spannkraft in der $(m+1)^{\text{ten}}$ Diagonale aufzuheben.

Wir wollen noch ein zweites und drittes Verfahren zur Ermittelung von ${}_{max}V_m$ mitteilen und betrachten hierbei eine auf der *rechten* Hälfte des Trägers befindliche Vertikale mm. Es entsteht dann ${}_{max}V_m$, wenn der Balken so belastet ist, daß im m^{ten} Felde keine Diagonale gespannt wird.

Zweites Verfahren. Wir setzen zunächst eine gleichmäßige Verkehrslast (p) voraus und nehmen an, daß die Strecke x'_m mit $p x'_m$ belastet ist,

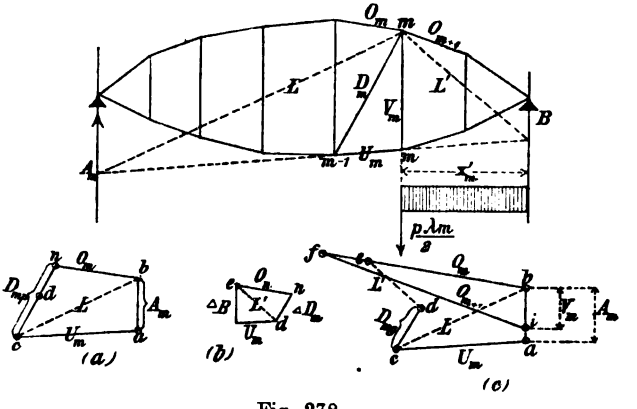


Fig. 278.

während in m die Einzellast $\frac{p\lambda_m}{2}$ angreift, Fig. 278. Im m^{ten} Felde sei vorläufig eine rechtssteigende Diagonale angenommen; sie wird

Digitized by Google

infolge der vorausgesetzten Belastung einen Druck $D_{m,p}$ erleiden, welcher nach Ermittelung von A_m mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens bestimmt werden kann. Vergl. Fig. 278a. Bringt man vom Drucke $D_{m,p} = \overline{cn}$ den durch die ständige Belastung verursachten Zug $D_{m,g} = \overline{cd}$ in Abzug, so bleibt, da ja im m^{ten} Felde eine Gegendiagonale notwendig sein soll, ein Druck $D_m = \overline{dn}$ übrig, und dieser Druck möge nun durch eine links von $m-1$ aufgebrachte Verkehrsbelastung aufgehoben werden. Der durch diese hinzugefügte Belastung erzeugte rechte Stützenwiderstand sei ΔB, und der in der Diagonale hervorgebrachte Zug sei ΔD_m; er läßt sich mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens bestimmen (Fig. 278b) und muß gleich dem vorhin erhaltenen Drucke D_m sein. Aus dieser Bedingung ergibt sich nun die in der Fig. 278c dargestellte Bestimmungsweise von ${}_{max}V_m$.

Man mache $\overline{ab} = A_m$, ziehe $bc \parallel L$ und $ac \parallel U_m$, trage in c die zur Diagonale D_m parallele Strecke: $\overline{cd} = D_{m,g}$ an und ziehe $de \parallel L'$ und $be \parallel O_m$. Dann ist $\overline{eb}$ gleich der von der Verkehrslast herrührenden Spannkraft O_m, entsprechend einem Belastungszustande, für welchen die Diagonalen des m^{ten} Feldes spannungslos sind. Um dies einzusehen, lege man die Figuren 278a und 278b so aneinander, daß sich die Strecken ΔD_m und D_m decken. Verlängert man schließlich be um $\overline{ef} = O_{m,g}$ (= Spannkraft infolge der ständigen Belastung) und zieht $fi \parallel O_{m+1}$, so schneidet man auf ba die Strecke

$$bi = {}_{max}V_m$$

ab. Das Dreieck bif ist das Kräftepolygon für den oberen Knoten m.

Unser zweites Verfahren ist hauptsächlich dann zweckmäßig, wenn die von der Verkehrslast herrührenden Spannkräfte in sämtlichen Füllungsstäben nach *Culmann* und die durch die ständige Belastung erzeugten Spannkräfte nach *Cremona* ermittelt werden, weil man dann A_m, $D_{m,g}$, $O_{m,g}$ ohnehin bestimmen muß.

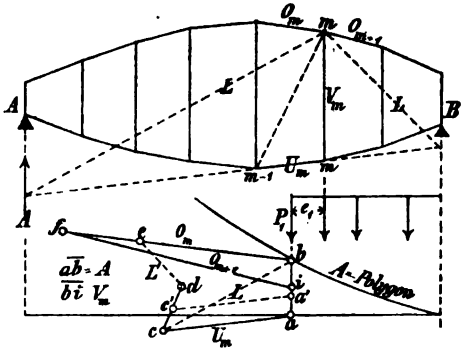


Fig. 279.

Besteht die Verkehrslast aus einem von B aus vorrückenden Zuge von Einzellasten, so empfiehlt es sich, die zweite Last bei m liegend anzunehmen. An die Stelle A_m tritt jetzt die

Digitized by Google

unter P_1 gemessene Ordinate des A-Polygons. Nach Aufzeichnung des Dreiecks abc (wobei wie vorhin $\overline{ab} = A$, $ac \parallel U_m$ und $bc \parallel L$) wird $aa' = P' = P_1 \frac{e_1}{\lambda_m}$ gemacht und durch a' zu U_m eine Parallele gezogen, welche eine durch c zur Diagonale D_m gelegte Parallele in c' schneidet; worauf cc' um $c'd = D_{m_g}$ verlängert und im übrigen wie vorhin verfahren wird. Die Strecke cc' stellt den Einfluß der in $(m-1)$ wirksamen Last P' auf die Spannkraft D_m dar.*)

Drittes Verfahren. Es wird angenommen, daß der Balken außer der ständigen Belastung noch einen von B aus vorgeschobenen Zug von Einzellasten trägt, dessen zweite Last bei m liegt. Für diesen Belastungsfall werden die Werte $M_m \mid \lambda_m$ und $M_{m-1} \mid \lambda_m$ ermittelt und auf den Verlängerungen der Vertikalen m und $m-1$ als Ordinaten (DE und FH in Fig. 280) aufgetragen. Hierauf werden links von $m-1$ so lange Lasten aufgebracht, bis die anfänglich gezogene linksteigende Diagonale des m^{ten} Feldes spannungslos wird. Es ändert sich hierbei der Stützenwiderstand B um $+\Delta B$ und die Verhältnisse $M \mid \lambda$ wachsen beziehungsweise um

$$\bar{E}\bar{E}' = \frac{\Delta M_m}{\lambda_m} = \frac{\Delta B}{\lambda_m} x'_m \quad \text{und} \quad HH' = \frac{\Delta M_{m-1}}{\lambda_m} = \frac{\Delta B}{\lambda_m} x'_{m-1},$$

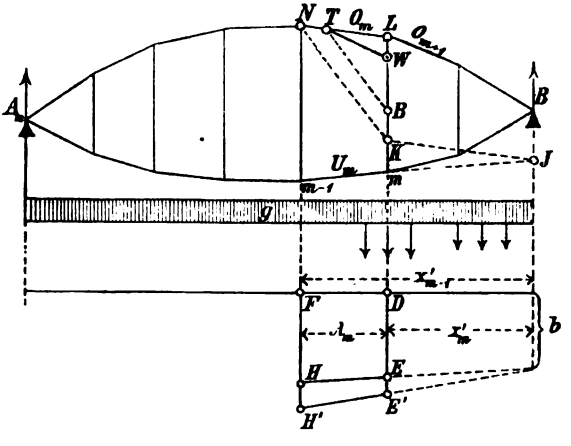


Fig. 280.

*) Man hat sich hierbei (nach No. 153) die Einflüsse der links vom Knoten $m-1$ in Fig. 279 wirkenden äußeren Kräfte A und P' gesondert dargestellt zu denken. Die Spannkraft O_m wird dann durch P' nicht verändert.

Digitized by Google

wonach $\overline{EE'} : \overline{HH'} = x'_m : x'_{m-1}$. Hieraus folgt, daß sich die Geraden $H'E'$ und HE in einem Punkte der Richtungslinie von B schneiden müssen, während sich aus der Bedingung, daß die Spannkraft $D_m = 0$ sein soll, schließen läßt, daß der Schnittpunkt der Geraden $H'E'$ und FD auf der Senkrechten durch den Schnittpunkt der Gurtstäbe O_m und U_m liegt. Überhaupt lassen sich jetzt Schritt für Schritt dieselben Schlüsse ziehen wie bei der Entwicklung des ersten Verfahrens, und es ergibt sich dann die folgende Darstellung von ${}_{max}V_m$.

Der Stab U_m der unteren Gurtung wird mit der Senkrechten durch B in J zum Schnitt gebracht und durch J zu O_m eine Parallele gezogen, welche die m^{te} Vertikale in K trifft. Vergl. Fig. 280. Nun wird die Gerade KN gezogen, LB gleich der Strecke b gemacht, welche die Geraden FD und HE auf der Richtungslinie von B abschneiden und $BT \parallel KN$ gezogen. Schließlich wird noch $TW \parallel O_{m+1}$ gemacht und ${}_{max}V_m = \overline{LW}$ erhalten.

Unser drittes Verfahren ist hauptsächlich dann von Vorteil, wenn die Spannkräfte ${}_{max}D$ und ${}_{min}V$ auf die von *Zimmermann* angegebene Weise (§ 31) bestimmt werden und die Verkehrslast aus einem Zuge von Einzellasten besteht, während das erste Verfahren namentlich bei gleichförmiger Belastung zu empfehlen ist.

Bei der Anwendung des zweiten und dritten Verfahrens braucht über Größe und Stellung der links von $m-1$ wirkenden Verkehrlast nichts bekannt zu sein. Es genügt, anzunehmen: der Träger ist links von $m-1$ so belastet, daß die in der Gegendiagonale des m^{ten} Feldes durch die ständige Last und durch den von B aus bis ins m^{te} Feld vorgeschobenen Lastenzug erzeugte Spannkraft wieder aufgehoben wird. Nun kann es aber vorkommen, daß zur Aufbringung jener Belastung der Raum fehlt, und daß selbst bei voller Belastung des Trägerteiles links von $m-1$ in jener Gegendiagonale ein kleiner Zug übrig bleibt. Trotzdem ist es zulässig, jene Verfahren anzuwenden, weil sie einen etwas zu großen Wert ${}_{max}V_m$ liefern, der indes von dem genaueren Werte nur wenig abweicht. Man kann übrigens den entstandenen Fehler leicht verkleinern, zuweilen sogar aufheben, wenn man sich an die Regel hält, daß bei der Ermittelung der ${}_{max}V_m$ in die Kräftepolygone für die oberen Knotenpunkte m (Fig. 276a) nicht Kräfte O eingeführt werden dürfen, welche die vorher aus den Momenten ${}_{max}M$ gefolgerten größten Spannkräfte O übersteigen.

Greift die Belastung in den Knotenpunkten des Obergurtes an, so ist die Bestimmung der Spannkräfte ${}_{max}V$ sehr umständlich; es genügt aber, die Kräfte ${}_{min}V$ zu ermitteln und bei Berechnung der zulässigen Inanspruchnahme die zweite Grenzspannkraft = Null zu setzen. Da die ${}_{max}V$ hier kleine Drücke sind, so erhält man die Querschnitte

Digitized by Google

etwas zu groß. Eine Ausnahme bilden die Sichelträger. Diese werden aber in der Regel als Parabelträger konstruiert, und dann entstehen die ${}_{max}V$ bei gänzlicher Belastung; sie ergeben sich, da sämtliche Diagonalen spannungslos sind, aus den Kräften ${}_{max}U$. Es werden die Kräftepolygone für die Knotenpunkte der unteren Gurtung gezeichnet. Vergl. No. 169.

162. Spannkräfte in den Gurtungen. Besteht die Verkehrslast aus einem Zuge von Einzellasten, so werden die Momente ${}_{max}M$ im allgemeinen bei verschiedenen Laststellungen entstehen. Ist dann

$$\frac{{}_{max}M_m}{h_m} > \frac{{}_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}},$$

so ist auch

$$\frac{{}_{max}M_m}{h_m} > \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}},$$

wo M_{m-1} dasjenige für den $(m-1)^{ten}$ Knotenpunkt gebildete Moment ist, welches bei der das Moment ${}_{max}M_m$ erzeugenden Laststellung entsteht. Es ist also bei dieser Laststellung im m^{ten} Felde die linkssteigende Diagonale gespannt und

$$O_m = -\frac{{}_{max}M_m}{h_m} \sec \beta_m.$$

Dagegen kann es vorkommen, daß im vorliegenden Falle

$$\frac{{}_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}} > \frac{M_m}{h_m}$$

ist, wo M_m das gleichzeitig mit ${}_{max}M_{m-1}$ entstehende Moment bedeutet. Da nun in diesem Falle die rechtssteigende Diagonale gespannt wird, so darf streng genommen nicht

$$\text{(I)} \quad U_m = \frac{{}_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}} \sec \gamma_m$$

gesetzt werden, vielmehr ist

$$U_m < \frac{{}_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}} \sec \gamma_m.$$

Der Fehler, der durch Anwendung von Formel I entsteht, ist indes gering. Er darf um so mehr zugelassen werden, als sich U_m etwas zu groß ergibt, und der Wert einer allzupeinlichen Rechnung — wie nicht oft genug betont werden kann — höchst zweifelhaft ist.

Deshalb setzen wir

$$\left.\begin{aligned} O_m \cos \beta_m &= -\frac{{}_{max}M_m}{h_m} \\ U_m \cos \gamma_m &= +\frac{{}_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}} \end{aligned}\right\} \text{ sobald } \frac{{}_{max}M_m}{h_m} > \frac{{}_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}}$$

Digitized by Google

und ganz entsprechend

$$\left.\begin{aligned} O_m \cos\beta_m &= -\frac{{}_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}} \\ U_m \cos\gamma_m &= +\frac{{}_{max}M_m}{h_m} \end{aligned}\right\} \text{ sobald } \frac{{}_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}} > \frac{{}_{max}M_m}{h_m}.$$

Im ersten Falle ist bei der zeichnerischen Ermittelung von O_m und U_m im m^{ten} Felde eine linkssteigende Diagonale anzunehmen (Fig. 263), im zweiten Falle eine rechtssteigende (Spiegelbild der Fig. 263, in welcher dann aber $m-1$ und m miteinander zu vertauschen sind).

163. Der Schwedlerträger. Wird die Gurtung eines Fachwerkbalkens so geformt, daß die Spannkraft ${}_{min}D$ jeder Diagonale gleich Null ist, so genügt in jedem Felde des Balkens eine schlaffe Hauptdiagonale. Gegendiagonalen sind überflüssig. Ein solcher Träger heißt, nach seinem Erfinder, ein *Schwedler-Träger*.

Bezeichnet man mit M_m und M_{m-1} die auf m und $m-1$ bezogenen Angriffsmomente für diejenige Laststellung, welche ${}_{min}D_m$ erzeugt, so muß sein

$$\text{(I)} \quad \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = 0, \text{ also } \frac{h_{m-1}}{h_m} = \frac{M_{m-1}}{M_m}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man, sobald h_m gegeben ist, die Länge h_{m-1} berechnen. Die Gestalt der einen Gurtung darf beliebig angenommen werden, diejenige der anderen ergibt sich dann durch wiederholte Anwendung der Gleichung (I).

Um h_{m-1} durch Zeichnung zu ermitteln, nehme man eine Gegendiagonale an (Fig. 281) und bestimme h_{m-1} so, daß die Spannkraft

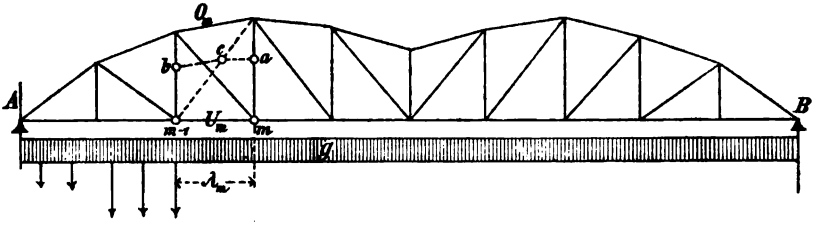


Fig. 281.

in dieser Gegendiagonale = 0 wird. Dazu trage man auf der m^{ten} und $(m-1)^{ten}$ Vertikale von den unteren Knoten m und $m-1$ aus die

Digitized by Google

Strecken $\overline{ma} = \frac{M_m}{\lambda_m}$ und $\overline{(m-1)b} = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m}$ auf*), lege durch a zu U_m eine Parallele, welche die Gegendiagonale in c schneidet, verbinde c mit b durch eine Gerade und ziehe $O_m \mid cb$. Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt aus dem Spiegelbilde der Figur 258 auf Seite 270; denn fallen in dieser Figur die Punkte d und c zusammen, so ist die Spannkraft $D_m = \overline{cd} = 0$.

Für die in der Nähe der Trägermitte liegenden Felder ergibt sich in der Regel $M_{m-1} > M_m$ also $h_{m-1} > h_m$, und es entsteht dann bei symmetrischer Anordnung des Trägers die in der Figur 281 dargestellte unschöne Form. Um diese zu vermeiden, führt man den mittleren Trägerteil mit parallelen Gurtungen aus, muß aber dann die Felder desselben mit Gegendiagonalen ausrüsten. Vergl. Fig. 282 und Fig. 283.

Bei Ermittelung der Höhen h_m ist insofern Vorsicht geboten, als die unter allen Umständen ungünstigste Belastung vorausgesetzt werden muß. Hat man z. B. für eine Eisenbahnbrücke die Verhältnisse $\frac{h_{m-1}}{h_m}$ so gewählt, daß für die gefährlichsten Stellungen eines bestimmten Lastenzuges die Spannkräfte ${}_{min}D_m = 0$ werden, so wird, falls die Brücke einmal von einem schwereren Zuge befahren werden sollte, eine negative Spannkraft ${}_{min}D_m$ entstehen, welche von einer nur gegen Zug widerstandsfähigen Diagonale nicht aufgenommen werden kann. Die Starrheit des Trägers wird dann nur durch die an den Knotengelenken auftretenden Reibungswiderstände, oder durch die an Stelle jener Gelenke angeordneten Nietverbindungen gesichert, und es erfahren namentlich die Gurtungen größere Beanspruchungen auf Biegung. Um diesen vorzubeugen, nehme man eine möglichst große Verkehrsbelastung an, schätze dagegen die günstig wirkende ständige Belastung nicht zu hoch ab.

164. Rechnerische Bestimmung der Form eines Schwedlerträgers. *a. Die Verkehrslast besteht aus Einzellasten.* Wir lösen die folgende Aufgabe: Eine Eisenbahn soll durch Schwedlerträger von 40^m Länge, 4^m Feldweite und 6^m Höhe überführt werden. Gesucht ist die Gestalt des Trägers. Die ständige Belastung schätzen wir nach der auf Seite 137 mitgeteilten Erfahrungsformel zu

$$g = 27{,}5\,l + 750 = 27{,}5 \cdot 40 + 750 = 1850^k = 1{,}85^t \text{ f. d. Meter Gleis,}$$

wofür wir aber aus den oben angeführten Gründen den kleineren Wert $g = 1{,}7^t$ in Rechnung stellen wollen. Die Belastung der ersten Lokomotivachse erhöhen wir auf 15^t und beschränken uns auf den Einfluß von Grundstellungen.**)

*) Die zeichnerische Ermittelung der Werte $\frac{M}{\lambda}$ ist in No. 156 beschrieben worden.

**) Das Beispiel ist aus den früheren Auflagen übernommen. Über die z. Z. geltenden Belastungsannahmen vergl. man No. 66.

Digitized by Google

Das Angriffsmoment infolge der ständigen Belastung beträgt für den Knoten m (wegen $x_m = m\lambda$ und $l = 10\lambda$)

$$M_{mg} = \frac{g x_m (l - x_m)}{2} = \frac{g\lambda^2 m (10 - m)}{2} = \frac{1{,}7 \cdot 4{,}0^2 m (10 - m)}{2}$$
$$= 13{,}6\, m (10 - m),$$

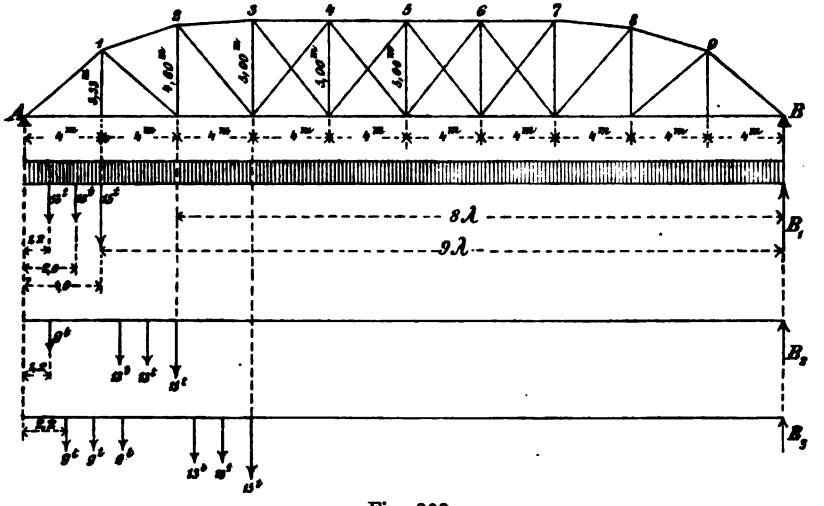


Fig. 282.

und hiernach ergibt sich der Reihe nach für $m = 1, 2, 3, 4, 5$

$M_{g1} = 13{,}6 \cdot 1\,(10 - 1) = 122{,}4^{tm}$ | $M_{g4} = 13{,}6 \cdot 4\,(10 - 4) = 326{,}4^{tm}$
$M_{g2} = 13{,}6 \cdot 2\,(10 - 2) = 217{,}6^{tm}$ | $M_{g5} = 13{,}6 \cdot 5\,(10 - 5) = 340{,}0^{tm}$.
$M_{g3} = 13{,}6 \cdot 3\,(10 - 3) = 285{,}6^{tm}$ |

Behufs Berechnung von $\frac{h_1}{h_2}$ wird der Zug von A bis 1 vorgeschoben, er ruft am rechten Auflager den Widerstand hervor

$$B_1 = \frac{15 \cdot 4{,}0 + 13\,(2{,}6 + 1{,}2)}{l} = \frac{109{,}4}{10\lambda} = \frac{10{,}94}{\lambda},$$

und es ergeben sich mit Berücksichtigung der ständigen Belastung die Angriffsmomente

$$M_1 = B_1\, 9\lambda + M_{g1} = 9 \cdot 10{,}94 + 122{,}4 = 220{,}86^{tm},$$
$$M_2 = B_1\, 8\lambda + M_{g2} = 8 \cdot 10{,}94 + 217{,}6 = 305{,}12^{tm},$$

weshalb

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{220{,}86}{305{,}12} = 0{,}724.$$

Jetzt wird der Zug bis zum Knoten 2 vorgeschoben; er erzeugt

$$B_2 = \frac{28{,}42}{\lambda},$$

Digitized by Google

und es folgt daher

$$M_2 = 8 \cdot 28{,}42 + 217{,}6 = 444.96$$
$$M_3 = 7 \cdot 28{,}42 + 285{,}6 = 484{,}54$$

$$\frac{h_2}{h_3} = \frac{M_2}{M_3} = \frac{444{,}96}{484{,}54} = 0{,}92.$$

Reicht der Zug bis zum Knoten 3, so entsteht

$$B_3 = \frac{53{,}78}{\lambda}$$

$$\left.\begin{aligned} M_3 &= 7 \cdot 53{,}73 + 285{,}6 = 661{,}71 \\ M_4 &= 6 \cdot 53{,}73 + 326{,}4 = 648{,}78 \end{aligned}\right\} \text{ wonach } \frac{h_3}{h_4} > 1.$$

Wir wählen daher: $h_3 = h_4 = h_5 = 5{,}0^m$ und erhalten: $h_2 = 0{,}92 \cdot 5{,}0 = 4{,}60^m$; $h_1 = 0{,}724 \cdot 4{,}60 = 3{,}33^m$.

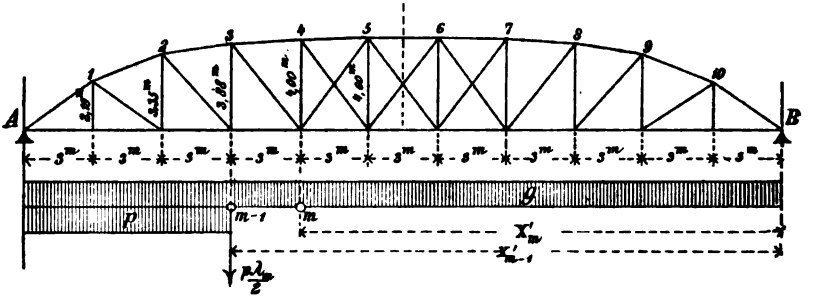


Fig. 288.

b. Gleichförmige Belastung. Um $_{min}D_m$ zu erzeugen, wird der in der Fig. 283 dargestellte, besonders ungünstige Belastungszustand vorausgesetzt. Vergl. No. 148 Seite 248. Der von der Belastung p herrührende Widerstand des rechten Auflagers ist

$$B = \frac{p x_{m-1} x_m}{2l},$$

und es entstehen deshalb die Angriffsmomente

$$M_{m-1} = B x'_{m-1} + M_{(m-1)g} = \frac{p x_{m-1} x_m x'_{m-1}}{2l} + \frac{g x_{m-1} x'^2_{m-1}}{2}$$

$$M_m = B x'_m + M_{mg} = \frac{p x_{m-1} x_m x'_m}{2l} + \frac{g x_m x'^2_m}{2}.$$

Mithin ergibt sich

$$\frac{h_{m-1}}{h_m} = \frac{x_{m-1} x'_{m-1} (gl + p x_m)}{x_m x'_m (gl + p x_{m-1})}.$$

Digitized by Google

Sind die Feldweiten gleich groß, so darf in die vorstehende Gleichung der Wert $\lambda = 1$ eingeführt werden. Liegt also beispielsweise ein Träger von 33 m Stützweite vor mit 11 Feldern von 3 m Länge, so darf gesetzt werden: $x_3 = 3 \cdot 1$ und $x'_3 = (11 - 3) \cdot 1 = 8$. Man erhält dann, wenn $g = 0{,}3^t$ und $p = 0{,}7^{t*})$ ist

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1 \cdot 10\,(0{,}3 \cdot 11 + 0{,}7 \cdot 2)}{2 \cdot 9\,(0.3 \cdot 11 + 0{,}7 \cdot 1)} = \frac{47}{72}$$

$$\frac{h_2}{h_3} = \frac{2 \cdot 9\,(0{,}3 \cdot 11 + 0{,}7 \cdot 3)}{3 \cdot 8\,(0{,}3 \cdot 11 + 0{,}7 \cdot 2)} = \frac{81}{94}$$

$$\frac{h_3}{h_4} = \frac{3 \cdot 8\,(0{,}3 \cdot 11 + 0{,}7 \cdot 4)}{4 \cdot 7\,(0{,}3 \cdot 11 + 0{,}7 \cdot 3)} = \frac{61}{63}$$

$$\frac{h_4}{h_5} = \frac{4 \cdot 7\,(0{,}3 \cdot 11 + 0{,}7 \cdot 5)}{5 \cdot 6\,(0{,}3 \cdot 11 + 0{,}7 \cdot 4)} > 1.$$

Wird die Höhe des Trägers in der Mitte $= 4$ m gewählt, so ergibt sich

$$h_4 = h_5 = 4\text{ m};\quad h_3 = \frac{61}{63} \cdot 4 = 3{,}88\text{ m}\ \text{(nach oben abgerundet)};$$

$$h_2 = \frac{81}{94} \cdot 3{,}88 = 3{,}35\text{ m};\quad h_1 = \frac{47}{72} \cdot 3{,}35 = 2{,}19\text{ m}.$$

§ 35.

Gleichmäßig belastete Parabelträger mit Gegendiagonalen.

165. Spannkräfte in den Gurtungen. Wird die Gestalt der einen Gurtung bei *beliebig angenommener Form der anderen Gurtung* mittels der Parabelgleichung

$$(1)\quad h_m = \frac{4 f x_m x'_m}{l^2}$$

bestimmt — vergl. Seite 275 und Fig. 268 —, so ergibt sich bei gänzlicher Belastung des Trägers mit q

$$\frac{M_m}{h_m} = \frac{q x_m x'_m}{2 h_m} = \frac{q l^2}{8 f}.$$

Die Diagonalen sind spannungslos, und für die Spannkräfte O und U erhält man die Formeln

$$(2)\quad -O_m \cos\beta_m = \frac{q l^2}{8 f} \text{ und } U_m \cos\gamma_m = \frac{q l^2}{8 f}.$$

---

*) Diese Belastungen entsprechen einer Fußgängerbrücke mit 2 Hauptträgern, deren Bahn aus Bohlenbelag auf hölzernen Längsträgern und eisernen Querträgern besteht. Breite der Brücke 3,5 m. Verkehrsbelastung (Menschengedränge) $= 400^k$ f. d. qm, so daß auf jeden der beiden Träger $p = \frac{3{,}5 \cdot 0{,}4}{2} = 0{,}7$ entfällt. Das Eigengewicht ist $= 170^k$ f. d. qm Brückenbahn, also $= \frac{3{,}5 \cdot 0{,}17}{2} = 0{,}3^t$ f. d. m der Trägerlänge geschätzt worden.

Digitized by Google

Macht man also in Fig. 284 die Wagerechte $\overline{CE} = \frac{q l^2}{8 f}$, und zieht durch C zu den Stäben O_1, O_2, O_3, ... Parallelen, welche das in E auf CE errichtete

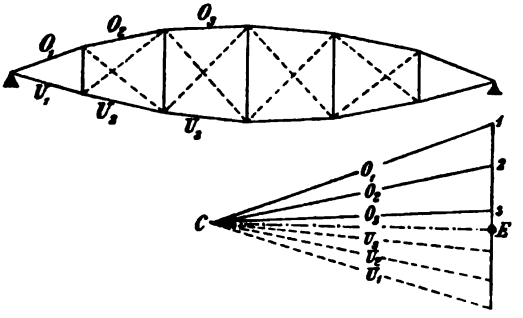


Fig. 284.

Lot in den Punkten 1, 2, 3, ... schneiden, so stellen die Strecken $C1$, $C2$, $C3$, ... die Spannkräfte O_1, O_2, O_3, ... dar. Ganz ebenso werden die Spannkräfte U ermittelt.

166. Spannkräfte in den Diagonalen. Der Einfluß der ständigen Belastung ist = 0. Die Spannkraft $_{max}D_m$ entsteht, wenn die Strecke x'_m mit $p x'_m$ und der Knoten m mit $\frac{p \lambda_m}{2}$ belastet wird (Fig. 285). Vergl. Seite 249. Am linken Auflager wird der Widerstand

$$A_m = \frac{p x'_m x'_{m-1}}{2 l}$$

hervorgerufen, und es entsteht (wegen $x'_{m-1} - x'_m = \lambda_m$)

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = \frac{A_m x_m l^2}{4 f x_m x'_m} - \frac{A_m x_{m-1} l^2}{4 f x_{m-1} x'_{m-1}} = \frac{A_m l^2 \lambda_m}{4 f x'_m x'_{m-1}}$$

$$= \frac{p l \lambda_m}{8 f}.$$

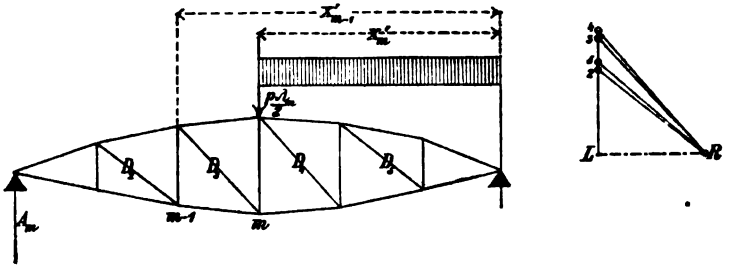


Fig. 285.

Macht man also in Fig. 285 die Wagerechte $\overline{RL} = \frac{p l \lambda_m}{8 f}$ und zieht durch

Digitized by Google

R zu den Diagonalen D_2, D_3, D_4 . . . . Parallelen, welche das in L auf RL errichtete Lot in den Punkten 2, 3, 4, ... schneiden, so stellen die Strecken $R2$, $R3$, $R4$, . . . die Spannkräfte ${}_{max}D_2$, ${}_{max}D_3$, ${}_{max}D_4$, . . . vor.

Bezeichnet man die Länge der Diagonale des m^{ten} Feldes mit d_m, so darf man auch (wegen $\lambda_m = d_m \cos \varphi_m$) schreiben

$$(3) \quad D_m = \frac{pl}{8f} d_m.$$

Wählt man den Kräftemaßstab $\frac{pl}{8} = f$ (also beispielsweise für $l = 40^m$, $f = 6^m$ und $p = 2{,}2^t$ den Maßstab $11{,}0^t = 6^m$), so erhält man

$$D_m = d_m.$$

167. Spannkräfte ${}_{min}V_{mp}$ infolge der beweglichen Belastung. *a. Beliebige Form der einen Gurtung.* Greift die Belastung an der *unteren* Gurtung an, so entsteht ${}_{min}V_m$ gleichzeitig mit ${}_{max}D_{m+1}$. Bringt man U_{m+1} mit A in C zum Schnitt, und zieht durch C Parallelen zu O_m und O_{m+1}, welche die fragliche Vertikale in E und die darauf folgende Diagonale in F schneiden, so ist nach

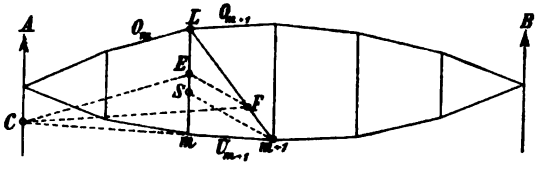


Fig. 286.

No. 152 und mit Bezugnahme auf Fig. 241

$$-\frac{{}_{min}V_{mp}}{{}_{max}D_{(m+1)p}} = -\frac{\overline{LE}}{LF}, \text{ woraus } {}_{min}V_m = -\frac{pl}{8f} d_{m+1} \frac{\overline{LE}}{\overline{LF}}.$$

Zieht man durch den unteren Knoten $m+1$ zu FE eine Parallele, welche die fraglichen Vertikale in S schneidet und setzt $\overline{LS} = c_m$, so findet man

$$(4) \quad {}_{min}V_{mp} = -\frac{pl}{8f} c_m,$$

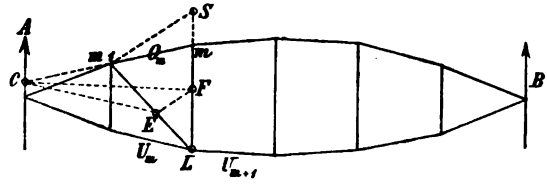


Fig. 287.

und es stellt demnach die im Kräftemaßstabe $\frac{pl}{8} = f$ gemessene Strecke c_m die Spannkraft ${}_{min}V_{mp}$ vor.

Digitized by Google

Greift die Belastung an der oberen Gurtung an, so entsteht $_{min}V_m$ gleichzeitig mit $_{max}D_m$. Man bringt O_m mit A in C zum Schnitt, Fig. 287, zieht $CE \parallel U_m$, $CF \parallel U_{m+1}$ und $(m-1)S \parallel EF$. Mit $\overline{LS} = c'_m$ findet man

$$_{min}V_m = -\frac{pl}{8f}c'_m.$$

b. Die Knotenpunkte beider Gurtungen liegen auf Parabeln, deren Gleichungen mit den Bezeichnungen in Fig. 288 lauten

$$(5)\quad h_{om} = \frac{4f_o x_m x'_m}{l^2}; \quad h_{um} = \frac{4f_u x_m x'_m}{l^2}.$$

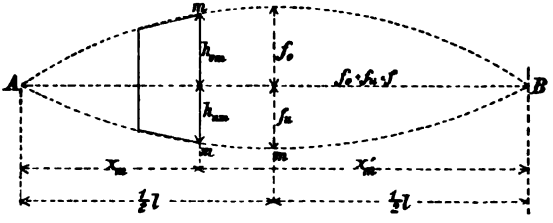


Fig. 288.

Es ist dann $h_m = h_{om} + h_{um} = \frac{4fx_m x'_m}{l^2}$.

Die Spannkraft $_{min}V_{mp}$ wird hervorgerufen, wenn nur Lasten rechts von dem durch O_m, V_m, U_{m+1} geführten Schnitte wirken; sie ergibt sich aus der auf den Schnittpunkt von O_m und U_{m+1} bezogenen Ritterschen Momentengleichung (vergl. Fig. 289)

$$-V_{mp}e_m - A(e_m - x_m) = 0, \text{ woraus } V_{mp} = -A\frac{e_m - x_m}{e_m} = -A\frac{s}{h_m}.$$

Für die Strecke s, welche die Verlängerungen von O_m und U_{m+1} auf der linken Auflagersenkrechten abschneiden, ergibt sich leicht der Ausdruck

$$s = s_o + s_u = h_{om} - \frac{h_{om} - h_{o(m-1)}}{\lambda_m}x_m + h_{u(m+1)} - \frac{h_{u(m+1)} - h_{um}}{\lambda_{m+1}}x_{m+1}$$

und nach Einführung der oben für h_o und h_u angegebenen Werte

$$s = \frac{4x_m}{l^2}(f_o x_{m-1} + f_u x_{m+1}),$$

weshalb

$$\frac{s}{h_m} = \frac{f_o x_{m-1} + f_u x_{m+1}}{f x'_m}.$$

Je nachdem nun die Belastung an der unteren oder oberen Gurtung angreift, wirkt am linken Auflager (nach No. 148 Seite 249) der Widerstand:

$$A_{m+1} = \frac{px'_m x'_{m+1}}{2l} \text{ oder } A_m = \frac{px'_m x_{m-1}}{2l},$$

und man findet deshalb

Digitized by Google

$$(6)\quad \begin{cases} \text{bei unten wirkender Belastung } {}_{min}V_{pm} = -\dfrac{p\,x'_{m+1}}{2lf}\,(f_o x_{m-1} + f_u x_{m+1}) \\ \text{,, oben ,, ,, ,, } {}_{min}V_{pm} = -\dfrac{p\,x'_{m-1}}{2lf}\,(f_o x_{m-1} + f_u x_{m+1}), \end{cases}$$

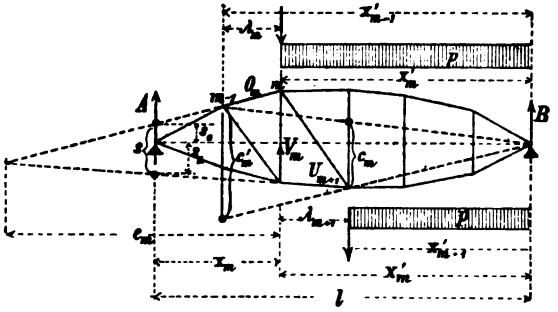


Fig. 289.

wofür man nach einer leichten Umformung auch schreiben darf

$$(7)\quad \begin{cases} {}_{min}V_{pm} = -\dfrac{pl}{8f}\left[h_{u(m+1)} + h_{o(m-1)}\,\dfrac{x'_{m+1}}{x'_{m-1}}\right] \\ {}_{min}V_{pm} = -\dfrac{pl}{8f}\left[h_{o(m-1)} + h_{u(m+1)}\,\dfrac{x'_{m-1}}{x'_{m+1}}\right]. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln ergeben sich die folgenden Gesetze. Greift die Belastung an der unteren Gurtung an, so lege man durch B und den oberen Knoten $m-1$ eine Gerade und bestimme die Strecke c_m, welche dieselbe auf der $(m+1)^{ten}$ Vertikale abschneidet. Man erhält dann ${}_{min}V_{mp} = -\dfrac{pl}{8f}\,c_m$.

Bei oben angreifender Belastung ist ${}_{min}V_{mp} = -\dfrac{pl}{8f}\,c'_m$, wobei c'_m die Strecke ist, welche eine von B aus durch den unteren Knoten $m+1$ gelegte Gerade auf der $(m-1)^{ten}$ Vertikale abschneidet.

Es soll noch *unter der Voraussetzung gleich großer Feldweiten* eine Bestimmungsweise der ${}_{min}V_{mp}$ mitgeteilt werden, welche zu außerordentlich übersichtlichen Kräfteplänen führt. Dabei mögen die folgenden Fälle behandelt werden.

1. Der Bogensehnenträger. Fig. 290.

Die Belastung greife an der unteren Gurtung an. Wegen $f_u = 0$ geht die erste der Gleichungen (6) nach Einsetzen der Werte

$$x'_{m+1} = x'_m - \lambda;\quad x_{m+1} = x_m + \lambda;\quad x'_m = l - x_m$$

über in

$$(8)\quad {}_{min}V_{pm} = -\frac{p[x_m(l-x_m) - \lambda(l-\lambda)]}{2l}.$$

Digitized by Google

Nimmt man jetzt in jedem Knoten eine Last $p\lambda$ an (welche Annahme einer gleichmäßigen Belastung des ganzen Trägers mit p f. d. Längeneinheit

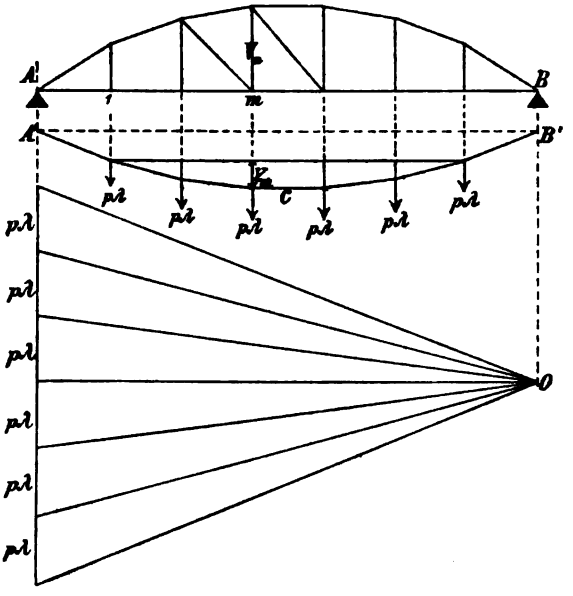


Fig. 290.

entspricht) und zeichnet zu dieser Belastung mit der Polweite l ein Seilpolygon $A'CB'$, so ist dessen Ordinate bei m: $= \frac{p x_m (l - x_m)}{2l}$, nämlich gleich dem durch die Polweite l geteilten, durch gänzliche Belastung des Trägers hervorgerufenen Angriffsmomente $\frac{p x_m (l - x_m)}{2}$. Die Ordinate bei 1 ist: $= \frac{p\lambda (l - \lambda)}{2l}$ und es folgt daher aus Gleichung (8)

$$_{min}V_{pm} = - Y_m,$$

wo Y_m den Unterschied der den Knoten m und 1 entsprechenden Ordinaten des Seilpolygons $A'CB'$ ist. Wir wollen dieses Seilpolygon in der Folge kurz das Polygon S nennen.

Man kann auch Gleich. (8) mit Rücksicht auf $h = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$ umformen in

$$_{min}V_{pm} = - \frac{pl}{8f} (h_m - h_1)$$

und erhält dann, wenn der Kräftemaßstab $\frac{pl}{8} = f$ gewählt wird,

$$_{min}V_{pm} = - (h_m - h_1).$$

Digitized by Google

2. Der Fischbauchträger. Fig. 291.

Die Belastung greife oben an. Dann gilt die zweite der Gleichungen (6). Dieselbe läßt sich umformen in

$$(9)\quad {}_{min}V_{pm} = -\left[\frac{p x_m (l - x_m)}{2l} + \frac{p\lambda (l + \lambda)}{2l}\right] = -Y_m$$

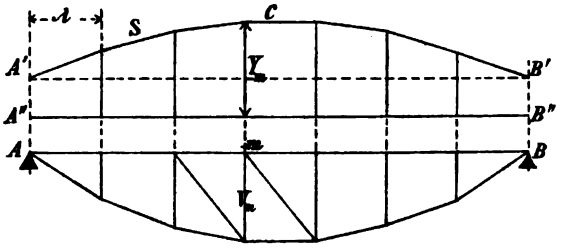


Fig. 291.

und hieraus folgt: Zieht man nach Aufzeichnung des Seilpolygons S im Abstande $\overline{A'A''} = \frac{p\lambda (l + \lambda)}{2l}$ zur Schlußlinie $A'B'$ eine Parallele $A''B''$, so ist Y_m die auf die Gerade $A''B''$ bezogene Ordinate des Seilpolygons.

3. Der Fischträger. Fig. 292.

Es ist $f_o = f_u = \frac{1}{2} f$. Die Gleichungen (6) gehen dann über in

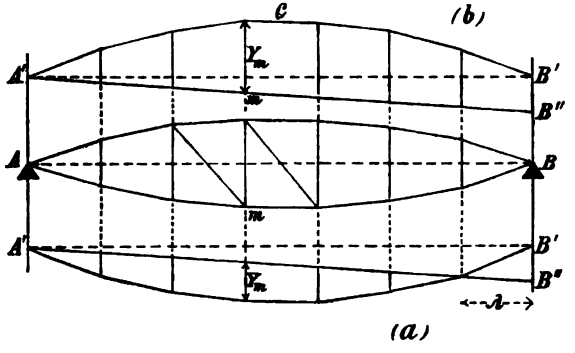


Fig. 292.

$$(10)\quad \begin{cases} {}_{min}V_{pm} = -\left[\dfrac{p x_m (l - x_m)}{2l} - \dfrac{p\lambda x_m}{2l}\right] = -Y_m \\ {}_{min}V_{pm} = -\left[\dfrac{p x_m (l - x_m)}{2l} + \dfrac{p\lambda x_m}{2l}\right] = -Y_m. \end{cases}$$

Digitized by Google

Die erste Gleichung gilt bei unten angreifender, die zweite bei oben angreifender Belastung. Im ersten Falle ist Y_m gleich dem Unterschiede der Ordinate des Polygons S und der Ordinate einer Geraden $A'B''$, welche bei $x = l$ die Ordinate $B'B'' = \frac{p\lambda}{2}$ hat (Fig. 292a) und im zweiten Falle ist Y_m gleich der Summe der Ordinaten dieses Seilpolygons und dieser Geraden. Im ersten Falle ergeben sich links von der Mitte die größeren Spannkräfte V_{pm}, im zweiten Falle rechts von der Mitte. Es genügt, die größeren Werte $_{min}V_{pm}$ zu messen.*)

4. Der Sichelträger. Fig. 293.

Die Belastung greife oben an. Es gilt dann die zweite der Gleichungen (6); der Klammerausdruck lautet aber jetzt: $(f_o x_{m-1} - f_u x_{m+1})$ und es ergibt sich (mit $f_o = f + f_u$)

$$(11) \quad _{min}V_{pm} = -\left[\frac{p x_{m-1} x'_{m-1}}{2l} - \frac{p\lambda}{l}\,\frac{f_u}{f}\,x'_{m-1}\right] = -Y_m.$$

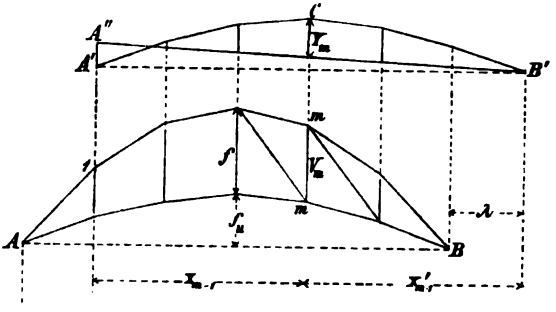


Fig. 293.

Hiernach ist Y_m gleich dem Unterschiede der bei m gemessenen Ordinate des Polygons S, das aber jetzt um eine Feldweite nach rechts zu verschieben ist, und der Ordinate einer Geraden $A''B'$, welche durch $\overline{A'A''} = p\lambda\frac{f_u}{f}$ bestimmt ist, Fig. 293. Es brauchen nur die Spannkräfte $_{min}V_{pm}$ für die Vertikalen rechts von der Mitte gemessen zu werden.

168. Spannkräfte V_g infolge der ständigen Belastung. Befindet sich ein Parabelträger nur unter dem Einflusse der ständigen Belastung g, so sind sämtliche Diagonalen spannungslos, und es lassen sich deshalb nach Ermittelung der Spannkräfte O_g oder U_g die Spannkräfte V_g durch Aufzeichnung der Kräftepolygone für die Knoten der oberen oder unteren Gurtung bestimmen.

---

*) Bewegt sich z. B. im ersten Falle die Belastung von A nach B (statt wie oben vorausgesetzt von B nach A), so treten rechts die größeren Spannkräfte, links die kleineren auf. Es gilt dann das Spiegelbild der Darstellung in Fig. 292a.

Digitized by Google

Liegen die Knotenpunkte beider Gurtungen auf Parabeln, gelten also die Gleichungen (5) auf Seite 294, so ist es möglich, für die Spannkräfte V_g sehr einfache Formeln abzuleiten. Da nämlich die obere Gurtung das Seilpolygon für die in den oberen Knotenpunkten m angreifenden Kräfte $V_{mg} + \frac{1}{2} g_o (\lambda_m = \lambda_{m+1})$ bildet und die untere Gurtung das Seilpolygon für die unten angreifenden Kräfte $\frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1}) - V_{mg}$; da ferner das Verhältnis $\frac{h_{om}}{h_{um}}$ den festen Wert $\frac{f_o}{f_u}$ besitzt und beiden Seilpolygonen dieselbe Polweite $\frac{1}{8} g l^2$ entspricht, so folgt

$$\frac{V_{mg} + \frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1})}{\frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1}) - V_{mg}} = \frac{f_o}{f_u}$$

und hieraus

$$(12) \qquad V_{mg} = \frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \frac{f_o}{f} - \frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \frac{f_u}{f}.$$

Insbesondere ergibt sich

für den Bogensehnenträger in Fig. 290 $V_{mg} = + \frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1})$

„ „ Fischbauchträger „ „ 291 $V_{mg} = - \frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1})$

„ „ Fischträger ($f_o = f_u = \frac{1}{2} f$) in Fig. 292 $V_{mg} = + \frac{1}{2} (g_u - g_o) (\lambda_m + \lambda_{m+1})$

„ „ Sichelträger in Fig. 293 $V_{mg} = \frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \frac{f_o}{f} + \frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \frac{f_u}{f}$.

Für den Sichelträger kann man auch schreiben

$$V_{mg} = \frac{1}{2} \left(g \frac{f_u}{f} + g_u \right) (\lambda_m + \lambda_{m+1}), \text{ wo } g = g_o + g_u.$$

169. Spannkräfte $_{max}V_m$. Während es bei der Bestimmung der $_{min}V_m$ zweckmäßig ist, den Einfluß der beweglichen und ständigen Belastung getrennt zu ermitteln, empfiehlt es sich, bei der Untersuchung der $_{max}V_m$ beide Belastungen gleichzeitig zu berücksichtigen.

Greift die bewegliche Belastung an der unteren Gurtung an, so entsteht $_{max}V_m$ stets bei gänzlicher Belastung des Trägers, wie auch die Form der einen Gurtung gewählt werden mag. Die Diagonalen sind spannungslos, und man findet deshalb nach Ermittelung der Kräfte O die Spannkraft $_{max}V_m$, indem man das Kräftepolygon für den oberen Knoten m zeichnet. Für den *Bogensehnenträger* ist $_{max}V_m$ gleich der Belastung des unteren Knotenpunktes m d. h.

$$_{max}V_m = \frac{1}{2} (g_u + p) (\lambda_m + \lambda_{m+1}),$$

und für den in Fig. 292 dargestellten *Fischträger* erhält man, falls beide Gurtungen in Parabeln einbeschrieben sind und die bewegliche Last unten angreift

$$_{max}V_m = \frac{1}{2} (g_u - g_o + p) \lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Die letzte Formel entsteht, wenn in dem für V_{mg} gefundenen Ausdrucke die Belastung g_u ersetzt wird durch $g_u + p$.

In den Vertikalen des *Sichelträgers* sind auch im Falle oben angreifender beweglicher Belastung größere Züge $_{max}V_m$ möglich; sie treten ein bei gänzlicher Belastung und können nach Ermittelung der U mit Hilfe der Kräftepolygone für die Knoten der unteren Gurtung gefunden werden. Liegen die Knoten beider Gurtungen auf Parabeln (gelten also die Gleichungen 5), so ergibt sich

$$_{max}V_m = \frac{1}{2} \left(q \frac{f_u}{f} + g_u \right) (\lambda_m = \lambda_{m+1}).$$

Digitized by Google

§ 36.

Kräfteplan für einen Parallelträger (Eisenbahnbrücke).

Zahlenbeispiel. Tafel 3.

Eine zweigleisige Bahn soll mittels Parallelträger von der in der Fig. 294 angegebenen Anordnung überführt werden. Stützweite: $l = 36^m$, Trägerhöhe $h = 3{,}6^m$, Anzahl der Felder $= 10$ also Feldweite: $\lambda = 3{,}6^m$. Es sind zwei Hauptträger vorhanden; jeder derselben ist dann für die Belastung eines Gleises zu berechnen.

Die bewegliche Belastung besteht aus einem von drei Lokomotiven geführten Güterzuge, dessen Radstände und Achsenbelastungen in Fig. 111 angegeben sind. Die ständige Belastung (Eigengewicht) darf $g = 1{,}74^t$ geschätzt werden. Vergl. Seite 137.

a. Spannkräfte in den Gurtungen. In den Gurtstäben des m^{ten} Feldes entstehen die Spannkräfte

$$(1) \quad O_m = -\frac{M_m}{h}; \quad U_m = +\frac{M_{m-1}}{h} = -O_{m-1}.$$

Die größten Momente infolge der Verkehrslast sind in Fig. 128 auf Tafel 1 mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmt worden, dessen Polweite $H = 115{,}2^t = 14{,}4^m$ beträgt.*) Wird $H = 14{,}4_m$ angenommen, so sind die Ordinaten y_p des Seilpolygons mit dem Kräftemaßstabe zu messen. Es ist dies beim Parallelträger empfehlenswert, und zwar wird zweckmäßig H gleich einem Vielfachen von h gewählt. Im vorliegenden Falle ist $H = 4h = 4 \cdot 3{,}6$ angenommen worden, und es ergibt sich dann $M_{mp} = 4hy_{mp}$.

Der Pfeil der Parabel, welcher die der ständigen Belastung entsprechenden Werte $y_{mg} = \frac{M_{mg}}{H}$ liefert, ist

$$\frac{gl^2}{8H} = \frac{1{,}74 \cdot 36^2}{8 \cdot 4 \cdot 3{,}6} = 19{,}575^t.$$

Nach Aufzeichnung dieser Parabel (Fig. 294) wurden zu den y_{mg} die der Fig. 128 auf Tafel 1 entnommenen y_{mp} gefügt, worauf gemessen wurde

$$y_1 = y_{1g} + y_{1p} = 28{,}8^t; \quad y_2 = 48{,}7^t; \quad y_3 = 63{,}7^t; \quad y_4 = 72{,}2^t; \quad y_5 = 75{,}7^t.$$

Nun ist aber $\frac{M_m}{h} = \frac{4hy_m}{h} = 4y_m$, und es ergibt sich daher aus Gleichung (1)

*) Beschreibung auf Seite 140 u. f.

Digitized by Google

$$O_1 = -4y_1 = -113'; \quad U_1 = 0$$
$$O_2 = -4y_2 = -195'; \quad U_2 = 113'$$
$$O_3 = -4y_3 = -255'; \quad U_3 = 195'$$
$$O_4 = -4y_4 = -289'; \quad U_4 = 255'$$
$$O_5 = -4y_5 = -303'; \quad U_5 = 289'.$$

Es ist hierbei gleichgültig, ob die Fahrbahn an der unteren oder an der oberen Gurtung liegt. (Fig. 300 u. 301.)

Werden die Diagonalen abwechselnd rechtssteigend und linkssteigend angeordnet, so entstehen die in den Figuren 302 und 303 dargestellten Trägerarten, welche man als *Netzwerke mit eingeschalteten Vertikalen* zu bezeichnen pflegt. Die Spannkraft in einem Gurtstabe ist $= \pm \frac{M}{h}$, wo M das Moment für den dem fraglichen Stabe gegenüberliegenden Knotenpunkt bedeutet. Es ergeben sich die in die Figuren 302 und 303 eingetragenen Kräfte.

b. Spannkräfte in den Diagonalen. Führt man durch das m^{te} Feld einen senkrechten Schnitt tt, Fig. 296, so findet man für irgend einen Belastungszustand zwischen der *Querkraft* $Q_m = A - P_1 - P_2 - \ldots - P_{m-1}$ und der Spannkraft D_m die Beziehung

$$(2) \qquad Q_m - D_m \sin\varphi = 0 \quad \text{d. i.} \quad D_m = Q_m \operatorname{cosec}\varphi.$$

Die Querkräfte Q_m und mithin auch die Spannkräfte D_m sind unabhängig von der Höhenlage der Fahrbahn; denn es ist für die Größe von Q_m gleichgültig, ob die Lasten P in den Knoten der unteren oder oberen Gurtung oder zwischen beiden angreifen. Aus diesem Grunde ist es bei der Berechnung der Q und D nicht nötig, die ständige Belastung g in die Teile g_o und g_u zu zerlegen.

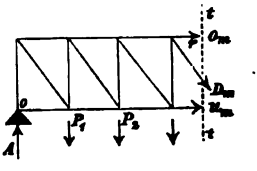


Fig. 296.

Die Querkräfte Q_m sind in der Fig. 295 dargestellt worden. Nach Eintragung der Geraden $A''B''$ mit den Endordinaten $\overline{A'A''} = +\frac{1}{2}gl = \frac{1}{2}1{,}74 \cdot 36 = 31{,}3'$ und $\overline{B'B''} = -31{,}3'$ wurden durch die Punkte, in denen diese Gerade die Senkrechten durch die Feldmitten schneidet, Parallelen zu $A'B'$ gezogen. Die Ordinaten dieser Parallelen geben die Querkräfte Q_g für die einzelnen Felder an; dieselben sind für die linke Hälfte des Trägers positiv, für die rechte Hälfte negativ.

Nun wurde für einen von B nach A sich bewegenden Güterzug das A-Polygon gezeichnet; es liefert die Querkräfte $_{max}Q_p$. Vergl. Fig. 126 auf Tafel 1 und die Beschreibung in No. 81.

Digitized by Google

Für das vierte Feld entsteht ${}_{max}Q_p$ infolge der Grundstellung der Verkehrslast; es muß die *erste Last* des von B nach A fahrenden Eisenbahnzuges beim Knoten 4 liegen. Man erhält ${}_{max}Q_{p4}$ gleich der unter dem Knoten 4 gemessenen Ordinate des A-Polygons. Addiert man hierzu Q_{g4}, so erhält man ${}_{max}Q_4$.

Die Querkraft Q_3 entsteht, sobald die 2te Achse des von B aus vorrückenden Zuges beim Knoten 3 liegt. Man muß also, um ${}_{max}Q_3$ zu erhalten, die von Knoten 3 um $e_1 = 1{,}4$ m*) entfernte Ordinate des A-Polygons zu Q_{g3} addieren und von der so erhaltenen Summe die im Knoten 2 angreifende Last $P_1 \frac{e_1}{\lambda} = P'$ in Abzug bringen. Auch für das erste und zweite Feld ist die Grundstellung nicht die gefährlichste.

Die Querkräfte ergeben sich für die Felder 1 bis 7 positiv, für die Felder 8 bis 10 negativ. Da nun eine linkssteigende Diagonale (wie Gleichung 2 lehrt) gedrückt wird, sobald Q_m negativ ist, so müssen, wenn die Diagonalen stets gezogen sein sollen, in den Feldern 8, 9, 10 rechtssteigende Diagonalen angeordnet werden. Bewegt sich nun der Eisenbahnzug in der Richtung von A nach B über die Brücke, so sind in den Feldern 1 bis 3 linkssteigende und in den Feldern 4 bis 10 rechtssteigende Diagonalen erforderlich, und hieraus folgt, daß die Felder 4, 5, 6, 7 Gegendiagonalen erhalten müssen.

Aus den Querkräften Q lassen sich die Spannkräfte D auf zeichnerischem Wege mit Hilfe der Bedingung finden, daß die senkrechte Seitenkraft ($D_m \sin \varphi$) von D_m gleich Q_m sein muß. Es ergeben sich auf diesem Wege die folgenden Werte

${}_{max}D_2 = +124{,}7^t$	${}_{max}D_4 = +68{,}5^t$
${}_{min}D_2 = {}_{min}D_9 = +27{,}6^t$	${}_{max}D_4 = {}_{max}D_7 = +3{,}8^t$**)
${}_{max}D_3 = +95{,}3$	${}_{max}D_5 = +44{,}4^t$
${}_{min}D_3 = {}_{min}D_8 = +13{,}1^t$	${}_{max}D_5 = {}_{max}D_6 = +22{,}3^t$.

Die größte Spannkraft in der Diagonale D_1 entsteht gleichzeitig mit dem größten Drucke O_1; sie ergibt sich aus dem Kräftepolygon des oberen Knotens 0 (Fig. 294a) und ist ${}_{max}D_1 = 159{,}5^t$***). Wirkt nur die ständige Belastung, so entsteht ${}_{min}D_1 = {}_{min}D_{10} = +39{,}7^t$.

---

*) Es bedeutet e_1 den ersten Radstand.

**) Die Spannkraft ${}_{max}D_7$ wurde (weil sehr klein) im Kräfteplane fortgelassen.

***) Es ist stets $D_1 = -O_1 \sec \varphi$. In Fig. 296a wurde der obere Knoten 0 unbelastet angenommen; indes ist hervorzuheben, daß D_1 unabhängig ist von der Höhenlage der Belastung. Die größte positive Querkraft des ersten Feldes ist: $Q_1 = -O_1 \operatorname{tg} \varphi$, also im vorliegenden Falle: $Q_1 = +113^t$.

Digitized by Google

Die vorstehenden Zahlenwerte sind in den Figuren 300 u. 301 übersichtlich zusammengestellt worden. In den Diagonalen des Netzwerks mit eingeschalteten Vertikalen entstehen die in den Figuren 302 und 303 angegebenen Spannkräfte.

c. Spannkräfte in den Vertikalen. Legt man durch die m^{te} Vertikale einen Schnitt tt (Fig. 297), welcher außerdem nur noch zwei Stäbe trifft, und setzt die Summe der auf den linken Trägerteil wirkenden senkrechten Kräfte gleich Null, so erhält man

$$(3)\quad V_m + Q = 0, \text{ also } V_m = -Q.$$

Je nachdem nun *bei linkssteigenden* Diagonalen sämtliche Lasten (auch das Eigengewicht) in den Knoten der unteren oder oberen Gurtung angreifen, ergibt sich

$$(4)\quad V_m = -Q_{m+1}, \text{ wo } Q_{m+1} = A - (P_1 + P_2 + \ldots + P_m)$$

oder

$$(5)\quad V_m = -Q_m, \text{ wo } Q_m = A - (P_1 + P_2 + \ldots + P_{m-1});$$

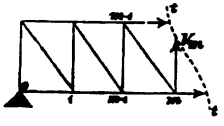


Fig. 297.

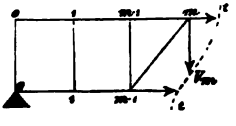


Fig. 298.

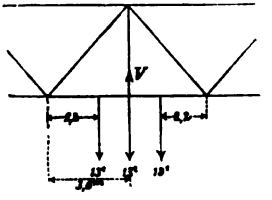


Fig. 299.

denn im ersten Falle gehört die m^{te} Knotenlast zum linken Trägerteile, im zweiten Falle zum rechten.

Ähnlich erhält man bei *rechtssteigenden* Diagonalen (Fig. 298):

$$(6)\quad V_m = +Q_{m+1} \text{ (Last oben)}$$
$$(7)\quad V_m = +Q_m \text{ (Last unten).}$$

Für den vorliegenden Träger ergeben sich nun aus der Fig. 295 die Querkräfte:

${}_{max}Q_2 = +88{,}2^t$	
${}_{max}Q_3 = +67{,}4^t$	${}_{max}Q_7 = +2{,}7^t$
${}_{max}Q_4 = +48{,}4^t$	${}_{max}Q_8 = -9{,}3^t$
${}_{max}Q_5 = +31{,}4^t$	${}_{max}Q_9 = -19{,}5^t$
${}_{max}Q_6 = +15{,}7^t$	${}_{max}Q_{10} = -28{,}1^t$

und es folgt mithin, *wenn die Fahrbahn unten liegt*

${}_{min}V_1 = -88{,}2^t$	${}_{max}V_0 = {}_{max}V_{10} = -28{,}1^t$
${}_{min}V_2 = -67{,}4^t$	${}_{max}V_1 = {}_{max}V_9 = -19{,}5^t$
${}_{min}V_3 = -48{,}4^t$	${}_{max}V_2 = {}_{max}V_8 = -9{,}3^t$
${}_{min}V_4 = -31{,}4^t$	
${}_{min}V_5 = -15{,}7^t$	

${}_{min}V_0$ entsteht gleichzeitig mit ${}_{max}D_1$ (Fig. 294a) und ist: $V_0 = -113^t$.

Digitized by Google

Liegt die Fahrbahn oben, so findet man

$$\begin{aligned} {}_{min}V_2 &= -88{,}2^t \\ {}_{min}V_3 &= -67{,}4^t \\ {}_{min}V_4 &= -48{,}4^t \\ {}_{min}V_5 &= -31{,}4^t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} {}_{max}V_1 &= {}_{max}V_9 = -28{,}1^t \\ {}_{max}V_2 &= {}_{max}V_8 = -19{,}5^t. \end{aligned}$$

Die Spannkraft ${}_{min}V_1$ entsteht gleichzeitig mit ${}_{max}D_1$ und ${}_{max}U_2$ und ergibt sich aus dem Kräftepolygone für den unteren Knotenpunkt 1; man erhält: ${}_{min}V_1 = -{}_{max}D_1 \sin\varphi = -113^t$*), während in der Endvertikale ein Druck wirkt, welcher gleich dem Auflagerwiderstande A ist; es wird

$${}_{min}V_0 = -\overline{A''C} = -130{,}8^t \text{ bei vollbelasteter Brücke;}$$
$${}_{max}V_0 = -B'B'' = -31{,}3^t \text{ bei unbelasteter Brücke.}$$

Die vorstehend angegebenen Werte V sind noch zu verbessern, da die ständige Belastung g nicht ausschließlich in den Knotenpunkten angreift, die zur Aufnahme der Verkehrslast dienen. Wird angenommen, daß bei *untenliegender Fahrbahn* der Teil $g_0 = 0{,}45^t$ des Eigengewichtes g in den oberen Knotenpunkten angreift, so ist zu jeder der vorhin ermittelten Spannkräfte V_1 bis V_5 der Betrag: $-g_0\lambda = -0{,}45 \cdot 3{,}6 = -1{,}6^t$ zu addieren, während V_0 zu ändern ist um $-\frac{1}{2}g_0\lambda = -0{,}8^t$. Es ergeben sich dann die in die Fig. 300 eingeschriebenen Werte.

Bei *obenliegender Fahrbahn* ($g_0 = 1{,}29^t$ und $g_u = 0{,}45^t$) ändern sich V_1 bis V_5 um je: $+g_u\lambda = +1{,}6^t$ und V_0 um $+\frac{1}{2}g_u\lambda = 0{,}8^t$: man erhält die in Fig. 301 angegebenen Spannkräfte.

Die Vertikalen des in der Fig. 302 dargestellten Trägers werden nur auf Zug beansprucht. Ihre größte Anstrengung erfolgt, wenn die mittelste Achse einer Lokomotive bei der fraglichen Vertikale liegt. Durch diese Belastung entsteht

$$V_p = 13 + 13\,\frac{2{,}2}{3{,}6} \cdot 2 = +28{,}9^t \text{ (s. Fig. 299),}$$

wozu die ständige Knotenlast $g_u\lambda = (1{,}74 - 0{,}45)\,3{,}6 = 4{,}6^t$ zu addieren ist. Es folgt

$${}_{max}V = 28{,}9 + 4{,}6 = +33{,}5^t \text{ und } {}_{min}V = +4{,}6^t.$$

Bei obenliegender Fahrbahn werden die Vertikalen des Netzwerks nur gedrückt; Fig. 303.

*) Dieser Wert darf wieder der Fig. 294a entnommen werden. Ersetzt man dort $O_1 = -113^t$ durch $U_2 = +113^t$, so erhält man das Kräftepolygon für den unbelasteten unteren Knoten 2.

Digitized by Google

§ 37.

Kräfteplan für einen Fischbauchträger (Eisenbahnbrücke).

Zahlenbeispiel. Tafel 3.

Die Stützweite des in der Fig. 307 dargestellten Trägers ist = 36m, die Feldweite = 3,6m. Die Knotenpunkte der unteren Gurtung liegen auf einem Kreisbogen, dessen Radius $r = 36^m$ beträgt. Ständige Belastung $g = 1{,}74$ für d. Meter Gleis; sie zerfällt in $g_o = 1{,}29^t$ und $g_u = 0{,}45^t$. Die bewegliche Belastung besteht aus einem von drei Lokomotiven geführten Güterzuge, dessen Radstände und Achsenbelastungen in Fig. 111 angegeben sind. Die Brücke ist zweigleisig und besitzt zwei Hauptträger.

a. Die Spannkräfte infolge der ständigen Belastung wurden in Fig. 305 mittels eines Cremonaschen Kräfteplanes bestimmt. Es genügte, die linke Hälfte des symmetrischen Trägers zu untersuchen. Jeder Knoten der oberen Gurtung trägt die Last: $g_0\lambda = 1{,}29 \cdot 3{,}6 = 4{,}6^t$. Im Knoten 1 greift an: $\frac{1}{2} \cdot 0{,}45\ (2{,}4 + 3{,}0) = 1{,}2^t$, im Knoten 3 die Last: $\frac{1}{2} \cdot 0{,}45\ (3{,}0 + 3{,}6) = 1{,}5^t$ und in jedem der Knoten 5, 7, 9 die Last: $0{,}45 \cdot 3{,}6 = 1{,}6^t$. Es ergeben sich die folgenden Spannkräfte*)

$O_{1g} = -53^t$	$U_{1g} = +60^t$	$D_{2g} = -4{,}2^t$;	$D_{8g} = -2{,}9^t$
$O_{3g} = -55^t$	$U_{2g} = +60^t$	$D_{3g} = -1{,}9^t$;	$D_{9g} = -2{,}1^t$
$O_{5g} = -56^t$	$U_{4g} = +60^t$	$D_{4g} = -3{,}6^t$;	$D_{10g} = -2{,}5^t$
$O_{7g} = -57^t$	$U_{6g} = +59^t$	$D_{5g} = -1{,}8^t$;	
$O_{9g} = -57^t$	$U_{8g} = +58^t$	$D_{6g} = -3{,}1^t$;	
	$U_{10g} = +58^t$	$D_{7g} = -1{,}8^t$;	

b. Spannkräfte in den Gurtungen. Um den Einfluß der Verkehrslast zu erhalten, wurde das in Fig. 233 auf Seite 245 dargestellte Verfahren angewendet. Mit Ausnahme der Stäbe U_1 und U_2 besitzen alle Gurtstäbe die gleiche Horizontalprojektion 3,6m, und es wurde deshalb die Polweite des für den Güterzug in Figur 128 auf Tafel I gezeichneten Seilpolygons $= 4 \cdot 3{,}6 = 14{,}4^m$ gewählt. Da nun der Zeichnung in Fig. 128 der Kräftemaßstab: $1^{cm} = 20^t$ zu Grunde liegt, so liefert die ohne weitere Erläuterung verständliche Figur 306**) die Spannkräfte O_{p1} bis O_{p9} und U_{p4} bis U_{p10} im Maßstabe: $1^{cm} = 4 \cdot 20 = 80^t$. Man erhält

*) In der Fig. 305 wurde der Zeiger g fortgelassen.

**) Zu beachten ist nur, daß in Fig. 306 die Knotenpunkte andere Ziffern tragen, wie in Fig. 128. So ist z. B. das y_{p4} der Figur 306 gleich dem y_{p2} der Fig. 128. Nach Auftragung der durch die Figur 128 bestimmten Werte y_{p2}, y_{p4}, y_{p6}, y_{p8}, y_{p10} wurden die den unteren Knotenpunkten entsprechenden y_p mit Hilfe des auf Seite 142 begründeten Näherungsverfahrens ermittelt.

Digitized by Google

$$O_{p1} = -160'; \quad O_{p2} = -162'; \quad O_{p3} = -163'; \quad O_{p4} = -164';$$
$$O_{p5} = -165';$$

$$U_{p4} = +184'; \quad U_{p6} = +175'; \quad U_{p8} = +169'; \quad U_{p10} = +169'.$$

Die Spannkraft U_{p1} ist $= -O_{p1} \sec \gamma_1$, wo γ_1 den Neigungswinkel von U_1 bedeutet, während sich U_{p2} nach Bestimmung von U_{p1} aus dem Kräftepolygone für den Knoten 1 ergibt. Auf diesem Wege wurde in Fig. 309 erhalten

$$U_{p1} = +181' \text{ und } U_{p2} = +186'.$$

Zu gleicher Zeit mit ${}_{max}U_{p1}$ und ${}_{max}U_{p2}$ entsteht in der Diagonale D_2 der größte Druck ${}_{min}D_{p2} = -16{,}1'$.

Addiert man für jeden Gurtstab und für die Diagonale D_2 die durch die ständige und die bewegliche Belastung erzeugten Spannkräfte, so erhält man die in die Fig. 310 eingetragenen Werte.*)

In Fig. 311 sind die Spannkräfte in einem Bogensehnenträger mit gleichen Abmessungen angegeben worden. Die Verkehrslast ist dieselbe wie vorhin und greift unten an. Weiter ist $g_u = 1{,}29'$ und $g_o = 0{,}45'$.

c. Spannkräfte in den Diagonalen. Der von B aus vorrückende Lastenzug erzeugt in den linkssteigenden Diagonalen die Spannkräfte ${}_{max}D$, in den rechtssteigenden die Spannkräfte ${}_{min}D$. Zuerst wurde auf die in No. 149 beschriebene Art festgestellt, daß die Grenzwerte der Spannkräfte D_3 bis D_{16} infolge von Grundstellungen der Verkehrslast eintreten, während ${}_{max}D_{17}$ und ${}_{min}D_{18}$ dann entstehen, wenn die zweite Achse des Lastenzuges beim Knoten 18 liegt. Um nun beispielsweise ${}_{max}D_7$ und ${}_{min}D_8$ zu bestimmen, wurde der Stützpunkt A mit dem Knoten 7 durch die (blaue) Hilfslinie 7 verbunden und hierauf die bei 8 gemessene Ordinate A_8 des A-Polygons nach den Richtungen der Linie 7 und der oberen Gurtung (O_7) zerlegt, indem durch den Endpunkt von A_8 eine Wagerechte bis zum Schnittpunkte a_7 mit der Verlängerung der Linie 7 gezogen wurde. Legt man nun durch a_7 Parallelen zu D_7 und D_8, welche die von A aus zu U_6 und U_8 gezogenen Parallelen in den Punkten b_7 und b_8 schneiden, so ist

$$\text{Strecke } \overline{b_7 a_7} = {}_{max}D_{7p} \text{ und } \overline{b_8 a_7} = {}_{min}D_{8p};$$

die erstere Spannkraft bedeutet einen Zug, die letztere einen Druck. Es leuchtet ein, daß das vorstehende Verfahren mit dem in No. 150 auf Seite 253 entwickelten übereinstimmt und sich von diesem nur durch eine etwas übersichtlichere Lage der Kräftepolygone unterscheidet. Die Zeiger p wurden in der Figur 307 weggelassen.

*) Es wurden für die Gurtungen und die Diagonale D_2 nur die (ohne Vorzeichen genommen) größten Spannkräfte angegeben; die kleinsten Spannkräfte sind für alle diese Stäbe gleich den von der ständigen Last herrührenden.

Digitized by Google

Fig. 308 zeigt die Bestimmung von ${}_{max}D_{p17}$ und ${}_{min}D_{p18}$; der Kräftemaßstab ist doppelt so groß wie in Fig. 307. Die zweite Achse des Lastenzuges liegt beim Knoten 18. Der erste Radstand ist $e_1 = 1{,}4^m$, und es ist deshalb A gleich der im Abstande $1{,}4^m$ vom Knoten 18 gemessenen Ordinate des A-Polygons. Wird zunächst die im Knoten 16 angreifende Last $P' = P_1 \frac{e_1}{\lambda}$ (wobei P_1 = Belastung der ersten Achse = 13t) vernachlässigt, so ergibt sich auf dem vorhin beschriebenen Wege ${}_{max}D_{p17} = \overline{ab}_{17}$ und ${}_{min}D_{p18} = \overline{ab}_{18}$. Trägt man nun in den Winkel $\not\propto ab_{17}$ die senkrechte Strecke $dc = P'$ ein und zieht $ce \parallel U_{18}$, so geben (nach No. 154) die Strecken ac und ae beziehungsweise den Einfluß der Kraft P' auf die Spannkräfte D_{17} und D_{18} an, und es entsteht deshalb, da der Einfluß von P' demjenigen von A entgegengesetzt ist:

$${}_{max}D_{p17} = \overline{cb}_{17} \text{ (Zug) und } {}_{min}D_{p18} = \overline{cb}_{18} \text{ (Druck).}$$

Auf dem angegebenen Wege erhält man

${}_{max}D_{p3} = +11{,}0^t$	${}_{max}D_{p11} = +20{,}2^t$
${}_{min}D_{p4} = -21{,}7^t$	${}_{min}D_{p12} = -29{,}7^t$
${}_{max}D_{p5} = +15{,}6^t$	${}_{max}D_{p13} = +19{,}2^t$
${}_{min}D_{p6} = -26{,}1^t$	${}_{min}D_{p14} = -29{,}6^t$
${}_{max}D_{p7} = +19{,}2^t$	${}_{max}D_{p15} = +16{,}1^t$
${}_{min}D_{p8} = -28{,}9^t$	${}_{min}D_{p16} = -27{,}8^t$
${}_{max}D_{p9} = +20{,}7^t$	${}_{max}D_{p17} = +12{,}5^{t*})$
${}_{min}D_{p10} = -30{,}2^t$	${}_{min}D_{p18} = -31{,}0^{t*}).$

Bewegt sich nun der Eisenbahnzug in der Richtung von B nach A über die Brücke, so findet man durch Untersuchung des Spiegelbildes von Fig. 307 die Werte

${}_{min}D_{p3} = {}_{min}D_{p18} = -31{,}0^t$	${}_{min}D_{p7} = -29{,}6^t$
${}_{max}D_{p4} = {}_{max}D_{p17} = +12{,}5^t$	${}_{max}D_{p8} = +19{,}2^t$
${}_{min}D_{p5} = -27{,}8^t$	${}_{min}D_{p9} = -29{,}7^t$
${}_{max}D_{p6} = +16{,}1^t$	${}_{max}D_{p10} = +20{,}2^t$ u. s. w.

Es genügt natürlich, die beiden Grenzwerte für jede Diagonale der linken Hälfte des symmetrischen Trägers anzugeben. Die Addition der durch die Verkehrslast und das Eigengewicht erzeugten Spannkräfte liefert

${}_{max}D_3 = +11{,}0 - 1{,}9 = +9{,}1^t$	${}_{max}D_4 = +12{,}5 - 3{,}6 = +8{,}9^t$
${}_{min}D_3 = -31{,}0 - 1{,}9 = -32{,}9^t$	${}_{min}D_4 = -21{,}7 - 3{,}6 = -25{,}3^t$

u. s. w.

*) Liegt die erste Achse des von B vorrückenden Zuges bei Knoten 18, so entsteht ${}_{max}D_{p17} = +11{,}4^t$ und ${}_{min}D_{p18} = -25{,}6^t$.

Digitized by Google

$$\begin{aligned} {}_{max}D_5 &= +13{,}8 \\ {}_{min}D_5 &= -29{,}6 \\ {}_{max}D_6 &= +13{,}0 \\ {}_{min}D_6 &= -29{,}2 \\ {}_{max}D_7 &= +17{,}4 \\ {}_{min}D_7 &= -31{,}4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} {}_{max}D_8 &= +16{,}3 \\ {}_{min}D_8 &= -31{,}8 \\ {}_{max}D_9 &= +18{,}6 \\ {}_{min}D_9 &= -31{,}8 \\ {}_{max}D_{10} &= +17{,}7 \\ {}_{min}D_{10} &= -32{,}7. \end{aligned}$$

Die vorstehenden Zahlen wurden in der Fig. 310 übersichtlich zusammengestellt, während in der Fig. 311 die Spannkräfte in den Diagonalen des Bogensehnenträgers angegeben worden sind.

Anmerkung. Soll der beschriebene Kräfteplan zuverlässige Ergebnisse liefern, so müssen vor allem die Parallelen zu den Gurtstäben U_1, U_2, U_3 . . . . sowie die Verlängerungen der Hilfslinien 3, 5, 7, ... in Fig. 307 möglichst genau festgelegt werden. Zu diesem Zwecke empfiehlt es sich, diejenigen Punkte durch Rechnung zu bestimmen, in welchen die von A aus zu ziehenden Linien U_x, U_3 . . . . 3, 5, 7, ... eine Senkrechte schneiden, die in beliebigem (möglichst großem) Abstande e vom Auflager A angenommen wird. Vorher werden die Höhen h_1, h_3, h_5 . . . . mit Hilfe der Kreisgleichung

$$h_m = \sqrt{r^2 - (\tfrac{1}{2}l - x_m)^2} - c \quad \text{wo} \quad c = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}l^2}$$

berechnet. Man erhält (wegen $r = 36^m$ und $l = 36^m$): $c = 31{,}1769^m$ und hierauf

für $\frac{1}{2}l - x_1 = 15{,}6^m$, $h_1 = 1{,}268^m$
„ $\frac{1}{2}l - x_3 = 7 \cdot 1{,}8$, $h_3 = 2{,}546^m$
„ $\frac{1}{2}l - x_5 = 5 \cdot 1{,}8$, $h_5 = 3{,}680^m$
„ $\frac{1}{2}l - x_7 = 3 \cdot 1{,}8$, $h_7 = 4{,}416^m$
„ $\frac{1}{2}l - x_9 = 1{,}8$, $h_9 = 4{,}778^m$.

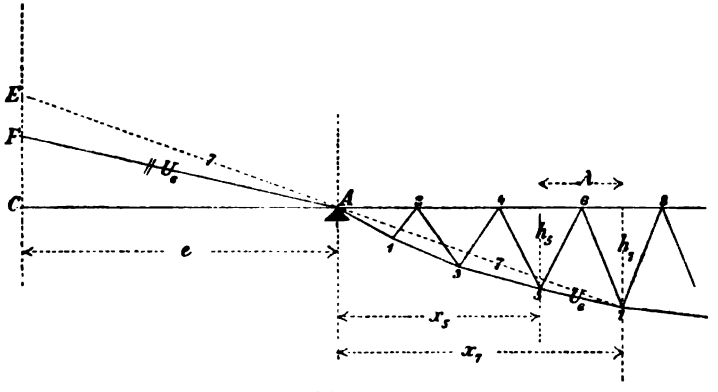


Fig. 312.

Nun kann man beispielsweise die von A aus zu U_6 gezogene Parallele durch Auftragen der Strecke

$$\overline{CF} = (h_7 - h_5)\frac{e}{\lambda}$$

Digitized by Google

festlegen und die Verlängerung der Linie 7 durch Auftragen der Strecke:

$$\overline{CE} = h_7 \frac{e}{x_7}.$$

Wählt man z. B. $e = 10\lambda$ (was bei Aufzeichnung der Fig. 307 geschehen ist), so findet man: $\overline{CF} = 10\,(h_7 - h_5) = 10\,(4{,}416 - 3{,}680) = 7{,}36^m$ und $\overline{CE} = \frac{10}{3{,}5} h_7 = 12{,}617^m$.

§ 38.

Kräfteplan für einen Halbparabelträger (Eisenbahnbrücke) und Entwicklung einiger allgemeiner Formeln.

Zahlenbeispiel. Tafel 4.

Der zu untersuchende Träger (Fig. 316 auf Seite 311) besitzt eine Stützweite von 36^m und ist für dieselbe Belastung zu berechnen, wie die in den §§ 36 und 37 behandelten Fachwerke. Höhe am Ende: $h_0 = 3{,}00^m$, in der Mitte: $h_5 = 5{,}00^m$. Die Knotenpunkte der oberen Gurtung liegen auf einer Parabel. Der Träger soll schlaffe Diagonalen erhalten. Zur Ermittelung der Spannkräfte möge das *Zimmermann*sche Verfahren dienen.

a. Die größten Spannkräfte der Gurtungen sind in die linke Hälfte der Fig. 314 (Tafel 4) eingezeichnet worden. $y_1, y_2, y_3, \ldots$ bedeuten die auf Tafel 1 (Fig. 128 und 130) gewonnenen Ordinaten des Polygons der größten Momente*); die Polweite ist $H = 4\lambda = 4 \cdot 3{,}6 = 14{,}4^m$. Da nun auf Tafel 1 der Kräftemaßstab: $1^{cm} = 20^t$ ist, so liefert Fig. 313 die größten Spannkräfte O und U im Maßstabe: $1^{cm} = 4 \cdot 20 = 80^t$; (vergl. Seite 263, Absatz 2). Man findet

$O_1 = -111^t$; $O_2 = -166^t$; $O_3 = -197^t$; $O_4 = -212^t$; $O_5 = -218^t$;
$U_1 = 0$; $U_2 = +109^t$; $U_3 = +164^t$; $U_4 = +196^t$; $U_5 = +211^t$.

Gleichzeitig mit dem größten Drucke O_1 entsteht der größte Zug in der Diagonale D_1 und der größte Druck V_0 in der Endvertikale. Aus dem Kräftedreieck für den oberen Knoten 0 (Dreieck I in Fig. 314) ergibt sich

$$D_1 = +142{,}0^t \quad V_0 = -112{,}8^t.$$**)

*) Beschreibung in No. 82 Seite 140.

**) Es wird vorläufig vorausgesetzt, daß die gesamte ständige Belastung g in den Knoten der unteren Gurtung angreift. Die Diagonale D_1 wird stets gezogen, die Vertikale V_0 stets gedrückt. Bezeichnet man die ohne Vorzeichen zu nehmenden kleinsten und größten Spannkräfte in den Stäben O_1, D_1, V_0 beziehungsweise mit O'_1, D'_1, V'_0 und O''_1, D''_1, V''_0, so besteht die Gleichung

$$\frac{O'_1}{O''_1} = \frac{D'_1}{D''_1} = \frac{V'_0}{V''_0} = \frac{y_{g1}}{y_1},$$

welche zu beachten ist, sobald bei der Querschnittsberechnung die zulässige Spannung vom Verhältnis der kleinsten zur größten Inanspruchnahme abhängig gemacht werden soll.

Digitized by Google

b. Spannkräfte in den Füllungsstäben. Wir wollen ein gemischtes rechnerisches und zeichnerisches Verfahren anwenden, so zwar, daß wir die Verhältnisse $M:\lambda$ für die in Frage kommenden Laststellungen mit Hilfe der folgenden Tabellen berechnen und hierauf das in No. 158 beschriebene Verfahren anwenden.

Zunächst sind die Stützenwiderstände A_2, A_3, ... zu bestimmen, welche am linken Auflager durch einen Eisenbahnzug hervorgerufen werden, der von B aus bis Knoten 2, beziehungsweise bis Knoten 3 u. s. w. reicht. Die betreffenden Laststellungen wurden in Fig. 316 durch kräftige Striche angedeutet und sollen in der Folge als Zugstellung 2, Zugstellung 3, u. s. w. bezeichnet werden. Wir berechnen A auf die in No. 85 beschriebene Weise und benutzen die folgende Tabelle, welche für einen von drei vorwärts fahrenden Lokomotiven geführten Güterzug unter Voraussetzung der in Fig. 111, Seite 121 angegebenen Achslasten und Radstände berechnet ist.

Tabelle I.

1 n	2 c_1	3 $\mathfrak{P}_n$	4 $\mathfrak{S}_n$	1 n	2 c_1	3 $\mathfrak{P}_n$	4 $\mathfrak{S}_n$
1	0	18	0	26	61,4	270	9 344,7
2	1,4	26	18,2	27	64,4	279	10 154,7
3	2,8	39	54,6	28	67,4	288	10 991,7
4	6,8	48	210,6	29	70,4	297	11 855,7
5	8,8	57	282,6	30	73,4	306	12 746,7
6	9,8	66	368,1	31	76,4	315	13 664,7
7	13,8	79	632,1	32	79,4	324	14 609,7
8	15,2	92	742,7	33	82,4	333	15 581,7
9	16,6	105	871,5	34	85,4	342	16 580,7
10	20,6	114	1 291,5	35	88,4	351	17 606,7
11	22,1	123	1 462,5	36	91,4	360	18 659,7
12	23,6	132	1 647,0	37	94,4	369	19 739,7
13	27,6	145	2 175,0	38	97,4	378	20 846,7
14	29,0	158	2 378,0	39	100,4	387	21 980,7
15	30,4	171	2 599,2	40	103,4	396	23 141,7
16	34,4	180	3 283,2	41	106,4	405	24 329,7
17	35,9	189	3 553,2	42	109,4	414	25 544,7
18	37,4	198	3 836,7	43	112,4	423	26 786,7
19	40,4	207	4 430,7	44	115,4	432	28 055,7
20	43,4	216	5 051,7	45	118,4	441	29 351,7
21	46,4	225	5 699,7	46	121,4	450	30 674,7
22	49,4	234	6 374,7	47	124,4	459	32 024,7
23	52,4	243	7 076,7	48	127,4	468	33 401,7
24	55,4	252	7 805,7	49	130,4	477	34 805,7
25	58,4	261	8 561,7	50	133,4	486	36 236,7

Digitized by Google

Berechnung von A_2. Die Strecke $B2$ hat die Länge $8 \cdot 3{,}6 = 28{,}8^m$; ihr entspricht laut Tabelle I die Zuglänge $c_1 = 27{,}6^m$. Die Anzahl der

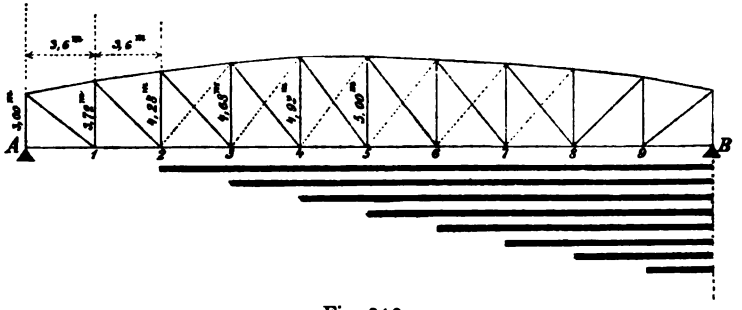


Fig. 316.

bei der Zugstellung 2 auf dem Balken ruhenden Lasten ist mithin: $n = 13$, und der Abstand der letzten Last vom Auflager B beträgt: $b_n = 28{,}8 - 27{,}6 = 1{,}2^m$. Man erhält: $\mathfrak{P}_n = 145^t$, $\mathfrak{S}_n = 2175{,}0^{tm}$ und

$$A_2 = \frac{1}{l}(\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n) = \frac{1}{10\lambda}(145 \cdot 1{,}2 + 2175{,}0) = \frac{234{,}90}{\lambda}.$$

Auf diese Weise sind die Werte $A_2\lambda$ bis $A_9\lambda$ ermittelt und in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden.*)

Tabelle II.

Zugstellung $m =$	Strecke $\overline{Bm} =$	c_1	n	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$	b_n	$A_m\lambda$
2	28,8	27,6	13	145	2175,0	1,2	234,90
3	25,2	23,6	12	132	1647,0	1,6	185,82
4	21,6	20,6	10	114	1291,5	1,0	140,55
5	18,0	16,6	9	105	871,5	1,4	101,85
6	14,4	13,8	7	79	632,1	0,6	67,95
7	10,8	9,8	6	66	368,1	1,0	43,41
8	7,2	6,8	4	48	210,6	0,4	22,98
9	3,6	2,8	3	39	54,6	0,8	8,58
	Meter	Meter		Tonnen	*tm*	Meter	*tm*

Außer dem Eisenbahnzuge wirkt auf den Träger noch eine gleichförmige ständige Belastung: $g = 1{,}74^t$ f. d. Meter, welcher die (bereits auf Seite 266 berechneten) Werte

*) Bei gleichen Feldweiten empfiehlt es sich, (wie sogleich einleuchten wird), die Produkte $A\lambda$ an Stelle der Widerstände A zu berechnen.

Digitized by Google

$$\frac{M_{1p}}{\lambda} = 28{,}188; \quad \frac{M_{2p}}{\lambda} = 50{,}112; \quad \frac{M_{3p}}{\lambda} = 65{,}772;$$

$$\frac{M_{4p}}{\lambda} = 75{,}168; \quad \frac{M_{5p}}{\lambda} = 78{,}300 \text{ Tonnen entsprechen.}$$

Wir beginnen mit der Ermittelung der Spannkräfte ${}_{max}D$ und ${}_{min}V$. Befindet sich der Eisenbahnzug in der Stellung 2, so entsteht ${}_{max}D_2$ und ${}_{min}V_1$; beide Spannkräfte lassen sich auf die in No. 158 angegebene Weise schnell bestimmen, sobald die Momente M_1 und M_2 gegeben sind. Die Verkehrslast erzeugt: $M_{1p} = A_2 \cdot \lambda = 234{,}90$ und $M_{2p} = A_2 \cdot 2\lambda = 234{,}90 \cdot 2$; addiert man hierzu die oben angegebenen Werte M_{1p} und M_{2p}, so findet man

$$\frac{M_1}{\lambda} = \frac{234{,}90 \cdot 1}{3{,}6} + 28{,}188 = 93{,}4^t$$

$$\frac{M_2}{\lambda} = \frac{234{,}90 \cdot 2}{3{,}6} + 50{,}112 = 180{,}6^t$$

und kann nun das in der Figur 313 durch Schraffierung hervorgehobene Kräftepolygon (1) für den oberen Knotenpunkt 1 zeichnen. Es ergibt sich

$${}_{max}D_2 = +88{,}4^t, \quad {}_{min}V_1 = -69{,}1^t.$$

Auf dieselbe Weise erhält man, unter der Annahme linkssteigender Diagonalen:*)

für Zugstellung 3:

$$\frac{M_2}{\lambda} = \frac{185{,}82 \cdot 2}{3{,}6} + 50{,}112 = 153{,}3^t$$

$$\frac{M_3}{\lambda} = \frac{185{,}82 \cdot 3}{3{,}6} + 65{,}772 = 220{,}6^t$$

$${}_{max}D_3 = +63{,}6^t, \quad {}_{min}V_2 = -47{,}2^t$$

für Zugstellung 4:

$$\frac{M_3}{\lambda} = \frac{140{,}55 \cdot 3}{3{,}6} + 65{,}772 = 182{,}9^t$$

$$\frac{M_4}{\lambda} = \frac{140{,}55 \cdot 4}{3{,}6} + 75{,}168 = 231{,}3^t$$

$${}_{max}D_4 = +46{,}9^t, \quad {}_{min}V_3 = -32{,}8^t$$

*) Zur Erzielung deutlicher Figuren wurden in den verschiedenen Feldern verschieden große Kräftemaßstäbe gewählt und neben den Kräftepolygonen angegeben. Der Längenmaßstab ist gleichgültig; er lautet: $\lambda = 3{,}6^m = 4{,}2^{cm}$. Hervorzuheben ist, daß überall nur Grundstellungen des Eisenbahnzuges in Betracht kommen. Es wurde dies auf die in No. 149 beschriebene Weise festgestellt. Bei Ermittelung von ${}_{max}D_r$ und ${}_{min}V_1$ ist es gleichgültig, ob die erste oder zweite Achse des von B vorrückenden Eisenbahnzuges beim Knoten 2 liegt.

Digitized by Google

für Zugstellung 5:

$$\frac{M_4}{\lambda} = \frac{101{,}85 \cdot 4}{3{,}6} + 75{,}168 = 188{,}3^t$$

$$\frac{M_5}{\lambda} = \frac{101{,}85 \cdot 5}{3{,}6} + 78{,}300 = 219{,}8^t$$

$${}_{max}D_5 = +34{,}6^t, \quad {}_{min}V_4 = -22{,}2^t$$

für Zugstellung 6:

$$\frac{M_5}{\lambda} = \frac{67{,}95 \cdot 5}{3{,}6} + 78{,}300 = 172{,}7^t$$

$$\frac{M_6}{\lambda} = \frac{67{,}95 \cdot 6}{3{,}6} + 75{,}168 = 188{,}4^t$$

$${}_{max}D_6 = +23{,}2^t, \quad {}_{min}V_5 = -13{,}0^t$$

für Zugstellung 7:

$$\frac{M_6}{\lambda} = \frac{43{,}41 \cdot 6}{3{,}6} + 75{,}168 = 147{,}5^t$$

$$\frac{M_7}{\lambda} = \frac{43{,}41 \cdot 7}{3{,}6} + 65{,}772 = 150{,}2^t$$

$${}_{max}D_7 = +12{,}8^t, \quad {}_{min}V_6 = -5{,}1^t$$

für Zugstellung 8:

$$\frac{M_7}{\lambda} = \frac{22{,}98 \cdot 7}{3{,}6} + 65{,}772 = 110{,}5^t$$

$$\frac{M_8}{\lambda} = \frac{22{,}98 \cdot 8}{3{,}6} + 50{,}112 = 101{,}2^t$$

$${}_{max}D_8 = +0{,}3^t, \quad {}_{min}V_7 = +3{,}5^t.$$

Anmerkung 1. Die kleine Spannkraft ${}_{max}D_8$ konnte in Fig. 313 nicht deutlich dargestellt werden, sie erscheint dort $= 0$; um sie zu bestimmen, wähle man einen größeren Kräftemaßstab, wenn dann auch das Kräftepolygon außerhalb des Trägernetzes fällt. Will man D_8 berechnen, so findet man nach der auf Seite 273 abgeleiteten Formel (mit $h_8 = 4{,}28^m$ und $h_7 = 4{,}68^m$)

$${}_{max}D \cos \varphi_8 = \frac{M_8}{h_8} - \frac{M_7}{h_7} = \frac{364{,}33}{4{,}28} - \frac{397{,}64}{4{,}68} = +0{,}158^t$$

und ${}_{max}D_8 = +0{,}3^t$.

Es möge an dieser Stelle noch eine bequeme Formel zur Berechnung der Spannkräfte V_m abgeleitet werden. Führt man durch den Träger einen schrägen Schnitt, welcher die Stäbe O_m, V_m und U_{m+1} trifft, zerlegt jede am linken Trägerteile angreifende Kraft in eine senkrechte und eine wagerechte Seitenkraft und setzt die Summe aller senkrechten Seitenkräfte $= 0$, so erhält man (Fig. 317)

$$V_m + O_m \sin \beta_m + Q = 0,$$

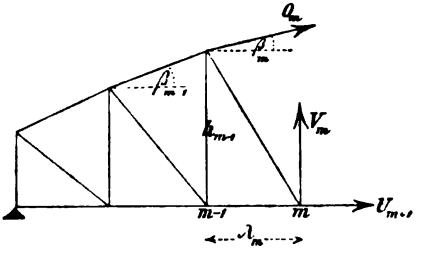


Fig. 317.

Digitized by Google

wo (nach Seite 278)

$$O_m = -\frac{M_m}{h_m \cos \beta_m} \cdots$$

Da die Last in den Knoten der unteren Gurtung angreift und der untere Knoten m zum linken Trägerteile gehört, so ist die Querkraft

$$Q = \frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda_{m+1}}$$

und man erhält

$$V_m = \frac{M_m - M_{m+1}}{\lambda_{m+1}} + \frac{M_m}{h_m} \operatorname{tg} \beta_m .$$

Setzt man: $\operatorname{tg} \beta_m = \frac{h_m - h_{m-1}}{\lambda_m}$, so findet man für den Fall gleich großer Feldweiten den bequemen Ausdruck:

$$\text{(I)} \qquad V_m \lambda = M_m \frac{2h_m - h_{m-1}}{h_m} - M_{m+1}.$$

Beispielsweise ergibt sich hiernach für die gleichzeitig mit ${}_{max}D_8$ entstehende Spannkraft ${}_{min}V_7$ die Gleichung

$$V_7 \cdot 3{,}6 = M_7 \frac{2h_7 - h_8}{h_7} - M_8$$

$$= 397{,}64 \frac{2 \cdot 4{,}68 - 4{,}92}{4{,}68} - 364{,}33 = +12{,}92,$$

woraus

$${}_{min}V_7 = +3{,}5^t.$$

Selbstverständlich wird man, wenn die Spannkräfte D und V mittels der hier angewandten Formeln bestimmt werden sollen, nicht erst die Verhältnisse $M : \lambda$, sondern sofort die Momente berechnen. Bei der Zugstellung 8 entstehen z. B. infolge der Verkehrslast die Momente $M_{7p} = A_8 \cdot 7\lambda = 7 \cdot 22{,}98$ und $M_{8p} = A_8 \cdot 8\lambda = 8 \cdot 22{,}98$, wozu dann M_{7g} und M_{8g} zu addieren sind. Für das Moment M_{mg} findet man die Gleichung

$$M_{mg} = \tfrac{1}{2} g x_m (l - x_m) = \tfrac{1}{2} 1{,}74 \lambda^2 m (10 - m) = 11{,}2752 m (10 - m),$$

aus welcher sich für $m = 1, 2, 3, 4, 5$ der Reihe nach die Werte ergeben

$$M_g = 101{,}48;\ 180{,}40;\ 236{,}78;\ 270{,}60;\ 281{,}88^{tm}.$$

Anmerkung 2. Wir wollen die rechnerische Bestimmung der Spannkräfte in den Vertikalen noch etwas allgemeiner behandeln. Bildet U_{m+1} mit der Wagerechten den Winkel γ_{m+1} (Fig. 264), so geht die vorhin angeschriebene Gleichgewichtsbedingung über in

$$V_m + O_m \sin \beta_m - U_{m+1} \sin \gamma_{m+1} + Q = 0,$$

und hierein ist zu setzen,

a) wenn die Verkehrslast in den Knoten der unteren Gurtung angreift

$$Q = \frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda_{m+1}}$$

Digitized by Google

b) wenn sie in den Knoten der oberen Gurtung angreift

$$Q = \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda_m}.$$

Beachtet man noch die Gleichungen

$$O_m = -\frac{M_m}{h_m \cos \beta_m}; \quad U_{m+1} = +\frac{M_m}{h_m \cos \gamma_{m+1}},$$

so gelangt man zu den bequemen Formeln

(II) $$V_m \lambda_{m+1} = M_m \left[1 + \frac{\lambda_{m+1}}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \gamma_{m+1})\right] - M_{m+1} \text{ (Last unten)}$$

(III) $$V_m \lambda_m = M_{m-1} - M_m \left[1 - \frac{\lambda_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \gamma_{m+1})\right] \text{ (Last oben).}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß — wie im vorliegenden Zahlenbeispiele — die gesamte ständige Belastung auf die Knotenpunkte derjenigen Gurtung verteilt wird, an welcher die Verkehrslast angreift. Nachträglich ist im ersten Falle zu V_m der Betrag:

$$V_{m\,0} = -\tfrac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1})$$

zu addieren, im zweiten Falle der Betrag:

$$V_{m\,u} = +\tfrac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Liegt die Fahrbahn zwischen den beiden Gurtungen, so gelten für die Teile der Vertikalen $\frac{\text{oberhalb}}{\text{unterhalb}}$ der Fahrbahn die für den Fall $\frac{\text{unten}}{\text{oben}}$ angreifender Belastung abgeleiteten Formeln.

Die Formeln (II) und (III) setzen linkssteigende Diagonalen voraus. Bei rechtssteigenden Diagonalen betrachte man das Spiegelbild des Trägers.

Hervorgehoben werde, daß das Eigentümliche der vorstehenden Entwicklungen darin besteht, ***sämtliche Spannkräfte O, U, D, V durch die auf die Knotenpunkte bezogenen Angriffsmomente M auszudrücken.***

Anmerkung 3. Die für die Spannkräfte D und V gegebenen Formeln lassen sich leicht noch weiter entwickeln. Gesucht sei beispielsweise ${}_{max}D_{m\,p}$ und ${}_{min}V_{(m-1)\,p}$, infolge der Verkehrslast, letztere Spannkraft für den Fall *unten* liegender Fahrbahn. Rückt der Eisenbahnzug von B aus bis m vor, so entsteht am linken Auflager der Widerstand A_m, welcher mit Hilfe der Tabelle I schnell berechnet werden kann; er erzeugt die Momente

$$M_{m-1} = A_m x_{m-1},$$
$$M_m = A_m x_m,$$

und es ergibt sich

(IV) $${}_{max}D_{m\,p} \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = A_m \varepsilon,$$

(V) $${}_{min}V_{(m-1)\,p} = -A_m \varepsilon' \text{ (nach Gleich. II),}$$

wo $$\varepsilon = \frac{x_m}{h_m} - \frac{x_{m-1}}{h_{m-1}} \text{ und}$$

$$\varepsilon' = \frac{x_m}{\lambda_m} - \frac{x_{m-1}}{\lambda_m}\left[1 + \frac{\lambda_m}{h_{m-1}} (\operatorname{tg} \beta_{m-1} + \operatorname{tg} \lambda_m)\right].$$

Digitized by Google

Bei wagerechter unterer Gurtung ist $\varepsilon' = \varepsilon \frac{h_m}{\lambda_m}$.

Liegt die zweite Last des Eisenbahnzuges beim Knoten m, so findet man, wenn P_1 die erste Last und e_1 den ersten Radstand bezeichnet, nach Berechnung des Auflagerdruckes A

$$M_{m-1} = A\, x_{m-1},$$

$$M_m = A\, x_m - P_1\, e_1,$$

$$\text{(VI)} \quad {}_{max}D_{mg} \cos \varphi_m = A\, \varepsilon - P_1 \frac{e_1}{h_m};$$

$$\text{(VII)} \quad {}_{min}V_{(m-1)g} = -A\, \varepsilon' + P_1 \frac{e_1}{\lambda_m}.$$

Infolge der Verschiebung der Last hat A zugenommen um

$$\Delta A = \frac{e_1}{l} \Sigma P + \frac{P' b}{l},$$

wo ΣP die Summe der vor der Verschiebung auf dem Träger befindlichen Lasten und P' eine etwa neu hinzugetretene Last bezeichnet, welche von der Stütze B den Abstand b haben möge. Die Zunahme von $D_m \cos \varphi_m$ beziehungsweise von $(-V_{m-1})$ beträgt

$$\Delta D_m \cos \varphi_m = \Delta A\, \varepsilon - P_1 \frac{e_1}{h_m} \text{ und}$$

$$\Delta (-V_{m-1}) = \Delta A\, \varepsilon' - P_1 \frac{e_1}{\lambda_m}.$$

Hiernach muß ${}_{max}D_m$ nach Gleichung VI berechnet werden, sobald

$$\Delta A\, \varepsilon > P_1 \frac{e_1}{h_m}$$

ist, und für ${}_{min}V_{m-1}$ ist die Gleichung VII maßgebend, sobald

$$\Delta A\, e' > P_1 \frac{e_1}{\lambda_m}$$

ist. Zu den von der Verkehrslast abhängigen Spannkräften treten noch infolge des Eigengewichts die Werte

$$\text{(VIII)} \quad D_{mg} \cos \varphi_m = \frac{M_{mg}}{h_m} - \frac{M_{(m-1)g}}{h_{m-1}},$$

$$\text{(IX)} \quad V_{(m-1)g} = \frac{1}{\lambda_m} [M_{(m-1)g}\, \varepsilon'' - M_{mg}],$$

wo

$$\varepsilon'' = 1 + \frac{\lambda_m}{h_{m-1}} (\operatorname{tg} \beta_{m-1} + \operatorname{tg} \gamma_m).$$

Im allgemeinen wird man erst die Ausdrücke ε'' und hierauf die Werte

$$\varepsilon' = \frac{x_m}{\lambda_m} - \frac{x_{m-1}}{\lambda_{m-1}} \varepsilon''$$

ermitteln.

Die ganze Rechnung führe man in Tabellenform durch. Für die Spannkräfte ${}_{max}D$ kann man z. B. die folgende Anordnung wählen.

Digitized by Google

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m	x_{m-1}	x_m	x'_{m-1}	x'_m	h_{m-1}	h_m	$M_{mg}=\frac{1}{2}g\,x_m x'_m$	$M_{(m-1)g}$	$\frac{M_{mg}}{h_m}$	$\frac{M_{(m-1)g}}{h_m}$	$D_{mg}\cos\varphi_m$	Stellung der Verkehrslast	A	$\frac{P_1 e_1}{h_m}$	e	$_{max}D_{mp}\cos\varphi_m$	$_{max}D_m\cos\varphi_m$	$\cos\varphi_m$	$_{max}D_m$

Bezüglich der Bezeichnungen x und x' wird auf Fig. 267 verwiesen. In Spalte 13 deute man durch Eintragung von P_1 oder P_2 an, daß die erste oder zweite Last des von B aus vorrückenden Eisenbahnzuges beim Knoten m liegt. Spalte 15 ist nur auszufüllen, wenn Last P_2 in m liegt. Bei gleichen Feldweiten achte man während der ganzen Rechnung darauf, daß $x_m = m\lambda$, $x_{m-1} = (m-1)\lambda$ u. s. w. ist. Die Werte A werden in einer besonderen Tabelle zusammengestellt. Vergl. Seite 313.

In ähnlicher Weise lassen sich die Tabellen zur Berechnung von $_{min}D$, $_{min}V$, $_{max}V$ anordnen. Benutzt man die in der Anmerkung 1) angegebenen Formeln, so würde die Tabelle, welche $_{max}D$ und $_{min}V$ angibt, für den vorliegenden Halbparabelträger wie folgt einzurichten sein.

m	Zugstellung	$A\lambda$	Momente M_p	Momente M_g	$\frac{d_m^2}{\lambda^2}$	$\frac{h_{m-1}}{h_{m-2}\text{ u. }h_m}$	$_{max}D_m=\left(\frac{M_m}{h_m}-\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right)\sqrt{\frac{d^2}{\lambda^2}}$ $_{min}V_{m-1}=\frac{1}{\lambda}\left(M_{m-1}\frac{2h_{m-1}-h_{m-2}}{h_{m-1}}-M_m\right)$
2	2	234,90	$M_1=234{,}9\cdot 1$ $M_2=234{,}9\cdot 2$	$M_1=101{,}48$ $M_2=180{,}40$	26,8	$h_0=3{,}00_m$ $h_1=3{,}72$ $h_2=4{,}28$	$_{max}D_2=+88{,}4$ Tonnen $_{min}V_1=-69{,}1$ „
3	3	185,82	$M_2=185{,}82\cdot 2$ $M_3=185{,}82\cdot 3$	$M_2=180{,}40$ $M_3=236{,}78$	31,3	$h_1=3{,}72$ $h_2=4{,}28$ $h_3=4{,}68$	$_{max}D_3=+63{,}6$ „ $_{min}V_2=-47{,}2$ „

u. s. w.

Es leuchtet wohl ein, daß die Bildung solcher Tabellen die Prüfung der Rechnung außerordentlich erleichtert.

Wir fahren nun in der Erläuterung unseres Kräfteplanes fort. Nimmt man im neunten Felde zunächst eine linkssteigende Diagonale an, so findet man, daß diese infolge der Zugstellung 9 auf Druck beansprucht wird. Da die Diagonalen aber schlaff sein sollen, so ist eine rechtssteigende Diagonale nötig. Es ergibt sich

Digitized by Google

für Zugstellung 9
$$\begin{cases} \frac{M_8}{\lambda} = \frac{8{,}58 \cdot 8}{3{,}6} + 50{,}112 = 69{,}2^t \\ \frac{M_9}{\lambda} = \frac{8{,}58 \cdot 9}{3{,}6} + 28{,}188 = 49{,}6^t \\ {}_{min}D_9 = {}_{min}D_2 = +14{,}6^t\text{*}); \quad {}_{max}V_9 = {}_{max}V_1 = -10{,}0^t\text{**}). \end{cases}$$

Aus den vorstehenden Rechnungen folgt, daß die sechs mittelsten Felder des Trägers mit Gegendiagonalen auszurüsten sind, welche durch die in der Figur 319 zusammengestellten Spannkräfte beansprucht werden. Von den berechneten größten Drücken ${}_{min}V_2$ bis ${}_{min}V_7$ sind natürlich nur die ersten vier maßgebend, weil ${}_{min}V_6 < {}_{min}V_4$ ist, während ${}_{min}V_7$ sogar positiv ist.

Es sind jetzt nur noch die Spannkräfte ${}_{max}V_2$, ${}_{max}V_3$, ${}_{max}V_4$, ${}_{max}V_5$ in denjenigen Vertikalen zu bestimmen, an denen Gegendiagonalen angreifen.

Der größte positive Wert von V_5 entsteht gleichzeitig mit dem größten Drucke O_5 und ergibt sich aus dem für den oberen Knoten 5 in Fig. 315 auf Tafel 4 gezeichneten Kräftedreieck. Man findet: ${}_{max}V_5 = +9{,}7^t$.

Die Spannkräfte ${}_{max}V_2$, ${}_{max}V_3$, ${}_{max}V_4$ sollen nach dem dritten der in No. 161 beschriebenen Verfahren ermittelt werden. Die Vertikalen mögen von B aus mit den Ziffern 0, 1, 2, ... versehen werden, Fig. 318. Um ${}_{max}V_2$ zu erhalten, wird von B aus ein Eisenbahnzug vorgeschoben, dessen zweite Last beim Knoten 2 steht; er ruft am linken Auflager den mittels der Tabelle I berechneten Widerstand

$$A = \frac{1}{l}(\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n) = \frac{1}{10\lambda}(57 \cdot 0{,}3 + 282{,}6) = \frac{29{,}97}{\lambda}$$

hervor und erzeugt die Momente

$$M_{3p} = A \cdot 7\lambda = 29{,}97 \cdot 7 = 209{,}79^{tm}$$
$$M_{2p} = A \cdot 8\lambda - 13 \cdot 1{,}4 = 29{,}97 \cdot 8 - 18{,}2 = 221{,}56^{tm},$$

---

*) Diagonale D_2 erleidet ihre kleinste Inanspruchnahme, wenn der Eisenbahnzug von A aus bis Knoten 1 vorrückt, und in D_9 entsteht ${}_{max}D_9 = {}_{max}D_2 = +83.4^t$, wenn der Zug von A bis zum Knoten 8 vorrückt.

**) Soll ${}_{max}V_9$ mittels der vorhin abgeleiteten Gleichung (I) berechnet werden, so betrachte man das Spiegelbild des Trägers, damit aus der rechtssteigenden Diagonale eine linkssteigende wird. Man findet dann (mit $M_9 = 178{,}70$; $M_8 = 249{,}13$; $h_9 = 3{,}72$; $h_{10} = 3{,}00$):

$${}_{max}V_9\lambda = 178{,}70\,\frac{2 \cdot 3{,}72 - 3{,}00}{3{,}72} - 249{,}13 = -35{,}85 \text{ und } {}_{max}V_9 = -10{,}0^t.$$

Digitized by Google

weshalb nach Hinzurechnung der Wirkung der ständigen Belastung erhalten wird

$$\frac{M_3}{\lambda} = \frac{209{,}79}{3{,}6} + 65{,}772 = 124{,}0^t$$

$$\frac{M_2}{\lambda} = \frac{221{,}56}{3{,}6} + 50{,}112 = 111{,}7^t.$$

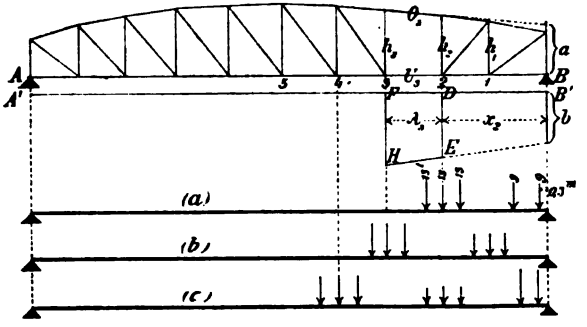


Fig. 318.

Trägt man diese beiden Verhältnisse $M:\lambda$ von einer Wagerechten $A'B'$ aus, in der Richtung der Vertikalen 2 und 3 als Ordinaten auf, indem man in der Fig. 318 macht: $\overline{DE} = \frac{M_2}{\lambda}$ und $\overline{FH} = \frac{M_3}{\lambda}$, so schneiden die Geraden FD und HE auf der rechten Auflagersenkrechten die Strecke ab

$$b = \frac{3\,M_2 - 2\,M_3}{\lambda} = 87{,}1^t.$$

Setzt man nun, in der rechten Hälfte der Fig. 314 (Tafel 4), auf der zweiten Vertikale, vom oberen Knoten 2 aus, die Strecke $\overline{22'} = b$ ab, zieht $B2'' \parallel O_3$, verbindet $2''$ mit 3 und zieht ferner: $2'III \parallel 2''3$ sowie $III2''' \parallel O_2$, so stellt die Strecke $2'2'''$ die gesuchte Spannkraft ${}_{max}V_2$ vor. Es ergibt sich auf diese Weise

$${}_{max}V_2 = +\,4{,}0^t.*)$$

*) Bezüglich der Begründung des Verfahrens wird auf Seite 284 und Fig. 280 verwiesen. Will man ${}_{max}V_2$ durch Rechnung bestimmen, so findet man an der Hand der Entwicklungen in No. 161 leicht die Formel

$$\text{(I)} \quad {}_{max}V_2 = \lambda \frac{b}{a} (\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_3)$$

wo a die Strecke bedeutet, welche die Gurtstäbe O_3 und U_3 auf der Senkrechten

Digitized by Google

Das Dreieck $2'''III2$ ist das Kräftepolygon für den oberen Knotenpunkt 2.

Um ${}_{max}V_3$ zu bestimmen, wird für die Zugstellung (b) in Fig. 318 berechnet

$$A = \frac{52{,}65}{\lambda}, \text{ sodann } \frac{M_4}{\lambda} = \frac{52{,}65 \cdot 6}{3{,}6} + 75{,}168$$

$$\frac{M_3}{\lambda} = \frac{52{,}65 \cdot 7 - 13 \cdot 1{,}4}{3{,}6} + 65{,}772$$

$$b = \frac{4\,M_3 - 3\,M_2}{\lambda} = 163{,}6^t.$$

Schließlich ergibt sich für die Zugstellung (c) in Fig. 318 behufs Bestimmung von ${}_{max}V_4$

$$A = \frac{79{,}79}{\lambda}; \quad \frac{M_5}{\lambda} = \frac{79{,}79 \cdot 5}{3{,}6} + 78{,}300$$

$$\frac{M_4}{\lambda} = \frac{79{,}79 \cdot 6 - 13 \cdot 1{,}4}{3{,}6} + 75{,}168$$

$$b = \frac{5\,M_4 - 4\,M_5}{\lambda} = 259{,}0^t.$$

Man erhält ${}_{max}V_3 = +6{,}6^t$ und ${}_{max}V_4 = +9{,}0^t$.

Bislang wurde vorausgesetzt, daß die gesamte ständige Belastung $g = 1{,}74^t$ in den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreift. Wird

---

durch B abschneiden, während β_2 und β_3 die Neigungswinkel von O_2 und O_3 gegen die Wagerechte bezeichnen. Da nun $a = 3h_2 - 2h_3$ ist, so folgt auch

$$\text{(II)} \quad {}_{max}V_2 = \frac{3\,M_2 - 2\,M_3}{3h_2 - 2h_3}(\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_3)$$

oder, wenn die Zeiger 2 und 3 durch die allgemeineren m und $m+1$ ersetzt und ungleiche Feldweiten angenommen werden

$$\text{(III)} \quad {}_{max}V_m = \frac{x_{m+1}\,M_m - x_m\,M_{m+1}}{x_{m+1}\,h_m - x_m\,h_{m+1}}(\operatorname{tg}\beta_m - \operatorname{tg}\beta_{m+1}).$$

Liegen die Knoten der oberen Gurtung (wie im vorliegenden Falle) auf einer Parabel vom Pfeile f, so findet man: $\operatorname{tg}\beta_m - \operatorname{tg}\beta_{m+1} = \frac{4f}{l^2}(\lambda_m + \lambda_{m+1})$ und bei gleichen Feldweiten

$$\text{(IV)} \quad {}_{max}V_m = \frac{(m+1)\,M_m - m\,M_{m+1}}{(m+1)\,h_m - m\,h_{m+1}} \cdot \frac{8f\lambda}{l^2}.$$

Für unser Beispiel ist $f = 2{,}0^m$ also: $\frac{8f\lambda}{l^2} = \frac{8 \cdot 2 \cdot \lambda}{36 \cdot 10\lambda} = \frac{1}{22{,}5}$ und

$${}_{max}V_2 = \frac{3\,M_2 - 2\,M_3}{3\,h_2 - 2\,h_3} \cdot \frac{1}{22{,}5}.$$

Mit $h_2 = 4{,}28^m$ und $h_3 = 4{,}68^m$ folgt nach Einsetzen der oben für M_2 und M_3 angegebenen Werte: ${}_{max}V_2 = +4{,}0^t$.

Digitized by Google

nun angenommen, daß der Teil $g_0 = 0{,}45'$ an der oberen Gurtung wirkt, so ist zu jeder der berechneten Spannkräfte V der Wert:

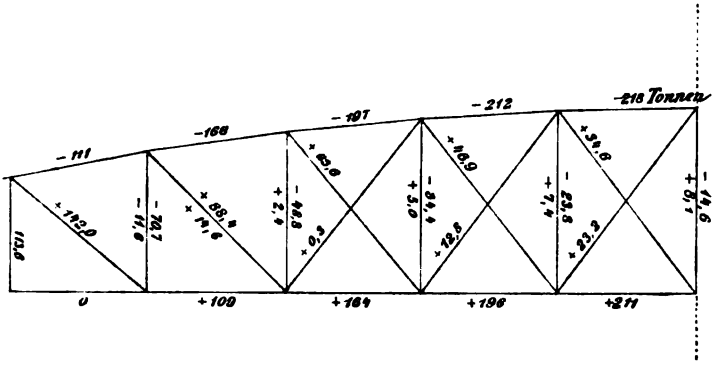


Fig. 319.

$-g_0\lambda = -0{,}45 \cdot 3{,}6 = -1{,}6'$ zu addieren, ausgenommen Spannkraft V_0, zu welcher nur der Betrag $-0{,}8'$ hinzutritt. Es ergeben sich dann die in die Fig. 319 eingeschriebenen Werte.

§ 39.

Über die Berechnung von Dachbindern.

Bei der Berechnung eines Dachbinders empfiehlt es sich im allgemeinen, die Einflüsse von Winddruck, Schneedruck und Eigengewicht getrennt zu bestimmen. Der Gang der auszuführenden Untersuchungen soll hier für den Fall besprochen werden, daß die Dachbinder einander parallel sind.

170. Einfluß des Winddruckes. Es möge der in Fig. 320 dargestellte sichelförmige Dachbinder untersucht werden. Die auf die Dachflächen 0 *I*, *I II*, *II III* wirkenden Winddrücke seien W_1, W_2, W_3. Besitzen die Strecken 0 *I*, *I II*, *II III* die Längen o_1, o_2, o_3 und schließen sie mit der Windrichtung (v) beziehungsweise die Winkel α_1, α_2, α_3 ein, so findet man

$$W_1 = weo_1 \sin^2 \alpha_1; \quad W_2 = weo_2 \sin^2 \alpha_2; \quad W_3 = weo_3 \sin^2 \alpha_3,$$

wo e = Abstand zweier benachbarter Binder,
w = Druck auf die Einheit einer vom Winde rechtwinklig getroffenen ebenen Fläche.

Man pflegt durchschnittlich $w = 120^k$ f. d. qm anzunehmen.

Um W_1 zu bestimmen, berechne man die Belastung weo_1, stelle dieselbe in irgend einem Kräftemaßstabe durch die dem Stabe 0 *I*

Digitized by Google

parallele Strecke $R1$ dar, Fig. 320a, und fälle vom Punkte 1 das Lot $11'$ auf eine durch R zur Windrichtung gezogene Parallele und von $1'$ auf $R1$ das Lot $1'1''$, Man erhält: Winddruck W_1 = Strecke $1''1$. Ganz

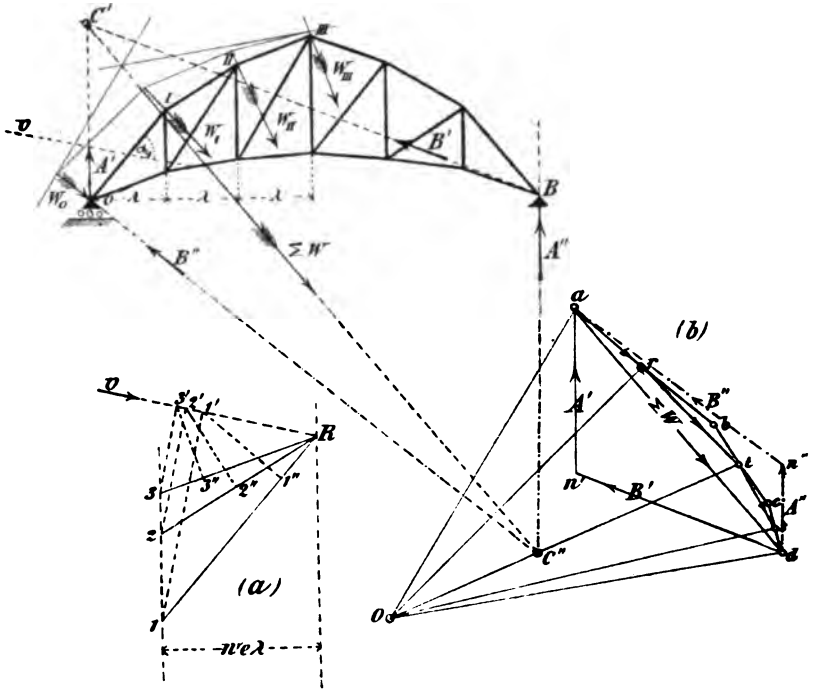


Fig. 320.

ebenso werden W_2 und W_3 gefunden. In Fig. 320 sind gleiche Feldweiten λ angenommen worden; es besitzen dann die Winddrücke W_1, W_2, W_3 die gleiche Horizontalprojektion $we\lambda$.

Reiht man W_1, W_2, W_3 zu einem Kräftezuge aneinander, indem man (Fig. 320b)

$$\overline{ab} = W_1;\ \overline{bc} = W_2;\ \overline{cd} = W_3$$

macht (wobei $ab \perp 0\,I$, $bc \perp I\,II$, $cd \perp II\,III$), und halbiert hierauf die Strecken ab, bc, cd in den Punkten r, t, s, so stellen die Strecken ar, rt, ts, sd nach Größe, Richtung und Sinn beziehungsweise die Belastungen W_0, W_I, W_{II}, W_{III} der Knoten 0, I, II, III dar; die Lage ihrer Mittelkraft: $\Sigma W = \overline{ad}$ kann mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmt werden.

Um nun die Gegendrücke A' und B' der Auflager A und B, von denen das erstere auf wagerechter Bahn verschiebbar und das letztere

Digitized by Google

fest sein möge, zu bestimmen, wird der senkrecht gerichtete Widerstand A' mit $\Sigma W'$ in C' zum Schnitt gebracht, durch die Punkte C' und B die Richtung des Widerstandes B' festgelegt und $an' \parallel C'A$ sowie $dn' \parallel BC'$ gezogen. Man findet $\overline{n'a} = A'$ und $\overline{dn'} = B'$ und ist jetzt im stande, die durch den vorliegenden Belastungsfall in den einzelnen Stäben hervorgerufenen Spannkräfte zu ermitteln, z. B. mit Hilfe eines *Cremona*schen Kräfteplanes (vergl. § 27).

In gleicher Weise werden die Spannkräfte für den Fall bestimmt, daß der Wind von der Seite kommt, auf welcher das feste Auflager liegt. Ist der Dachbinder symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte, so empfiehlt es sich, die Untersuchung dieses zweiten Belastungszustandes am Spiegelbilde des Binders durchzuführen. Man hat dann zur Ermittelung der Auflager-Widerstände, welche jetzt mit A'' und B'' bezeichnet werden mögen, nur nötig, in der Fig. 320 die beiden Auflager miteinander zu vertauschen, und erhält die in jener Figur durch strichpunktierte Linien dargestellten Werte: $\overline{n''a} = B''$ und $\overline{dn''} = A''$.

171. Einfluß des Schneedrucks und des Eigengewichtes. Bei Untersuchung der Einwirkung des Schneedrucks auf Dachbinder, deren Stäbe nicht durchweg infolge gänzlicher Belastung am ungünstigsten beansprucht werden, beschränkt man sich meistens darauf, den Fall gänzlicher Belastung mit demjenigen der Belastung der linken, beziehungsweise rechten Dachhälfte zu vergleichen. Ist dann der Binder symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch seine Mitte, und darf das Eigengewicht als eine gleichförmige, ausschließlich auf die Knoten der oberen Gurtung verteilte Belastung angesehen werden (was häufig der Fall ist), so lassen sich die Grenzwerte sämtlicher Spannkräfte mit Hilfe eines einzigen Kräfteplanes feststellen. Man nehme zunächst nur die rechte Dachhälfte gleichmäßig belastet an, und zwar mit $q = p + g$ f. d. Längeneinheit, wo g = ständige Belastung und p = Schneedruck (Fig. 321), verteile die Belastung auf die Knotenpunkte und ermittle nach irgend einem der beschriebenen Verfahren die in den Stäben hervorgerufenen Spannkräfte. Für irgend einen Stab der linken Trägerhälfte möge sich die Spannkraft S' ergeben, für den entsprechenden Stab der rechten Hälfte die Spannkraft S''.

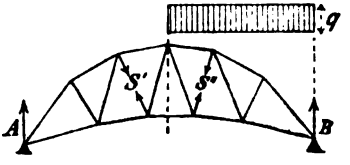


Fig. 321.

Wird nun gänzliche Belastung mit q vorausgesetzt (Fig. 322), so entsteht offenbar

$$(1) \quad S = S' + S''.$$

Digitized by Google

Wird die linke Dachhälfte mit g, die rechte mit q belastet, Fig. 323, so entsteht in einem Stabe der *linken* Trägerhälfte

$$(2) \quad S = S' + \frac{g}{q} S''.*)$$

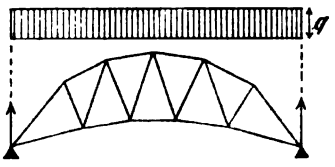


Fig. 322.

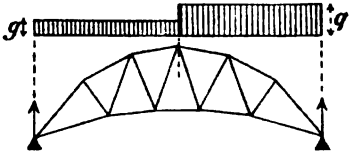


Fig. 323.

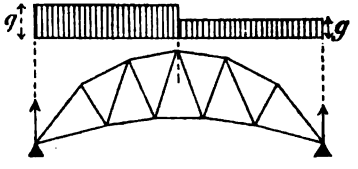


Fig. 324.

Ist schließlich die rechte Dachhälfte mit g und die linke mit q belastet, so ergibt sich für einen Stab der *linken* Hälfte

$$(3) \quad S = \frac{g}{q} S' + S''.$$

Die Spannkräfte der Gurtstäbe nehmen bei gänzlicher Belastung des Trägers ihre größten Zahlenwerte an; sie werden deshalb mittels Gleichung (1) bestimmt. Hingegen sind die Kräfte S der Füllungsstäbe für einseitige Belastung nach den Gleichungen (2) und (3) zu berechnen.

Ist die ständige Belastung keine gleichförmig verteilte, oder ist es unzulässig, die gesamte Last g ausschließlich auf die Knoten der oberen Gurtung zu verteilen, so setze man in den vorstehenden Entwicklungen zunächst $g = 0$ und bestimme hierauf den Einfluß der ständigen Belastung mittels eines besonderen Kräfteplanes.

Zahlenbeispiel. Der in der Fig. 325 dargestellte Dachbinder hat eine Stützweite von 24^m; die Knoten der oberen Gurtung liegen auf einem Kreisbogen, dessen Radius $= 20^m$ ist. Der Abstand der Binder voneinander ist $= 4{,}0^m$, die ständige Belastung beträgt 50^k und der Schneedruck 75^k f. d. qm der Horizontalprojektion der Dachfläche; also ist $g = 50 \cdot 4 = 200^k = 0{,}2^t$; $p = 75 \cdot 4 = 300^k = 0{,}3^t$ und $q = g + p = 0{,}5^t$. Die gesamte ständige Belastung möge auf die Knoten der oberen Gurtung verteilt werden. Streng genommen greift allerdings ein Teil des Bindergewichts in den Knoten der

*) Die Belastung der rechten Dachhälfte erzeugt für sich allein S'. Wäre nur die linke Dachhälfte und zwar mit q belastet, so würde in dem Stabe der linken Trägerhälfte S'' entstehen; tritt g an die Stelle von q, so ist S'' im Verhältnis $g : q$ zu verkleinern. Durch diese Überlegung gelangt man zur Gleichung (2).

Digitized by Google

unteren Gurtung an; doch ist derselbe, verglichen mit dem Gewichte der Pfetten und der Dachdeckung in der Regel so gering, daß die oben gemachte Annahme vollkommen zulässig ist.

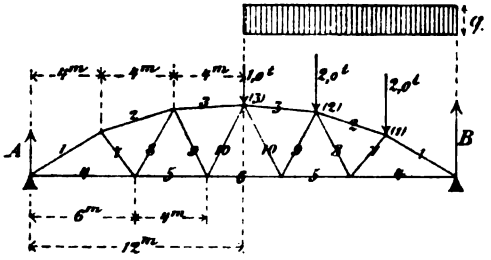


Fig. 325.

Zunächst wird der Einfluß der auf die rechte Dachhälfte wirkenden Last q untersucht. Der Knoten (3) wird hierbei mit $\frac{1}{2}\, q\lambda = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 4{,}0 = 1{,}0^t$ belastet und jeder der Knoten (1) und (2) mit $0{,}5 \cdot 4{,}0 = 2{,}0^t$. Man erhält

$$A = 2{,}0\,(\tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{6}) + 1{,}0\,\tfrac{3}{6} = 1{,}5^t;\quad B = 3{,}5^t{}^*)$$

und findet (beispielsweise mit Hilfe eines *Cremona*schen Planes) die in der folgenden Tabelle zusammengestellten, in Tonnen ausgedrückten Spannkräfte S' und S''.

Gurtungen				Füllungsstäbe			
Linke Trägerhälfte		Rechte Trägerhälfte		Linke Trägerhälfte		Rechte Trägerhälfte	
Stab	S'	Stab	S''	Stab	S'	Stab	S''
1	$-2{,}98$	1	$-6{,}95$	7	$+0{,}72$	7	$-0{,}41$
2	$-3{,}19$	2	$-6{,}03$	8	$-0{,}60$	8	$+0{,}39$
3	$-3{,}97$	3	$-5{,}01$	9	$+1{,}26$	9	$-1{,}14$
4	$+2{,}57$	4	$+6{,}01$	10	$-1{,}24$	10	$+1{,}12$
5	$+3{,}33$	5	$+5{,}56$				
6	$+4{,}50$	6	$+4{,}50$				

Nun entstehen bei gänzlicher Belastung des Trägers mit q (Fig. 322) in den Stäben der Gurtungen die Spannkräfte

$S_1 = -2{,}98 - 6{,}95 = -9{,}93^t$ | $S_4 = +2{,}57 + 6{,}01 = +8{,}58^t$
$S_2 = -3{,}19 - 6{,}03 = -9{,}22^t$ | $S_5 = +3{,}33 + 5{,}56 = +8{,}89^t$
$S_3 = -3{,}97 - 5{,}01 = -8{,}98^t$ | $S_6 = +4{,}50 + 4{,}50 = +9{,}00^t$

Für die Füllungsstäbe ergibt sich

a. Im Belastungsfalle Fig. 323.

$$S = S' + \frac{g}{q}\, S'' + S' + 0{,}4\, S''$$

$S_7 = +0{,}72 - 0{,}4 \cdot 0{,}41 = +0{,}56^t$
$S_8 = -0{,}60 + 0{,}4 \cdot 0{,}39 = -0{,}44^t$
$S_9 = +1{,}26 - 0{,}4 \cdot 1{,}14 = +0{,}80^t$
$S_{10} = -1{,}24 + 0{,}4 \cdot 1{,}12 = -0{,}79^t$.

*) B bedeutet den Stützenwiderstand nach Abzug von $\frac{1}{2} q\lambda$.

Digitized by Google

b. Im Belastungsfalle Fig. 324.

$$S = S'' + 0{,}4\,S'$$
$$S_7 = -0{,}41 + 0{,}4 \cdot 0{,}72 = -0{,}12'$$
$$S_8 = +0{,}39 - 0{,}4 \cdot 0{,}60 = +0{,}15'$$
$$S_9 = -1{,}14 + 0{,}4 \cdot 1{,}26 = -0{,}64'$$
$$S_{10} = +1{,}12 - 0{,}4 \cdot 1{,}24 = +0{,}62'.$$

Hiernach werden die linkssteigenden Füllungsstäbe der linken Trägerhälfte auf Zug oder auf Druck beansprucht, je nachdem nur die rechte oder nur die linke Dachhälfte mit Schnee belastet ist. Die rechtssteigenden Füllungsstäbe verhalten sich entgegengesetzt.

Zu den vorstehend angegebenen Werten S sind noch die durch den Winddruck hervorgerufenen Spannkräfte zu addieren.

172. Fortsetzung. Sollen hinsichtlich der Belastung durch den Schneedruck die denkbar ungünstigsten Annahmen gemacht werden, so sind die Spannkräfte im allgemeinen nach den in den §§. 31 und 32 angegebenen Verfahren zu ermitteln. Für den besonders häufigen Fall eines symmetrischen Trägers mit gleich weiten Feldern empfehlen wir indes den folgenden kürzeren Weg.

Man belaste nur den der Stütze B benachbarten Knoten der oberen Gurtung, und zwar mit $q\lambda$, bestimme den am linken Auflager hervorgerufenen Widerstand $A' = \frac{1}{n} q\lambda$, wo $n =$ Anzahl der Felder und ermittele auf irgend eine Weise die Spannkräfte der links von der Last $q\lambda$ liegenden Stäbe. Für irgend einen Stab der linken Trägerhälfte möge sich die Spannkraft S' ergeben, für den entsprechenden Stab der rechten Trägerhälfte die Spannkraft S''. Fig. 326.

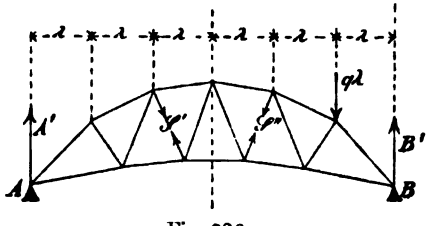


Fig. 326.

Wird nur der der *linken* Stütze (A) benachbarte obere Knoten belastet — wieder mit $q\lambda$ —, so entstehen in den Stäben der linken Hälfte die Spannkräfte S'', in denen der rechten Hälfte die Spannkräfte S'.

Es sei nun diejenige Spannkraft S gesucht, welche in einem Stabe der linken Trägerhälfte durch den in der Fig. 327 dargestellten Belastungszustand hervorgerufen wird. Jeder Knoten links vom Schnitte tt trägt die Last $x'\lambda$ und jeder Knoten rechts von tt die Last $x''\lambda$. Durch den Schnitt tt werden außer dem fraglichen Stabe nur noch zwei Stäbe getroffen. Die Knotenbelastung links neben dem Schnitte tt habe von

Digitized by Google

der Auflagersenkrechten A den Abstand $m'\lambda$, und die Knotenbelastung rechts neben tt von B den Abstand $m''\lambda$. Werden zunächst sämt-

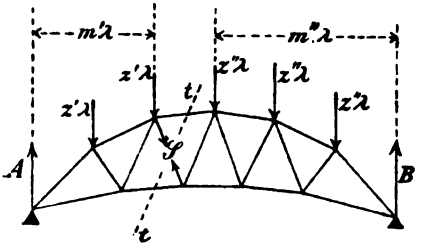


Fig. 327.

liche Lasten $z'\lambda$ entfernt, so greift links von tt nur die äußere Kraft

$$A = \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{m''}{n}\right) z''\lambda = \frac{m''(m''+1)}{2}\,\frac{z''}{q}\,\frac{q\lambda}{n}$$

$$= \frac{m''(m''+1)}{2}\,\frac{z''}{q}\,A'$$

an, und es entsteht deshalb die Spannkraft

$$S = \frac{m''(m''+1)}{2}\,\frac{z''}{q}\,S',$$

und ebenso findet man, daß die Lasten $z'\lambda$ für sich allein die Spannkraft

$$S = \frac{m'(m'+1)}{2}\,\frac{z'}{q}\,S''$$

hervorbringen. Im ganzen entsteht also:

$$S = \frac{m''(m''+1)}{2}\,\frac{z''}{q}\,S' + \frac{m'(m'+1)}{2}\,\frac{z'}{q}\,S''.$$

Gehört der fragliche Stab einer *Gurtung* an, so ist gänzliche Belastung des Trägers vorauszusetzen, also $z' = z'' = q$ einzuführen. Man findet dann

$$(1)\quad S = \frac{m''(m''+1)}{2}\,S' + \frac{m'(m'+1)}{2}\,S''.$$

In einem *linkssteigenden Füllungsstabe* entsteht ${}_{max}S$ oder ${}_{min}S$, je nachdem der Schneedruck nur rechts oder nur links vom Schnitte tt wirkt. Im ersten Falle setze man $z' = g$ und $z'' = q$, im zweiten Falle $z'' = g$ und $z' = q$. Es ergibt sich

$$(2)\quad \begin{cases} {}_{max}S = \dfrac{m''(m''+1)}{2}\,S' + \dfrac{m'(m'+1)}{2}\,\dfrac{g}{q}\,S'' \\ {}_{min}S = \dfrac{m''(m''+1)}{2}\,\dfrac{g}{q}\,S' + \dfrac{m'(m'+1)}{2}\,S''. \end{cases}$$

Digitized by Google

Für einen *rechtssteigenden* Füllungsstab erhält man schließlich

$$(3)\quad \begin{cases} {}_{max}S = \dfrac{m''(m''+1)}{2}\,\dfrac{g}{q}\,S' + \dfrac{m'(m'+1)}{2}\,S'' \\ {}_{min}S = \dfrac{m''(m''+1)}{2}\,S' + \dfrac{m'(m'+1)}{2}\,\dfrac{g}{q}\,S''. \end{cases}$$

Ist die ständige Belastung ungleichförmig, so setze man in den vorstehenden Entwicklungen $g = 0$ und bestimme den Einfluß der ständigen Belastung mittels eines besonderen Kräfteplanes, und ebenso verfährt man, wenn bei Netzwerkträgern ein wesentlicher Teil einer gleichförmigen ständigen Belastung in den Knoten der unteren Gurtung angreift (Dachbinder mit angehängter Decke).*)

Zahlenbeispiel. Wir erläutern unser Verfahren an dem bereits in No. 171 untersuchten Dachbinder. Es ist $q\lambda = 0{,}5 \cdot 4 = 2{,}0^t$ und wegen $n = 6$, $A' = \frac{1}{n} q\lambda = \frac{1}{3}\,t$. Dem Belastungszustande in Fig. 328 entsprechen die folgenden, mit Hilfe eines *Cremona*schen Planes gewonnenen Spannkräfte.

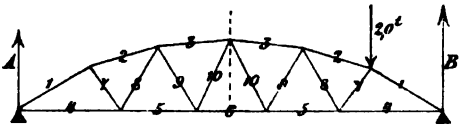


Fig. 328.

Stab	S'	S''	Stab	S'	S''
1	— 0,66		7	+ 0,16	— 1,25
2	— 0,71	— 2,13	8	— 0,13	+ 1,12
3	— 0,88	— 1,23	9	+ 0,28	— 0,52
4	+ 0,57		10	— 0,275	+ 0,51
5	+ 0,74	+ 1,48			
6	+ 1,00	+ 1,00			

Nun sind die größten Spannkräfte in den Gurtungen nach Gleich. (1):

Stab	m''	m'	
1	5	0	$S_1 = -\frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 0{,}66 = -9{,}90^t$
2	4	1	$S_2 = -\frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0{,}71 - \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 2{,}13 = -9{,}23^t$
3	3	2	$S_3 = -\frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0{,}88 - \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 1{,}23 = -8{,}97^t$

*) Wir erinnern daran, daß bei den ***Fachwerken mit Vertikalen*** die ständige Belastung stets auf die Knoten einer der beiden Gurtungen verteilt werden darf. Man hat nur nötig, die Spannkräfte V nachträglich auf die früher angegebene Weise (Seite 267 u. 268) zu verbessern.

Digitized by Google

Stab	m''	m'	
4	5	0	$S_4 = +\frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 0{,}57 = +8{,}55^t$
5	4	1	$S_5 = +\frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0{,}74 + \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 1{,}48 = +8{,}88^t$
6	3	2	$S_6 = +\frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 1{,}00 + \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 1{,}00 = +9{,}00^t$

Für die linkssteigenden Diagonalen erhält man, nach Gleich. (2), mit $\frac{g}{q} = 0{,}4$:

Stab	m''	m'	
7	4	1	$_{max}S_7 = +\frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0{,}16 - \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}4 = +1{,}10^t$
			$_{min}S_7 = +\frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}4 - \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 1{,}25 = -0{,}61^t$
9	3	2	$_{max}S_9 = +\frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0{,}28 - \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 0{,}52 \cdot 0{,}4 = +1{,}06^t$
			$_{min}S_9 = +\frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}4 - \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 0{,}52 = -0{,}89^t$

und für die rechtssteigenden Diagonalen, nach Gleich. (3):

Stab	m''	m'	
8	4	1	$_{max}S_8 = -\frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0{,}13 \cdot 0{,}4 + \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 1{,}12 = +0{,}60^t$
			$_{min}S_8 = -\frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0{,}13 + \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 1{,}12 \cdot 0{,}4 = -0{,}85^t$
10	3	2	$_{max}S_{10} = -\frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0{,}275 \cdot 0{,}4 + \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 0{,}51 = +0{,}87^t$
			$_{min}S_{10} = -\frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0{,}275 + \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}4 = -1{,}04^t$

Die Spannkräfte in den Füllungsstäben ergeben sich hiernach wesentlich größer als nach der in No. 171 angestellten Rechnung; beispielsweise wird $_{max}S_7$ fast doppelt so groß wie vorhin. Zu berücksichtigen ist allerdings, daß die zweite Rechnung sehr unwahrscheinliche Belastungsfälle annimmt.

Digitized by Google

X. Abschnitt.

Der Gerbersche Fachwerkbalken.

§ 40.

Einflußlinien.

173. Einleitung. Wir betrachten den *Gerber*schen Träger unter denselben Voraussetzungen, die im vorigen Abschnitte bei der Behandlung des einfachen Balkens gemacht wurden, nehmen also an, daß sich die beweglichen Auflager auf *wagerechten* Bahnen verschieben, daß nur *senkrecht* und *abwärts* gerichtete Lasten wirken, und daß die gegliederten Scheiben, aus denen der Träger besteht, *einfache Dreiecknetze* sind. Die Koppelträger (beispielsweise die Teile AB des in der Fig. 329 dargestellten Trägers) verhalten sich wie einfache Balken, und

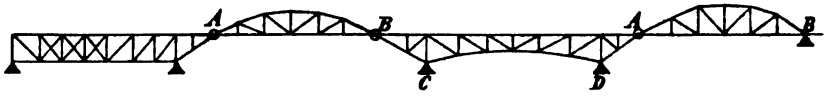


Fig. 329.

es bleibt also nur noch die Inanspruchnahme eines Balkens mit überstehenden Enden zu untersuchen. Dabei genügt es, die Gesetze für den Fall aufzustellen, daß *beide* Balkenenden außerhalb der Stützen liegen und durch angrenzende Koppelträger belastet werden. Nimmt man dann das eine überstehende Stück gewichtslos und unbelastet an, so ergeben sich die Gesetze für den Balken mit nur *einem* überragenden Ende.

Die Frage nach der Bestimmung der in den Gurtungen entstehenden Spannkräfte O und U ist bereits durch die früheren Untersuchungen erledigt; denn die in No. 145 (Seite 245 und 246) gegebenen Regeln, um die O und U aus den auf die Knotenpunkte bezogenen Momenten M abzuleiten, gelten für jedes einfache Dreiecknetz, und die Aufsuchung der größten und kleinsten Momente M wurde bereits im Abschnitte VI gelehrt. Es ist daher hauptsächlich noch die Ermittelung der *Spannkräfte in den Füllungsstäben* zu erörtern. Bei Parallelträgern mit wagerechten Gurtungen ergeben sich diese Kräfte am schnellsten aus den Querkräften, welche auf die im Abschnitte VI beschriebene und im folgenden Paragraph durch ein Zahlenbeispiel erläuterte Art bestimmt werden können.

Digitized by Google

Bei Trägern mit gebrochenen Gurtungen hingegen ist im allgemeinen die Benutzung der Einflußlinien als das übersichtlichste Verfahren am meisten zu empfehlen, wobei die Untersuchungen im § 19 zuweilen gute Dienste leisten werden. Außerdem verdient noch die Bestimmungsweise der Spannkräfte nach *Zimmermann* hervorgehoben zu werden; zu der im § 36 gegebenen allgemeinen Entwicklung dieses Verfahrens, welche für jedes von parallelen äußeren Kräften ergriffene Dreiecknetz gilt, ist wenig hinzuzufügen. Es genügt, darauf hinzuweisen, daß beim *Gerber*schen Balken Momente von verschiedenen Vorzeichen auftreten. In der, einen Teil eines Netzwerks darstellenden Fig. 330 wurde vorausgesetzt, daß das Moment M_m positiv, hingegen M_{m-1} negativ ist. Die Strecken ma und bc, welche die Verhältnisse $M_m : \lambda_m$ und $M_{m-1} : \lambda_m$ darstellen, wurden von der unteren Gurtung aus aufgetragen (entsprechend der Anordnung in Fig. 247), *beide aber in entgegengesetzter Richtung*. Die Pfeile neben den die Spannkräfte O, D, U darstellenden Strecken ad, de, ef deuten an, in welchem Sinne die Spannkräfte an dem Trägerteile *links* von dem durch die Stäbe O, D, U geführten Schnitte tt angreifen. Um bei Feststellung dieses Sinnes keinen Fehler zu begehen, genügt es, daran zu denken, daß ein Stab der $\frac{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Gurtung $\frac{\text{gedrückt}}{\text{gezogen}}$ wird, sobald das Moment M für den gegenüberliegenden Knotenpunkt positiv ist, und daß die wagerechte Projektion des aus den Spannkräften O, D, U bestehenden *stetigen* Kräftezuges $= 0$ sein muß, weil sämtliche äußeren Kräfte senkrecht sind.

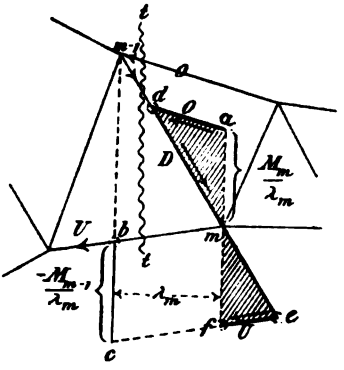


Fig. 330.

Man hätte in Fig. 330 auch den negativen Wert $M_{m-1} : \lambda$ von der unteren Gurtung aus nach oben und das positive $M_m : \lambda$ nach unten absetzen können; sind beide Momente negativ, so werden sie beide zweckmäßig nach oben hin aufgetragen, damit der aus O, U, D bestehende Kräftezug innerhalb des Trägernetzes liegt. Ganz entsprechend ist zu verfahren, wenn die in der Figur 248 dargestellte Anordnung gewählt wird.

In der Fig. 331 ist ein Trägerstück mit Vertikalen abgebildet worden; die Belastung ist an den Knotenpunkten der unteren Gurtung

Digitized by Google

angreifend gedacht. Es wurde M_m positiv und M_{m-1} negativ angenommen und auf die in No. 158 beschriebene Weise das Kräftepolygon für den oberen Knoten $m-1$ gezeichnet. Es ergibt sich $O_m = \overline{de}$; $V_{m-1} = \overline{ef}$; $O_{m-1} = \overline{fc}$; $D_m = \overline{cd}$. Die in das Kräftepolygon eingetragenen Pfeile geben an, in welchem Sinne die Kräfte am oberen Knoten $m-1$ angreifen. Zur Feststellung des Umfahrungssinnes dieses Kräftepolygons genügt es, zu wissen, daß O_m einen Druck bedeutet, weil M_m positiv ist.

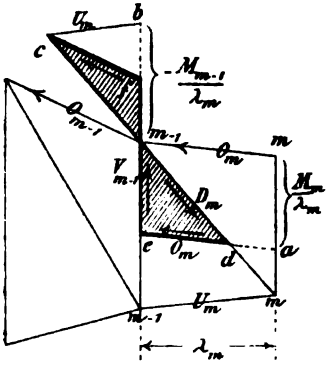


Fig. 331.

Um das *Zimmermann*sche Verfahren anwenden zu können, braucht man nur die Momente für die Knotenpunkte zu bestimmen. Hierzu reichen die im Abschnitte VI für einen beliebigen Belastungszustand entwickelten Gesetze aus, sobald noch festgestellt worden ist, wie der Träger belastet werden muß, damit die fraglichen Spannkräfte ihre größten Werte annehmen. Die letztere Frage wird am schnellsten durch die Betrachtung der Einflußlinien entschieden.

174. Einflußlinie für die Spannkraft D in einem Füllungsstabe des Auslegers BC in Fig. 332. Wir führen durch den fraglichen Stab einen Schnitt tt, welcher außerdem noch zwei Gurtstäbe (O und U) trifft, wählen den Schnittpunkt E von O und U zum Drehpunkte und setzen die Summe der Momente aller am linken Trägerteile wirkenden Kräfte gleich Null. F_1 und F_2 seien die dem Schnitte tt benachbarten Querträger. Irgendwo zwischen F_1 und dem Gelenke B greife eine Einzellast P_2 an, im Abstande a_2 von E, und auf den angrenzenden Koppelträger AB wirke eine Last P_1 in der Entfernung a_1 vom Gelenke A; letztere übt auf B den Druck $\frac{P_1 a_1}{l'}$ aus. Wird zunächst angenommen, daß E zwischen B und F_1 liegt (im Abstande c von B) und daß a_2 positiv ist, sobald sich P_2 links von E befindet, so ergibt sich, wenn die Rechtsdrehung als die positive angesehen und das Lot von E auf den fraglichen Füllungsstab mit r bezeichnet wird, die Gleichgewichtsbedingung

$$\pm Dr - \frac{P_1 a_1}{l'} c - P_2 a_2 = 0,$$

in welcher das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem die

Digitized by Google

Spannkraft D rechts oder links um E dreht. In dem in der Fig. 332 vorausgesetzten Falle ergibt sich

$$D = + \frac{1}{r}\left(\frac{P_1 a_1}{l'} c + P_2 a_2\right).$$

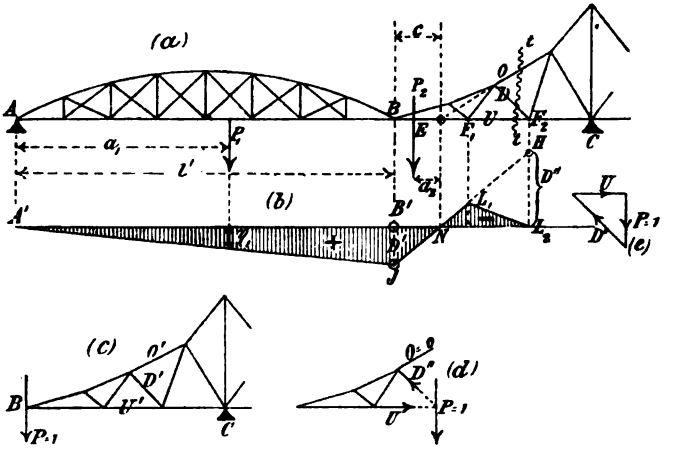


Fig. 332.

Da dieser Ausdruck in Bezug auf die Veränderlichen a_1 und a_2 vom ersten Grade ist, und da ferner eine in F_2 oder rechts von F_2 angreifende Last ohne Einfluß auf D ist, so besteht die Einflußlinie für D aus drei Geraden $A'J$, JL_1 und L_1L_2 (Fig. 332b), welche den Trägerteilen AB, BF_1 und F_1F_2 entsprechen, und deren mittelste senkrecht unter E die Ordinate Null besitzt, da eine durch E gehende Last P_2 die Spannkraft $D = 0$ erzeugt. Kennt man also beispielsweise die Spannkraft $\overline{B'J} = D'$, welche eine in B angreifende Last $P = 1$ in dem fraglichen Stabe hervorruft, so ist man im stande, die Einflußlinie aufzuzeichnen und den Einfluß jeder Last P in der Form $D = P\eta$ anzugeben. Die Kräfte D' aber findet man u. a. mit Hilfe eines *Cremona*schen Planes, welcher für den in der Fig. 332c dargestellten Belastungszustand gezeichnet wird. Sehr einfach ist auch die Festlegung der Einflußlinie mittels der Strecke $\overline{L_2H} = D''$, welche von der Geraden JL_1 auf der Senkrechten durch F_2 abgeschnitten wird und in folgender Weise bestimmt werden kann. Man betrachte das Trägerstück links vom Schnitte tt und suche diejenigen Kräfte O, D'', U, welche mit einer durch den Punkt F_2 gehenden Last $P = 1$ im Gleichgewichte sind (Fig. 332d). Man findet $O = 0$, während U und D''

Digitized by Google

durch das Kräftedreieck in der Figur 332e gegeben sind. Im vorliegenden Falle ist D'' ein Druck, welcher bei vertikaler Lage des fraglichen Füllungsstabes = 1 wird.

Unsere Untersuchung lehrt: Liegt der Punkt E zwischen B und dem Schnitte tt, so erzeugen alle links von E gelegenen Lasten in dem linkssteigenden Füllungsstabe D einen Zug, alle rechts von E wirkenden Lasten einen Druck. Je nachdem also die bewegliche Belastung nur auf den Trägerteil AE oder nur auf den Teil EF_2 wirkt, entsteht die Spannkraft $_{max}D$ oder $_{min}D$. Wird der Träger durch einen Zug von Einzellasten beansprucht, so sind die schwersten Lasten in die Nähe von B, oder in die Nähe von F_1 zu stellen, je nachdem $_{max}D$ oder $_{min}D$ erzeugt werden soll. Die ungünstigste Stellung des Lastenzuges bestimmt man am schnellsten durch Probieren.

In der Fig. 333 ist der Fall eines links von B gelegenen Schnittpunktes E der Gurtstäbe O und U dargestellt worden. Es handelt sich dort wieder um einen linkssteigenden Füllungsstab. Die Einflußlinie $A'JL_1L_2$ kann wie vorhin mit Hilfe des Punktes E und eines der beiden Werte D' und D'' aufgezeichnet werden, wobei die Größe von D'' durch Zerlegung der Lasteinheit nach den Richtungen O und D erhalten

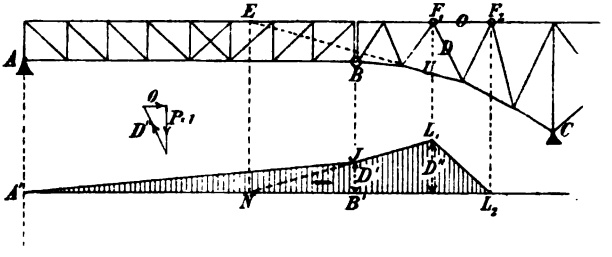


Fig. 333.

wird; es kann aber auch vorteilhaft sein (bei unbequem gelegenem Punkte E), die Lage der Geraden JL_1 durch Auftragung der Strecken D' und D'' zu bestimmen. Die Fig. 333 lehrt, daß in einem linkssteigenden Füllungsstabe bei links von B liegendem Punkte E nur Druckspannungen entstehen, welche bei gänzlicher Belastung des Trägerteiles AF_2 am größten werden. Im Falle der Beanspruchung des Trägers durch einen Zug von Einzellasten sind die schwersten Lasten in der Nähe von F_1 aufzustellen.

Rechtssteigende Füllungsstäbe verhalten sich bezüglich der Vorzeichen entgegengesetzt wie linkssteigende. Liegt also beispielsweise der einem rechtssteigenden Füllungsstabe entsprechende Punkt E links von B, so entstehen in dem Stabe nur Zugspannungen.

Digitized by Google

Hinsichtlich der Benutzung der Einflußlinien zur Ermittelung der Grenzwerte der Spannkräfte verweisen wir auf den § 14.

175. Einflußlinie für die Spannkraft D in einem Füllungsstabe des Trägerteiles CD in Fig. 334. Solange es sich nur um den Einfluß von Lasten handelt, welche zwischen den Stützen C und D auf den Träger wirken, verhält sich das Trägerstück CD wie ein einfacher Balken, und es besteht deshalb der zwischen C und D gelegene Teil der Einflußlinie (nach No. 143) aus den drei mit II, III und IV bezeichneten Geraden, deren erste und letzte auf den Senkrechten durch die Stützpunkte D und C die Strecken D'' und D' abschneiden, wobei D' diejenige Spannkraft ist, welche im Stabe D entsteht, sobald links vom Schnitte tt nur die äußere Kraft $C = 1$ angreift (Fig. 335), während D'' erzeugt wird, falls rechts von tt ausschließlich der Stützenwiderstand $D = 1$ wirkt.*) Um den Einfluß von Lasten zu bestimmen,

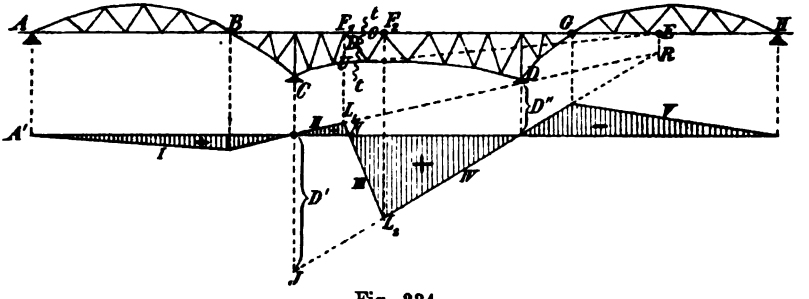


Fig. 334.

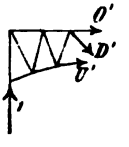


Fig. 335.

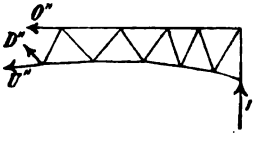


Fig. 336.

welche auf dem Ausleger DG und dem angrenzenden Koppelträger GH ruhen, erwäge man, daß im Falle ausschließlicher Belastung des Trägerteiles F_2H am Trägerabschnitte links von tt nur der Stützenwiderstand C als äußere Kraft angreift, woraus dann folgt, daß die Ordinaten der Einflußlinie für die Spannkraft D zwischen F_2 und H den entsprechenden Ordinaten der (in No. 93 bestimmten) Einflußlinie

*) In der Fig. 334 ist die Belastung an der oberen Gurtung angreifend gedacht. F_1 und F_2 sind die dem Schnitte tt benachbarten Auflager.

Digitized by Google

für C proportional sein müssen. Hiernach entspricht dem Trägerstücke DG die Verlängerung der Geraden IV und dem Stücke GH die Gerade V, welche die IV auf der Senkrechten durch G trifft. In gleicher Weise läßt sich auf den Einfluß von Lasten links von C schließen. Hervorzuheben ist, daß sich die Geraden II und IV auf der Senkrechten durch den Schnittpunkt E der vom Schnitte tt ge-

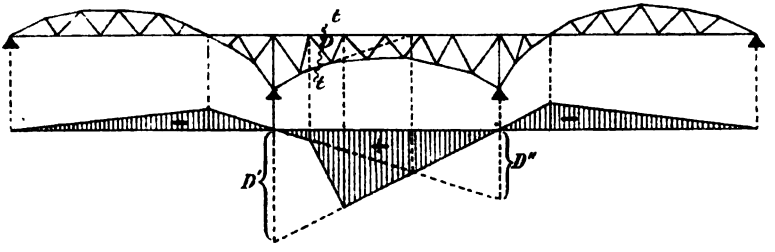


Fig. 337.

troffenen Gurtstäbe O und U schneiden müssen. Je nachdem nun E rechts oder links vom Stützpunkte D liegt (Fig. 334 oder 337), erzeugen Lasten, welche auf die Trägerteile CF_1 oder F_2D wirken,

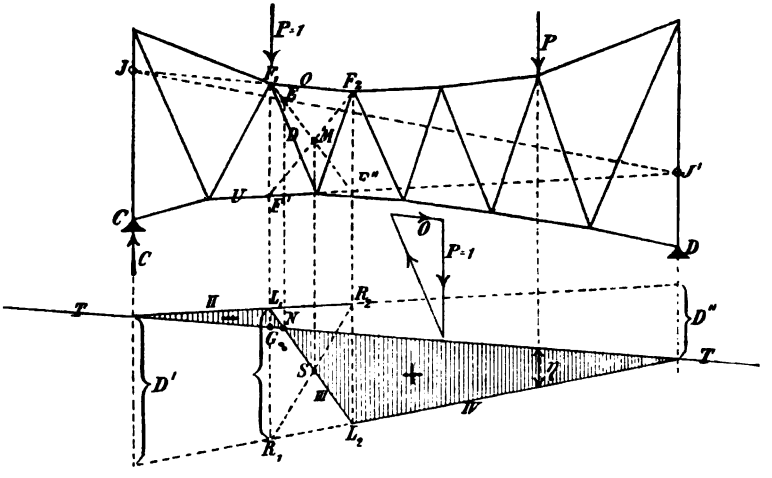


Fig. 338.

Spannkräfte D von gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen. Punkt E kann bei günstiger Lage zur Aufzeichnung der Einflußlinie für D benutzt werden; es genügt dann, D' oder D'' aufzutragen.

Digitized by Google

Wir erinnern noch an die in No. 143, Fig. 226 nachgewiesenen wichtigen Eigenschaften, daß M und E senkrecht über S und N liegen und Strecke $\overline{L_1 R_1} = r$ ist.

Um die entsprechende Figur für eine rechtssteigende Diagonale zu erhalten, betrachte man das Spiegelbild der Fig. 338. Kehrt man Fig. 338 um, so daß $F_1 F_2$ der unteren Gurtung angehört, so hat man den Fall einer unten angreifenden Belastung; man muß aber die Vorzeichen umkehren. Das Verfahren gilt natürlich auch dann, wenn sich O und U zwischen den Stützen treffen. Wir empfehlen dem Leser, alle diese Fälle aufzuzeichnen.

176. Die Einflußlinien für die Spannkräfte in den Gurtungen können aus den Einflußlinien für die den Gurtstäben gegenüberliegenden Momente mittels Division durch den Hebelarm der fraglichen Spannkraft abgeleitet werden. Kürzer ist aber das folgende Verfahren.

a. Spannkräfte O und U des Auslegers BC. Die in der Fig. 339 dargestellten Einflußlinien für die Spannkräfte O und U in den Gurt-

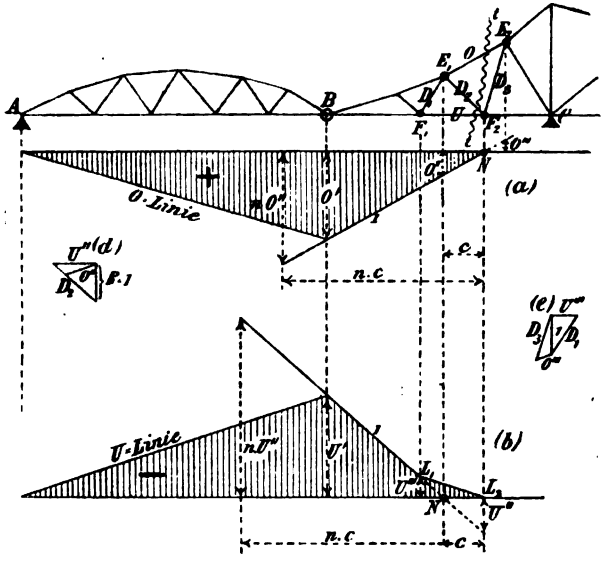


Fig. 339.

stäben, welche der zwischen den Querträgern F_1 und F_2 geführte Schnitt tt trifft, können in einfacher Weise durch die (mit Hilfe eines *Cremona*schen Planes zu ermittelnden) Spannkräfte O' und U' bestimmt werden, welche eine in B angreifende Last $P = 1$ hervorbringt (Fig. 332c). Ferner können sie mit Hilfe der Spannkräfte O'' und U'''

Digitized by Google

gezeichnet werden. Die Größe von O'' wird durch Zerlegung von $P = 1$ nach den Richtungen von O und D_2 gewonnen, diejenige von U'' durch Zerlegung von $P = 1$ nach den Richtungen von U und D_2 (Fig. 339d). Bei Anwendung der zweiten Bestimmungsart vermeidet man die Zeichenfehler, welche die Festlegung der Linien I durch kleine, den Nullpunkten N nahe Ordinaten leicht im Gefolge haben, wenn man in n-fachen Abständen von jenen Nullpunkten die durch Zerlegung einer Last $n \cdot 1$ gewonnenen Werte nO'' und nU'' aufträgt, wobei n eine beliebige gerade Zahl bedeutet.

Man kann auch die Gerade I in Fig. 339a mit Hilfe der dem Punkte E_2 entsprechenden (negativen) Ordinate O''' festlegen, deren Größe durch Zerlegung von $P = 1$ nach den Richtungen von O und D_3 erhalten wird, und schließlich läßt sich die Gerade I in Fig. 339b mittels der zu F_1 gehörigen Ordinate U''' bestimmen. Die Größe der letzteren ergibt sich, wenn die Last $P = 1$ nach den Richtungen der Stäbe U und D_1 zerlegt wird. Die Darstellung von O''' und U''' an Stelle von O'' und U'' wird nötig, sobald der Stab D_2 vertikal liegt.

b. Spannkräfte O und U in den Stäben des zwischen den Stützen liegenden Trägerteiles CD. Die Einflußlinien für die Spannkräfte O und U sind hier durch die Spannkräfte O', U' oder $O''U''$ bestimmt,

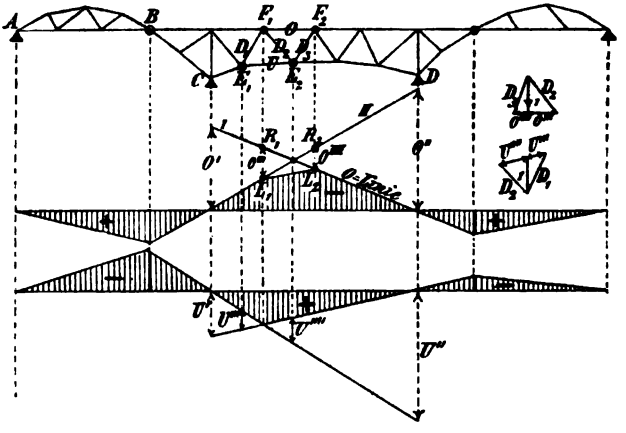


Fig. 340.

welche den in den Figuren 335 und 336 dargestellten Belastungsfällen entsprechen. Der Trägerteil zwischen den Stützen verhält sich wie ein einfacher Balken. In der Fig. 340 ist der Fall eines Balkens mit oben angreifender Belastung behandelt worden.

Indem wir auf die am Schluß von No. 175 durchgeführte Unter-

Digitized by Google

suchung der Eigenschaften der Einflußlinie für die Spannkraft D verweisen (Fig. 338), überlassen wir es dem Leser, selbst die folgenden Gesetze mittels ähnlicher Betrachtungen abzuleiten.

Die beiden durch die Werte O' und O'' bestimmten Geraden I und II schneiden auf der Senkrechten durch F_1 eine Spannkraft $\overline{R_1 L_1} = O'''$ ab, deren Größe durch Zerlegung der Last $P = 1$ nach den Richtungen der beiden im Punkte F_1 zusammentreffenden Stäbe O und D_2 erhalten wird, und die in der Figur 340 mit O'''', U''', U'''' bezeichneten Spannkräfte können der Reihe nach bestimmt werden durch Zerlegung von $P = 1$ nach den Richtungen O und D_3 beziehungsweise U und D_1, beziehungsweise U und D_2. Es leuchtet ein, daß im allgemeinen *einer* der vier Werte O', O'', O''', O'''' zur Bestimmung der O-Linie und *einer* der vier Werte U', U'', U''', U'''' zur Bestimmung der U-Linie ausreicht.*) Besser ist es jedoch, stets mehrere dieser Werte zu ermitteln, um die Zuverlässigkeit der Zeichnung prüfen zu können.

§ 41.

Kräfteplan für eine Eisenbahnbrücke mit Gerberschen Balken.

Zahlenbeispiel. Tafel 5.

Es ist der in der Fig. 341 (Tafel 5) dargestellte Hauptträger einer zweigleisigen Eisenbahnbrücke mit mehreren Öffnungen zu untersuchen. Die bewegliche Belastung bestehe aus einem Güterzuge mit 3 Lokomotiven, und die ständige Belastung sei $g = 1{,}74^t$ f. d. Meter.**)

*) Beim Fachwerke mit Vertikalen werden einige Werte O'', O'''', U'', U'''' gleich Null.

**) Wir wählen dieselbe Belastung wie in den auf den Tafeln 1, 3, 4 behandelten Zahlenbeispielen, um Ergebnisse früherer Rechnungen benutzen zu können. Hervorzuheben ist, daß bezüglich der Ausbildung der Auflager des Trägers zwei

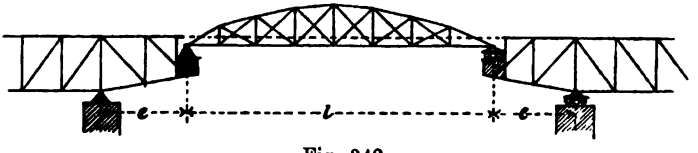


Fig. 342.

Fälle möglich sind. Erstens kann man, nach dem Vorschlage *Gerbers*, die Koppelträger gelenkartig mit den Auslegern verbinden, und zweitens kann man jeden schwebenden Teil auf die in der Fig. 342 dargestellte Art mit einem festen und

Digitized by Google

I. **Spannkräfte in den Gurtungen des Auslegers *BC*.** Wir wenden das *Zimmermann*sche Verfahren an, und bestimmen die Werte $M:\lambda$ teils durch Rechnung, teils durch Zeichnung.

1. Momente infolge der ständigen Belastung. Die Feldweite ist für den überragenden Teil: $\lambda = 3{,}0^{m}$. Der Knoten 1 (Fig. 343) wird daher belastet mit: $g\lambda = 1{,}74 \cdot 3 = 5{,}22^{t}$ und Knoten 0, welcher das

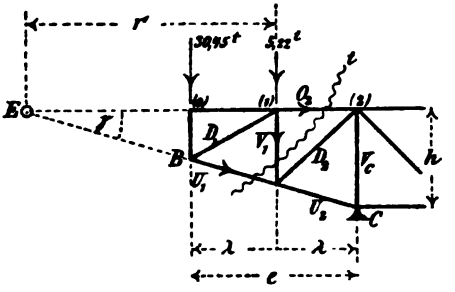


Fig. 343.

halbe Gewicht des 32^{m} langen schwebenden Teiles aufzunehmen hat, mit: $\frac{1}{2} \cdot 1{,}74 \cdot 32 + \frac{1}{2} \cdot 5{,}22 = 30{,}45^{t}$. Es ergibt sich daher

$$(1)\quad \begin{cases} M_{1g} = -30{,}45 \cdot \lambda \\ M_{2g} = -30{,}45 \cdot 2\lambda - 5{,}22\lambda = -66{,}12\lambda = \text{Stützenmoment } M_{Cg}. \end{cases}$$

2. Momente infolge der beweglichen Belastung. Es wurde für einen hinlänglich langen Eisenbahnzug in der Fig. 344 (Tafel 5) ein Seilpolygon gezeichnet und, um dieses Polygon auch zur Untersuchung der Paralleltträger CD und $C'D'$ bequem benutzen zu können, die Polweite gleich einem Vielfachen der Höhe jener Träger gewählt; sie ist: $H = 4 \cdot 3{,}6 = 14{,}4^{m}$. Nun wurde der Träger in die (rot eingezeichnete) Stellung I gegen den Eisenbahnzug gebracht und die dem Koppelträger entsprechende Schlußlinie s_1 eingetragen und nach rechts gehörig verlängert. Aus den auf den Senkrechten durch

---

einem beweglichen Auflagergelenke versehen. Im ersten Falle darf auf den Pfeilern nur *ein* festes Lager angeordnet werden; alle übrigen Lager müssen beweglich sein, während im zweiten Falle jeder der durch Pfeiler unterstützten Teile ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk erhält.

Welche der beiden Anordnungen vorliegt, ist für die Berechnung der durch senkrechte Lasten hervorgerufenen Spannkräfte und Stützenwiderstände gleichgültig.

Die letzte Anordnung findet sich bei der im Jahrgange 1877 der Zeitschrift für Bauwesen (Seite 41 u. ff.) beschriebenen *Warthe-Brücke bei Posen*, deren Hauptträger dem hier untersuchten Balken ähnlich sind.

Digitized by Google

Knoten 1 und Stütze C vom Seilpolygon und der Geraden s_1 abgeschnittenen Strecken y_1 und y_2*) ergab sich

$$M_{1p} = -Hy_1 \text{ und } M_{2p} = -Hy_2 = \textit{Stützenmoment } M_{Cp}.$$

Die ungünstigste Stellung des Trägers gegen den Lastenzug wurde durch Probieren bestimmt, wobei sich herausstellte, daß beide Momente bei ein und derselben Stellung ihre größten Werte annahmen.

Nach Division durch $\lambda = 3^m$ folgt

$$\frac{M_{1p}}{\lambda} = -y_1 \frac{H}{\lambda} = -y_1 \operatorname{cotg}\alpha \text{ und } \frac{M_{2p}}{\lambda} = -y_2 \operatorname{cotg}\alpha$$

wo $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{H}{\lambda}$. Man findet

$$(2) \qquad \frac{M_{1p}}{\lambda} = -92{,}1^t \text{ und } \frac{M_{2p}}{\lambda} = -192{,}0^{t}\text{**)}$$

und nach Hinzurechnung der Wirkung der ständigen Belastung

$$(3) \qquad \begin{cases} \frac{M_1}{\lambda} = -92{,}1 - 30{,}4 = -122{,}5^t \\ \frac{M_2}{\lambda} = -192{,}0 - 66{,}1 = -258{,}1^t. \end{cases}$$

Mittels dieser Werte sind in Fig. 345 (Tafel 5) die größten Spannkräfte U_1, U_2, O_2, und die gleichzeitig mit U_1 ihren größten Wert annehmende Spannkraft der ersten Diagonale nach dem *Zimmermann*schen Verfahren bestimmt worden, wobei die Verhältnisse $M:\lambda$ von den oberen Knotenpunkten aus abgetragen worden sind. Die Kräftepolygone wurden (der rot eingetragenen Trägerstellung I entsprechend) durch rote Schraffierung hervorgehoben und mit den Ziffern I versehen. Es ergab sich

$$U_1 = -142^t;\ U_2 = -225^t;\ O_2 = +136^t;\ D_1 = +159^t.$$

Wir wollen noch die rechnerische Bestimmung der von der veränderlichen Belastung erzeugten Momente M erläutern. Gesucht sei M_C für die in der Fig. 346 angegebene Laststellung. Der Druck B, welchen die beiden auf dem Koppelträger ruhenden Lokomotiven auf das Gelenk B ausüben, bestimmen wir nach dem auf Seite 145 entwickelten Verfahren mittels der Tabelle I (Seite 310), und erhalten (wegen $b_n = 2.0$; $\mathfrak{P}_n = 132^t$; $\mathfrak{S}_n = 1647{,}0^t$)

$$Bl' = 2{,}0 \cdot 132 + 1647{,}0 = 1911^{tm}.$$

Rechnen wir die in B angreifende Last mit zur Belastung des Teiles AB, so entsteht

$$B = \frac{1911 + 13\,(32 - 1{,}4)}{32} + 13 = 85{,}15^t$$

*) Wir unterließen es, die y mit dem Zeiger p zu versehen.

**) Diese Werte lassen sich auf die in der Fig. 344 angegebene Weise durch Zeichnung bestimmen, werden aber besser gerechnet, nachdem y gemessen worden ist.

Digitized by Google

und, wegen $\lambda = 3{,}0^m$,

$$M_C = -85{,}15 \cdot 2\lambda - 9 \cdot 0.6 - 13 \cdot 4{,}6 = -192{,}03\,\lambda.$$

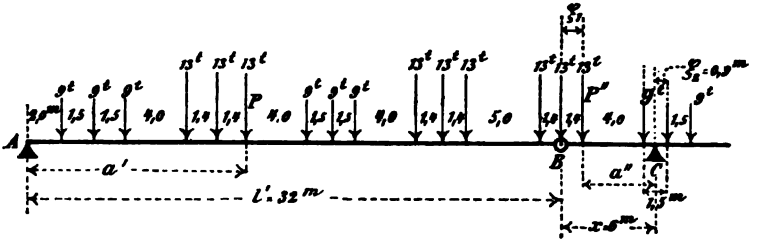


Fig. 346.

Bevor diese Rechnung ausgeführt wird, ist zu entscheiden, ob die angegebene Zugstellung auch am ungünstigsten wirkt. Bezeichnen wir zu diesem Zwecke jede zwischen A und B liegende Last mit P', jede Last zwischen B und C mit P'' und die Abstände dieser Lasten von A beziehungsweise dem Querschnitte C mit a' und a'', so ergibt sich: $Bl' = \Sigma P' a'$ und

$$M_C = -Bx - \Sigma P'' a'' = -\left[\frac{x}{l'}\Sigma P' a' + \Sigma P'' a''\right].$$

Wird der Zug um die unendlich klein gedachte Strecke ξ nach rechts verschoben, so geht a' über in $a' + \xi$ und a'' in $a'' - \xi$, und es ändert sich $(-M_C)$ um $\left(\frac{x}{l'}\Sigma P' - \Sigma P''\right)\xi$. Soll nun $(-M_C)$ infolge der Verschiebung abnehmen, so muß sein

$$\text{(I)} \qquad x\Sigma P' < l'\Sigma P''$$

und ebenso folgt, daß $(-M_C)$ infolge einer Verschiebung des Zuges nach links abnimmt, sobald

$$\text{(II)} \qquad x\Sigma P' > l'\Sigma P''.$$

Die beiden Ungleichungen müssen erfüllt werden, falls die angenommene Laststellung die gefährlichste sein soll. Dabei ist zu beachten, daß die in B ruhende Last zu den Lasten P' oder P'' zu rechnen ist, je nachdem der Zug nach links oder nach rechts verschoben wird. Im vorliegenden Falle erhält man infolge einer Verschiebung nach rechts: $\Sigma P' = 6 \cdot 9 + 7 \cdot 13 = 145^t$, $\Sigma P'' = 2 \cdot 13 + 9 = 35^t$ und (wegen $x = 6^m$ und $l' = 32^m$)

$$6 \cdot 145 < 32 \cdot 35$$

und infolge einer Verschiebung nach links: $\Sigma P' = 145 + 13 = 158^t$, $\Sigma P'' = 35 - 13 = 22^t$ und

$$6 \cdot 158 > 32 \cdot 22.$$

Es werden mithin beide Ungleichungen (I) und (II) befriedigt.

Im allgemeinen dürfte das zeichnerische Verfahren den Vorzug verdienen; denn man beachte wohl, daß die in obigen Ungleichungen gewonnenen Kennzeichen der ungünstigsten Zugstellungen an die Annahme unendlich kleiner Verschiebungen des Lastenzuges gebunden sind. Verschiebt man im vorliegenden Falle den Zug um $1{,}4^m$ nach links, so findet man zufällig eine andere

Digitized by Google

Stellung desselben, welche ebenfalls den Bedingungen *I* und *II* genügt. Die Summe $\Sigma P''$ hat hier nicht nur durch den Übertritt der vorher in *B* angreifenden 13^t, sondern auch durch das Hinzutreten einer Last 9^t eine Änderung erfahren. Nun begegnet es zwar keinerlei Schwierigkeiten, die infolge endlicher Verschiebungen entstehenden Änderungen der Summen $\Sigma P'a'$ und $\Sigma P''a''$ zu verfolgen und die Bedingungen *I* und *II* entsprechend zu ergänzen; das Kennzeichen der gefährlichsten Stellung wird aber dadurch wesentlich umständlicher, namentlich gegenüber der so bequemen versuchsweisen zeichnerischen Ermittelung der größten Momente. Wir wollen die Rechnung im vorliegenden Falle durchführen, wobei wir auf die Bezeichnungen ξ_1 und ξ_2 in Fig. 346 verweisen. Infolge einer Verschiebung des Zuges nach links um ξ_2 wächst $(-M_C)$ um $\left(\Sigma P'' - \frac{x}{l'}\Sigma P'\right)\xi_2$, wobei $\Sigma P' = 158^t$ und $\Sigma P'' = 22^t$. Dieser Wert ist negativ, weil, wie vorhin gezeigt, die Ungleichung II befriedigt wird. Infolge einer weiteren Verschiebung um $\xi_1 - \xi_2$ wächst $(-M_C)$, da zur $\Sigma P''$ die Last $P_0 = 9^t$ hinzutritt, während die $\Sigma P'$ ungeändert bleibt, um $\left(\Sigma P'' + P_0 - \frac{x}{l'}\Sigma P'\right)(\xi_1 - \xi_2)$. Im ganzen nimmt also $(-M_C)$ zu um

$$\left(\Sigma P'' - \frac{x}{l'}\Sigma P'\right)\xi_2 + \left(\Sigma P'' + P_0 - \frac{x}{l'}\Sigma P'\right)(\xi_1 - \xi_2)$$

$$= \left(\Sigma P'' - \frac{x}{l'}\Sigma P'\right)\xi_1 + P_0(\xi_1 - \xi_2) = \left(22 - \frac{6}{32}\cdot 158\right)1{,}4$$

$$+ 9(1{,}4 - 0{,}9) = -6{,}18^t.$$

Das Moment $(-M_C)$ wird also infolge der Verschiebung des Zuges um $\xi = 1{,}4^m$ verkleinert.

II. Spannkräfte in den Füllungsstäben V_1, D_2, V_C des Auslegers BC (Fig. 343). Bezeichnet man für irgend einen Belastungszustand mit M_E das auf den Schnittpunkt E der Gurtstäbe O_2 und U_1 als Drehpunkt bezogene Moment der links vom Schnitte tt angreifenden äußeren Kräfte und mit r den Abstand der Kraft V_1 von E, so ist

$$V_1 r + M_E = 0 \text{ und } V_1 = -\frac{M_E}{r}.$$

Dem größten Momente M_E entspricht mithin der größte Druck V_1. Nun geht aus der in No. 174 durchgeführten Untersuchung der Einflußlinie hervor, daß im Falle eines links von *B* gelegenen Drehpunktes in der (als linkssteigender Füllungsstab zu betrachtenden) Vertikale nur Druckspannungen entstehen, daß zur Erzielung von $_{min}V_1$ der Koppelträger AB und der Ausleger $B(1)$ voll zu belasten sind, und daß endlich die schwersten Lasten bei dem links vom Schnitte tt gelegenen Knoten (1) aufzustellen sind. Es wurde deshalb der Träger in die (in Fig. 344 blau eingezeichnete) Stellung *II* gegen den Lastenzug gebracht und nach Eintragung der dem Koppelträger entsprechenden Schlußlinie s_2 und der zum Felde 1—2 gehörigen Schlußlinie s die

Digitized by Google

Strecke η bestimmt, welche die Geraden s_2 und s auf der Senkrechten durch den Drehpunkt E abschneiden. Denkt man nämlich die am Koppelträger AB angreifenden Lasten auf die Auflager A und B verteilt, desgleichen die im Felde 1—2 ruhende Last auf die Knoten 1 und 2, so sind s_2 und s als die äußersten Seilpolygonseiten für die auf das Trägerstück $B1$ wirkenden äußeren Kräfte zu betrachten, und es folgt dann nach dem auf Seite 18 bewiesenen Gesetze: $M_E = + H\eta$, woraus sich schließlich $(-V_1)_p = \frac{H\eta}{r}$ ergibt. Dieser Wert ist in der Figur 348, in welcher $\overline{E(1)} = r$ und $\overline{ER} = H$ ist, dargestellt worden. Nach Bestimmung von ${}_{min}V_{p1}$ ergab sich (in Fig. 348) ${}_{max}D_{p2}$ durch Zerlegung von V_{p1} nach den Richtungen von U und D_2.*) Die von der ständigen Belastung herrührenden Spannkräfte V_{p1} und D_{p2} können nun mit Hilfe eines *Cremona*schen Planes oder nach dem *Zimmermann*schen Verfahren (mittels der bereits bekannten Werte $M_{p1} : \lambda$ und $M_{p2} : \lambda$) bestimmt werden. Auf Tafel 5 wurde dieser Weg nicht weiter verfolgt; dafür ist in der Fig. 345 die (nach der Ansicht des Verfassers zweckmäßigere**) Ermittelung von ${}_{max}D_2$ und ${}_{min}V_1$ aus den Werten $M_2 : \lambda$ und $M_1 : \lambda$ dargestellt worden, wobei die von der beweglichen Belastung abhängigen Teile dieser Werte mit Hilfe des Seilpolygons in Fig. 344 bestimmt wurden. Die Ergebnisse lauten

$$\frac{M_1}{\lambda} = \frac{M_{g1}}{\lambda} + \frac{M_{p1}}{\lambda} = -30{,}4 - \frac{Hy'}{\lambda} = -30{,}4 - 78{,}7 = -109{,}1^t;$$

$$\frac{M_2}{\lambda} = -66{,}1 - \frac{Hy''}{\lambda} = -66{,}1 - 184{,}3 = -250{,}4^t;$$

$${}_{max}D_2 = +118^t; \quad {}_{min}V_1 = -104{,}8^t.$$

Bislang wurde die gesamte ständige Belastung g an der oberen Gurtung angreifend gedacht. Zerlegt man g in $g_u = 0{,}45^t$ und $g_o = 1{,}74 - 0{,}45$, so kommt auf den unteren Knoten (1) die Last $g_u\lambda = 0{,}45 \cdot 3{,}0 = 1{,}35^t$, und es ergibt sich $V_1 = -104{,}8 + g_u\lambda = -103^t$.

Die Spannkraft V_C in der Vertikale über dem zweiten Mittelpfeiler C, Fig. 343 und 341, folgt aus der Gleichgewichtsbedingung für den Knotenpunkt C. Es muß sein (vergl. Fig. 349):

---

*) Es ist diese bequeme Bestimmung von ${}_{max}D_{p2}$ hier möglich, weil U_1 und U_2 dieselbe Richtung haben; im Gegenfalle müßte D_{p2} aus der für den Schnittpunkt von O_2 und U_2 aufgestellten *Ritter*schen Momentengleichung ermittelt werden.

**) Kleine Fehler bei Festlegung der vorhin benutzten Schlußlinie s können zu erheblichen Ungenauigkeiten Veranlassung geben.

Digitized by Google

$V_c + U_2 \sin\gamma + C - G_u = 0$, also $V_c = -C - U_2 \sin\gamma + G_u$, wobei $G_u = 0{,}45\,(3{,}0 + 3{,}6)\,\frac{1}{2} = 1{,}5^t$ die ständige Belastung des Knotens C bedeutet. Wegen $U_2 \cos\gamma = \frac{M_c}{h}$ (h = Höhe der fraglichen Vertikale) ergibt sich

$$(4) \quad V_c = -C - \frac{M_c}{h} \operatorname{tg}\gamma + G_u.$$

Hiernach erhält man die Einflußlinie für V_c, indem man zu den Ordinaten der C-Linie (d. i. die Einflußlinie für C) die mit $\frac{1}{h} \operatorname{tg}\gamma$ multiplizierten Ordinaten der M_c-Linie addiert. Der feste Wert G_u wird zunächst $= 0$ gesetzt. Fig. 350 zeigt die aus den Geraden I, II, III bestehende C-Linie und die aus den Geraden IV, V bestehende M_c-Linie; erstere besitzt bei C die Ordinate 1, letztere bei B die Ordinate e. Macht man also $\varepsilon = \operatorname{tg}\gamma \frac{e}{h}$, so stellt die in der Figur 350 schraffierte Fläche die Einflußfläche für die Spannkraft V_c dar.*) Aus dem Verlaufe der Einflußlinie folgt nun, daß die fragliche Vertikale den größten Druck ($_{min}V_c$) erleidet, sobald der Träger nur zwischen A und D belastet wird und die schwersten Lasten in

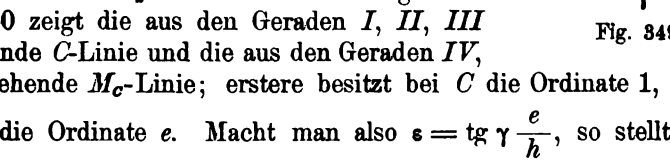


Fig. 349.

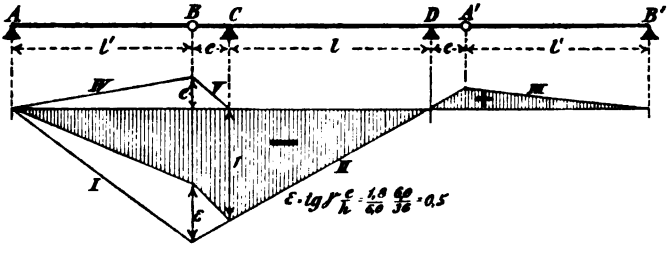


Fig. 350.

der Nähe von C liegen, während der kleinste Druck, bezw. der größte Zug ($_{max}V_c$) bei ausschließlicher Belastung des über die Stütze D

*) Ist auch das rechts an C grenzende Gurtstück geneigt (und zwar unter γ') so muß $\varepsilon = \frac{h}{e}(\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma')$ gemacht werden; Fig. 351.

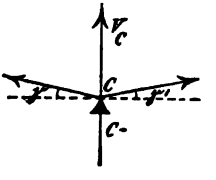


Fig. 351.

Digitized by Google

ragenden Trägerstückes DA' und des hieran grenzenden Koppelträgers $A'B'$ entsteht, wobei dann die schwersten Lasten in der Nähe von A' liegen müssen. Um zunächst ${}_{min}V_C$ zu bestimmen, wurde der Träger in die Stellung *III* (Fig. 344) gebracht, hierauf die dem schwebenden Teile AB entsprechende Schlußlinie s_3 eingezeichnet und die Gerade s'_3 gezogen, welche die beiden Punkte verbindet, in denen die Auflagersenkrechten D und C vom Seilpolygon und der Linie s_3 geschnitten werden. Zwei durch den Pol zu s_3 und s'_3 gelegte Parallelen schneiden auf dem Kräftezuge den dem angenommenen Belastungsfalle *III* entsprechenden Widerstand C_p ab, und durch die unter C gemessene Ordinate y ist der Wert $\frac{M_{C_p}}{\lambda} = -\frac{Hy}{\lambda}$ bestimmt. Man findet $C_p = 191{,}0^t$ und $M_{C_p} = -157{,}6 \cdot \lambda$.

Die ständige Belastung erzeugt

(5) $C_g = \frac{1}{2} gl' + ge + \frac{1}{2} gl = 1{,}74\,[\frac{1}{2}\,32 + 6 + \frac{1}{2}\,36] = 69{,}6^t$

und, nach Gleich. (1): $M_{C_g} = -66{,}1\,\lambda$.

Durch den Wert $\frac{M_C}{\lambda} = -157{,}6 - 66{,}1 = -223{,}7^t$ ist die Spannkraft U_3 bestimmt; sie wurde in Fig. 345 dargestellt, in welcher nach Auftragen von $\overline{a2} = 223{,}7^t$ erhalten wurde: Druck $U_3 =$ Strecke $\overline{ac}$. Nun konnte nach Berechnung von $C - G_n = 191{,}0 + 69{,}6 - 1{,}5 = 259^t$ das Kräftepolygon für den Knoten C (Fig. 347) gezeichnet werden. Dasselbe liefert: ${}_{min}V_C = -203^t$.*)

Um ${}_{max}V_C$ zu finden, setze man diejenige Laststellung voraus, welche das größte Moment M_D über der Stütze D hervorruft und vernachlässige die etwa links von der Stütze D wirkenden Lasten.**) Die Verkehrslast erzeugt nach Gleich. (3): $M_D = -258{,}1\,\lambda = -258{,}1 \cdot 3{,}0 = -774{,}3^{tm}$ und infolgedessen: ${}_{min}C_p = \frac{M_D}{l} = -\frac{774{,}3}{36} = -21{,}5^t$.

Nun ist die vorhin beschriebene Ermittelung von V_C durchzuführen mit Einführung der Werte

$${}_{min}C = {}_{min}C_p + C_g = -21{,}5 + 69{,}6 = 48{,}1^t$$

$$\text{und } \frac{M_C}{\lambda} = \frac{M_{C_g}}{\lambda} = -66{,}1^t.$$

Die betreffende Figur wurde auf Tafel 5 fortgelassen; sie ergab ${}_{max}V_C = -30^t$.

---

*) Die Rechnung führt im vorliegenden Falle ebenso schnell zum Ziele. Man findet (wegen $\lambda = 3{,}0^m$; $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1{,}8}{6{,}0}$ und $h = 3{,}6^m$) den Wert $V_C = -C + G_n - \frac{1}{4}\frac{M_C}{\lambda}$.

**) Wir erinnern an die Auseinandersetzungen in No. 99, Seite 168.

Digitized by Google

Um die Spannkraft in der Vertikale über dem ersten Mittelpfeiler (D') zu erhalten (vergl. Fig. 341), braucht die soeben gezeigte Berechnung von V_C nur unter der Voraussetzung wiederholt zu werden, daß in der Fig. 350 (Seite 345) das Trägerstück DB' fehlt. Der durch die ständige Last erzeugte Stützenwiderstand C folgt dann aus der Gleichung

$$(6) \quad C_g l = g \frac{(l+e)^2}{2} + g \frac{l'}{2} (l+e).$$

Man findet

$$C_g = g \frac{(l+e)}{2l} [l+e+l']$$

$$= 1{,}74 \frac{36+6}{2 \cdot 36} [36+6+32] = 75{,}1.$$

Bei derjenigen Stellung, welche $_{min}V$ hervorbringt, ergeben sich wieder die vorhin erhaltenen Werte: $C_g = 191{,}0^t$ und $\frac{M_C}{\lambda} = -223{,}7^t$, und es ändert sich deshalb (weil früher $C_g = 69{,}6^t$ betrug) der größte *Druck* V um $75{,}1 - 69{,}6 = 5{,}5^t$ (rund); er beträgt also $203 + 5{,}5 = 208{,}5^t$. Die fragliche Vertikale wird nur gedrückt. Ihre kleinste Inanspruchnahme ergibt sich, wenn nur die ständige Belastung vorhanden ist; um diese zu bestimmen, werden die vorhin beschriebenen Konstruktionen mit den Werten $C = C_g = 75{,}1^t$ und $M_C = M_{C_g} = -66{,}1\,\lambda$ durchgeführt. Man findet rund $V = -60^t$.

Eine übersichtliche Zusammenstellung der auf ganze Tonnen abgerundeten Spannkräfte des Auslegers BC zeigt die Figur 359. Für jede der Kräfte D_1, V_1, D_2, O_2, U_1, U_2 ist nur der größte Zahlenwert angegeben; die entsprechenden Stäbe werden entweder nur gedrückt oder nur gezogen. Will man die *zulässige* Inanspruchnahme eines Stabes von dem Verhältnis der kleinsten zur größten Spannkraft abhängig machen, so kann man die kleinsten Spannkräfte, welche entstehen, sobald nur die ständige Belastung auf das Trägerstück BC wirkt, leicht gesondert bestimmen, beispielsweise mit Hilfe eines *Cremona*schen Planes. Es empfiehlt sich dann aber, in den obigen Entwicklungen $g = 0$ anzunehmen, also den Einfluß der veränderlichen Belastung für sich allein zu ermitteln.

III. **Grenzwerte des Stützenwiderstandes C.** Der Stützendruck C nimmt den größten Wert an, sobald der Träger gegen den Lastenzug in die Stellung IV (Fig. 344) gebracht wird. Die Lasten links von D sind beseitigt zu denken. Es werden die Geraden s_4 und s'_4 eingetragen und zu ihnen durch den Pol die gleichbezeichneten Parallelen gelegt, welche letztere auf dem Kräftezuge den Widerstand $_{max}C_g = 193{,}7^t$ abschneiden. Die gefährlichste Laststellung ist durch Probieren gefunden worden. Wegen $C_g = 69{,}6$ folgt schließlich $_{max}C = 193{,}7 + 69{,}6 = 263^t$.

Für den kleinsten Stützenwiderstand wurde bereits vorhin der Wert $_{min}C = 48^t$ angegeben. Wäre $_{min}C$ negativ, so müßte das Auflager an dem Pfeiler verankert werden.

Digitized by Google

Der Druck auf den ersten Mittelpfeiler ist stets positiv. Sein größter Wert ist $193{,}7 + 80{,}0 = 373{,}7$ (s. Gleich. 6).

IV. Spannkräfte in den Gurtungen der Parallelträger. *a. Trägerteil mit zwei Auslegern (dritte Öffnung).* Um für irgend einen Belastungszustand das Moment M_m für den Knotenpunkt m zu bestimmen, denke man zunächst die Ausleger beseitigt, betrachte also das Trägerstück CD als einfachen Balken. Von dem unter dieser Voraussetzung für m erhaltenen Momente M_{0m} bringe man nun die dem Punkte m entsprechende Ordinate einer Geraden $C'D'$ in Abzug (Fig. 150, Seite 162), welche durch die negativen Stützenmomente: $\overline{CC'} = M_C$ und $\overline{DD'} = M_D$ bestimmt ist, und die wir in der Folge als *Schlußlinie* s bezeichnen wollen. Aus dem Momente M_m findet man für die Größe der Spannkraft des dem Knoten m gegenüberliegenden Gurtstabes den Wert: $\frac{M_m}{h}$. Sind die Momente mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmt worden, welchem die Polweite $H = \varepsilon h$ entspricht, wo ε eine beliebige Zahl bedeutet, so ergibt sich $\frac{M_m}{h} = \frac{Hy_m}{h} = \varepsilon y_m$.

Die größten und kleinsten Werte y_m sind nun für den vorliegenden Träger in der Fig. 352 dargestellt worden. Die rechte Hälfte enthält die Werte ${}_{max}y_m$, die linke Hälfte die ${}_{min}y_m$. Erstere entstehen, wenn das Trägerstück CD gänzlich belastet wird, während die Ausleger und die angrenzenden Koppelträger unbelastet bleiben. Die Stützenmomente M_C und M_D nehmen dann, nach der letzten der Gleichungen (1), die Werte an

$$M_{C_g} = M_{D_g} = -66{,}1 \cdot 3{,}0;$$

denselben entspricht, da die Polweite $= 4h = 4 \cdot 3{,}6^m$ ist,

$$y_{C_g} = y_{D_g} = -\frac{66{,}1 \cdot 3{,}0}{4 \cdot 3{,}6} = -13{,}8^t$$

und hierdurch ist die (wagerechte) Schlußlinie s_1 in Fig. 352 bestimmt. Die Ordinaten des M_0-Polygons stimmen mit denen des in der Fig. 130 auf Tafel 1 dargestellten Polygons der größten Momente eines einfachen Balkens überein; die Ermittelung derselben ist in No. 82 beschrieben worden.*) Es ergibt sich (wegen $\varepsilon = 4$):

*) Es ist also beispielsweise die Ordinate $\overline{22'}$ in Fig. 352 gleich der Ordinate y_2 in Fig. 130. Man achte auf die Verschiedenheit der Kräftemaßstäbe der Tafeln 1 und 5.

Digitized by Google

$\max y_0 = -13{,}8^t$		
$\max y_1 = +14{,}4^t$	$\min O_1 = -4 \cdot 14{,}4 = -58^t$*)	$\max U_1 = -4 \cdot 13{,}8 = -55^t$
$\max y_2 = +34{,}9^t$	$\min O_2 = -4 \cdot 34{,}9 = -140^t$	$\max U_2 = +58^t$
$\max y_3 = +49{,}9^t$	$\min O_3 = -4 \cdot 49{,}9 = -200^t$	$\max U_3 = +140^t$
$\max y_4 = +58{,}4^t$	$\min O_4 = -4 \cdot 58{,}4 = -234^t$	$\max U_4 = +200^t$
$\max y_5 = +61{,}9^t$	$\min O_5 = -4 \cdot 61{,}9 = -248^t$	$\max U_5 = +234^t$.

Wird der Träger links von C und rechts von D so belastet, daß die größten Momente M_C und M_D entstehen, während auf den Teil CD nur die ständige Belastung wirkt, so ergeben sich die in der linken Hälfte der Fig. 352 dargestellten größten negativen Werte y. An die Stelle des M_0-Polygon tritt das M_{0g}-Polygon, dessen Eckpunkte auf einer Parabel mit dem Pfeile $\frac{gl^2}{8H} = \frac{1{,}74 \cdot 36^2}{8 \cdot 4 \cdot 3{,}6} = 19{,}6^t$ liegen, und die Schlußlinie s_1 ist durch die um $\frac{M_{cp}}{H} = -y_c$ höher liegende s_2 zu ersetzen, wobei y_c mit dem in Figur 344 der Trägerstellung I entsprechenden y_2 übereinstimmt.

Man findet

$\min y_0 = -53{,}8^t$		
$\min y_1 = -46{,}7^t$	$\max O_1 = +4 \cdot 46{,}7 = +187^t$	$\min U_1 = -4 \cdot 53{,}8 = -215^t$
$\min y_2 = -41{,}3^t$	$\max O_2 = +4 \cdot 41{,}3 = +165^t$	$\min U_2 = -187^t$
$\min y_3 = -37{,}3^t$	$\max O_3 = +4 \cdot 37{,}3 = +149^t$	$\min U_3 = -165^t$
$\min y_4 = -34{,}9^t$	$\max O_4 = +4 \cdot 34{,}9 = +140^t$	$\min U_4 = -149^t$
$\min y_5 = -34{,}2^t$	$\max O_5 = +4 \cdot 34{,}2 = +137^t$	$\min U_5 = -140^t$

b. Trägerteil mit einem Ausleger (erste Öffnung). Wir bezeichnen wieder die linke Stütze mit C, die rechte mit D und nehmen den Träger zwischen C und D gänzlich belastet, rechts von D unbelastet an. Die Schlußlinie s_1 geht durch den linken Stützpunkt (Fig. 353a auf Tafel 5) und besitzt bei D die Ordinate $-13{,}8^t$. Das M_0-Polygon ist dasselbe wie in der Fig. 352.

Da der größte Wert y dem Knoten 5 entspricht, so sind bei der Berechnung der Spannkräfte in den Gurtungen links und rechts von 5 beziehungsweise links- und rechtssteigende Diagonalen vorauszusetzen. Man findet

$\max y_1 = +26{,}8^t$	$\min O_1 = -4 \cdot 26{,}8 = -107^t$	$U_1 = 0$
$\max y_2 = +45{,}9^t$	$\min O_2 = -4 \cdot 45{,}9 = -184^t$	$\max U_2 = +107^t$
$\max y_3 = +59{,}6^t$	$\min O_3 = -4 \cdot 59{,}6 = -238^t$	$\max U_3 = +184^t$
$\max y_4 = +66{,}7^t$	$\min O_4 = -4 \cdot 66{,}7 = -267^t$	$\max U_4 = +238^t$
$\max y_5 = +68{,}8^t$	$\min O_5 = -4 \cdot 68{,}8 = -275^t$	$\max U_5 = +267^t$
$\max y_6 = +63{,}9^t$	$\min O_6 = \min O_5 = -275^t$	$\max U_6 = +256^t$
$\max y_7 = +54{,}1^t$	$\min O_7 = -4 \cdot 63{,}9 = -256^t$	$\max U_7 = +216^t$
$\max y_8 = +37{,}7^t$	$\min O_8 = -4 \cdot 54{,}1 = -216^t$	$\max U_8 = +151^t$
$\max y_9 = +15{,}8^t$	$\min O_9 = -4 \cdot 37{,}7 = -151^t$	$\max U_9 = +63^t$
$\max y_{10} = -13{,}8^t$	$\min O_{10} = -4 \cdot 15{,}8 = -63^t$	$\max U_{10} = -4 \cdot 13{,}8 = -55^t$.

*) Die Multiplikationen mit 4 kann man umgehen, indem man in der Fig. 352 den Kräftemaßstab $1^{cm} = 30^t$ ändert in $1^{cm} = 4 \cdot 30 = 120^t$. Dann stellen die Ordinaten y die Kräfte O und U dar.

Digitized by Google

Um nun die Werte $_{min}y$ zu erhalten, ist der Träger rechts von D so zu belasten, daß das größte Stützenmoment M_D entsteht, während zwischen C und D nur ständige Belastung anzunehmen ist.

Man gelangt dann zu der Figur 353b und findet, da der größte (positive) Wert y dem Knoten 2 entspricht, daß bei der Berechnung

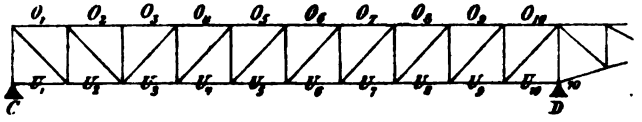


Fig. 354.

der Gurtkräfte der in der Figur 354 angegebene Spannungszustand der Diagonalen vorauszusetzen ist. Es ergibt sich:

$_{min}y_1 = +1{,}7^t$	$_{max}O_1 = -4 \cdot 1{,}7 = -7^t$	$U_1 = 0$
$_{min}y_2 = +1{,}8^t$	$_{max}O_2 = -4 \cdot 1{,}8 = -7^t$	$_{min}U_2 = +7^t$
$_{min}y_3 = +0{,}3^t$	$_{max}O_3 = {}_{max}O_2 = -7^t$	$_{min}U_3 = +1^t$
$_{min}y_4 = -2{,}7^t$	$_{max}O_4 = -4 \cdot 0{,}3 = -1^t$	$_{min}U_4 = -11^t$
$_{min}y_5 = -7{,}3^t$	$_{max}O_5 = +4 \cdot 2{,}7 = +11^t$	$_{min}U_5 = -29^t$
$_{min}y_6 = -13{,}5^t$	$_{max}O_6 = +4 \cdot 7{,}3 = +29^t$	$_{min}U_6 = -54^t$
$_{min}y_7 = -21{,}2^t$	$_{max}O_7 = +4 \cdot 13{,}5 = +54^t$	$_{min}U_7 = -85^t$
$_{min}y_8 = -30{,}5^t$	$_{max}O_8 = +4 \cdot 21{,}2 = +85^t$	$_{min}U_8 = -122^t$
$_{min}y_9 = -41{,}4^t$	$_{max}O_9 = +4 \cdot 30{,}5 = +122^t$	$_{min}U_9 = -166^t$
$_{min}y_{10} = -53{,}8^t$	$_{max}O_{10} = +4 \cdot 41{,}4 = +166^t$	$_{min}U_{10} = -4 \cdot 53{,}8 = -215^t$.

Eine Zusammenstellung der Spannkräfte O und U findet sich in der Fig. 359.

V. Spannkräfte in den Füllungsstäben der Parallelträger. *a. Trägerteil mit zwei Auslegern (dritte Öffnung).* Die Spannkräfte in den Füllungsstäben eines Parallelträgers lassen sich (nach § 36) schnell ermitteln, sobald die Querkräfte Q bekannt sind. Um $_{m}Q_{m}$ für das m^{te} Balkenfeld zu erhalten, belasten wir den Träger links von C so, daß das größte Moment M_C entsteht, und nehmen außerdem

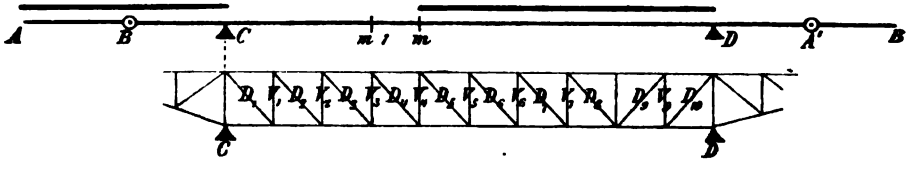


Fig. 355.

einen von D bis m reichenden Lastenzug an. Den Einfluß des letzteren bestimmen wir in bekannter Weise mit Hilfe des in No. 81 eingeführten

Digitized by Google

Seilpolygons, welches wir jetzt das C-Polygon nennen wollen; es ist in der Fig. 126 auf Tafel 1 für einen 36^m langen Balken gezeichnet worden.*) Die negativen Beitragsstrecken wurden aus den in No. 151 angeführten Gründen frei von jeder Verkehrslast gedacht; hingegen wurde, um nicht allzu ungünstig zu rechnen, davon abgesehen, den Lastenzug über m hinaus in das fragliche Feld vorzuschieben. Der Einfluß der auf der Strecke Dm liegenden Verkehrslast auf die Querkraft Q ist dann gleich der dem Punkte m entsprechenden Ordinate C_m des C-Polygons. Die Wirkung der übrigen Belastung wird wie folgt bestimmt. Man betrachtet CD zunächst als einfachen Balken und bestimmt die von der ständigen Belastung abhängigen Querkräfte auf die in No. 72 beschriebene Weise mit Hilfe einer Geraden, welche auf der linken und rechten Auflagersenkrechten beziehungsweise die Ordinaten: $+\frac{1}{2}gl = \frac{1}{2}\cdot 1{,}74\cdot 36 = +31{,}32^t$ und $-31{,}32^t$ abschneidet. Zu jedem der so gewonnenen Werte Q addiert man nun (nach Gleichung 2 auf Seite 162) den Betrag: $\frac{1}{l}(M_D - M_C)$. Hierbei ist zu setzen

$$M_D = M_{D_g} = -66{,}1\cdot 3{,}0 \text{ und } M_C = -258{,}15\cdot 3{,}0,^{**})$$

so daß sich ergibt

$$\frac{1}{l}(M_D - M_C) = \frac{3}{36}(258{,}15 - 66{,}1) = +16{,}0^t.$$

Die vorstehenden Erörterungen führen zu der in der Fig. 356 gegebenen Darstellung der Querkräfte ${}_{max}Q$. Es wurde nach Aufzeichnung des C-Polygons die Gerade $C'D'$ mittels der Strecken $\overline{CC'} = +31{,}32 + 16{,}00 = +47{,}3^t$ und $\overline{DD'} = -31{,}32 + 16{,}00 = -15{,}3^t$ bestimmt. Durch die den Feldmitten entsprechenden Punkte der Linie $C'D'$ wurden wagerechte Gerade gezogen und deren Ordinaten mit Berücksichtigung der Vorzeichen zu den den Knoten 1, 2, 3, ... entsprechenden Ordinaten der C-Linie addiert. Aus den Querkräften Q ergeben sich schließlich auf die im § 36 erläuterte Weise und mit Bezugnahme auf Fig. 355 die folgenden Spannkräfte D und V***);

---

*) In die Figuren 356—358 wurden nur die den Knotenpunkten entsprechenden Ordinaten dieser (früher als A-Polygon bezeichneten) Linie übertragen und zwar im Maßstabe $1^{cm} = 25^t$.

**) Siehe die Gleichungen (1) und (3) auf Seite 340 und 341, in welche $\lambda = 3{,}0^m$ einzusetzen ist.

***) Bei Berechnung der V ist das Glied $g_u\lambda = 0{,}45\cdot 3{,}6 = 1{,}6^t$ berücksichtigt worden. Wir erinnern noch daran, daß die Fahrbahn oben liegt.

Digitized by Google

$_{min}V_1 = -Q_1 + 1{,}6 = -124^t$ | $_{max}D_1 = +178^t$ | $_{max}V_9 = +Q_{10} + 1.6$
$_{min}V_2 = -Q_2 + 1{,}6 = -102^t$ | $_{max}D_2 = +146^t$ | $= -12{,}2 + 1{,}6 = -11^t$
$_{min}V_3 = -Q_3 + 1{,}6 = -82^t$ | $_{max}D_3 = +118^t$ | $_{min}D_9 = +5^t$
$_{min}V_4 = -Q_4 + 1{,}6 = -68^t$ | $_{max}D_4 = +91^t$ | $_{min}D_{10} = +17^t$.
$_{min}V_5 = -Q_5 + 1{,}6 = -46^t$ | $_{max}D_5 = +67^t$
$_{min}V_6 = -Q_6 + 1{,}6 = -30^t$ | $_{max}D_6 = +45^t$
$_{min}V_7 = -Q_7 + 1{,}6 = -17^t$ | $_{max}D_7 = +26^t$
$_{max}D_8 = +10^t$

Um die Querkräfte $_{min}Q$ zu erhalten, genügt es, der im vorliegenden Falle bestehenden Symmetrie wegen, das Spiegelbild der Fig. 356 zu betrachten und die Vorzeichen der Kräfte Q umzukehren. Man findet dann, daß in den sechs Mittelfeldern Gegendiagonalen nötig werden. Eine Zusammenstellung der Grenzwerte der Spannkräfte D und V zeigt die Figur 359; für die Vertikalen, an denen Gegendiagonalen angreifen, braucht nur der größte Druck (also $_{min}V$) angegeben zu werden.*)

b. Trägerteil mit einem Ausleger (erste Öffnung). Um zunächst die Kräfte $_{max}Q$ zu bestimmen, wurden in Fig. 357 zu den Ordinaten des C-Polygons die den Feldmitten entsprechenden Ordinaten einer Geraden $C'D'$ addiert, welche, wegen $M_C = 0$, auf den Senkrechten durch die Stützpunkte C und D die Strecken

$$\overline{CC'} = \frac{gl}{2} + \frac{M_D}{l} \text{ und } DD' = -\frac{gl}{2} + \frac{M_D}{l}$$

abschneidet. Rechts von D ist nur ständige Belastung anzunehmen, weshalb: $M_D = M_{D_g} = -66{,}1 \cdot 3{,}0$ zu setzen ist. Hiernach ergibt sich

$$\overline{CC'} = 31{,}32 - \frac{66{,}1 \cdot 3{,}0}{36} = +25{,}8^t$$

$$\text{und } \overline{DD'} = -31{,}32 - \frac{66{,}1 \cdot 3{,}0}{36} = -36{,}8^t$$

und nach Aufzeichnung des Kräfteplanes in Fig. 357

$_{min}V_1 = -Q_1 + 1{,}6 = -103^t$ | $_{max}D_1 = -O_1 \sec\varphi = +151^t$**)
$_{min}V_2 = -Q_2 + 1{,}6 = -80^t$ | $_{max}D_2 = +115^t$
$_{min}V_3 = -Q_3 + 1{,}6 = -60^t$ | $_{max}D_3 = +87^t$
$_{min}V_4 = -Q_4 + 1{,}6 = -41^t$ | $_{max}D_4 = +61^t$
$_{min}V_5 = -Q_5 + 1{,}6 = -25^t$ | $_{max}D_5 = +37^t$; $_{max}D_6 = +15^t$

$_{max}V_7 = +Q_8 + 1{,}6 = -14{,}7 + 1{,}6 = -13^t$ | $_{min}D_7 = +4^t$
$_{max}V_8 = +Q_9 + 1{,}6 = -23^t$ | $_{min}D_8 = +21^t$
$_{max}V_9 = +Q_{10} + 1{,}6 = -32^t$ | $_{min}D_9 = +35^t$
$_{min}D_{10} = +48^t$.

*) Macht man die zulässige Inanspruchnahme einer solchen Vertikale abhängig vom Verhältnis der Grenzwerte der Spannkräfte, so setze man $_{max}V = -g_o\lambda$.

**) Der größte Zug D_1 entsteht gleichzeitig mit dem größten Drucke O_1 und wurde in Fig. 357 fortgelassen.

Digitized by Google

Damit im m^{ten} Felde die Querkraft ${}_{min}Q_m$ entsteht, muß ein Eisenbahnzug von C aus bis $m-1$ vorgeschoben werden. Außerdem ist der Balken rechts von D so zu belasten, daß das Stützenmoment M_D seinen größten negativen Wert: $M_D = -258{,}15 \cdot 3{,}0$ annimmt. Der Einfluß des von C bis $m-1$ reichenden Lastenzuges auf Q_m ist gleich der dem Knoten $m-1$ entsprechenden Ordinate des D-Polygons (Spiegelbild des C-Polygons); der Einfluß der übrigen Belastung ist dargestellt durch die zur Feldmitte gehörige Ordinate einer Geraden $C'D'$ (Fig. 358), welche auf den Auflagersenkrechten die Strecken

$$\overline{CC'} = \frac{gl}{2} + \frac{M_D}{l} = 31{,}32 - \frac{258{,}15 \cdot 3{,}0}{36} = 31{,}32 - 21{,}51$$

$$= +\,9{,}8^t \text{ und } DD' = -\frac{gl}{2} + \frac{M_D}{l} = -31{,}32 - 21{,}51 = -52{,}8^t$$

abschneidet. Man findet

${}_{min}V_2 = Q_3 + 1{,}6 = -\ 11^t$	${}_{min}D_1 = +\ 9^t$
${}_{min}V_3 = Q_4 + 1{,}6 = -\ 23^t$	${}_{max}D_2 = +\ 3^{t}$**)
${}_{min}V_4 = Q_5 + 1{,}6 = -\ 36^t$	${}_{max}D_3 = +\ 17^t$
${}_{min}V_5 = Q_6 + 1{,}6 = -\ 51^t$	${}_{max}D_4 = +\ 34^t$
${}_{min}V_6 = Q_7 + 1{,}6 = -\ 68^t$	${}_{max}D_5 = +\ 53^t$
${}_{min}V_7 = Q_8 + 1{,}6 = -\ 87^t$	${}_{max}D_6 = +\ 75^t$
${}_{min}V_8 = Q_9 + 1{,}6 = -107^t$	${}_{max}D_7 = +\ 99^t$
${}_{min}V_9 = Q_{10} + 1{,}6 = -130^t$	${}_{max}D_8 = +126^t$
	${}_{max}D_9 = +154^t$
	${}_{max}D_{10} = +186^t$.

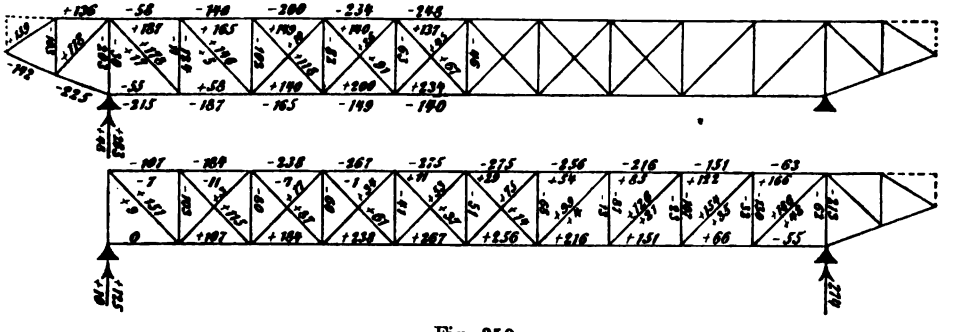


Fig. 359.

*) Dieser Wert D_2 entspricht selbstverständlich der rechtssteigenden Diagonale des zweiten Feldes und der vorhin angegebene Wert D_2 der linkssteigenden. Es erschien uns überflüssig, für die beiden Diagonalen eines Feldes verschiedene Bezeichnungen einzuführen, weil ein Blick auf die Figuren 357 und 358 jeden Zweifel beseitigt.

Digitized by Google

Für die Endvertikale ergeben sich, da der größte Stützenwiderstand $C_{max} = \overline{C'C''}$ (in Fig. 357) $= 125{,}3^t$ und der kleinste $C_{min} = \overline{CC'}$ (in Fig. 358) $= 9{,}8^t$ ist, die Spannkräfte

$$_{min}V_0 = -C_{max} + \tfrac{1}{2}g_u\lambda = -125{,}3 + 0{,}8 = -125^t,$$
$$_{max}V_0 = -C_{min} + \tfrac{1}{2}g_u\lambda = -\ 9{,}8 + 0{,}8 = -\ 9^t.$$

§ 42.

Gerberscher Fachwerkbalken mit Gelenkvierecken.

177. Einleitung. Wir gehen jetzt zur Untersuchung eines *Gerber*schen Balkens über, bei welchem an Stelle eines jeden der bislang vorausgesetzten *wirklichen* Mittelgelenke zwei Stäbe treten, deren Schnittpunkt (nach der in No. 141 gegebenen Erklärung) die Rolle des Gelenkes spielt. In der Fig. 360 ist ein Stück eines solchen Balkens dargestellt worden. Der Koppelträger *II* ist mit den angrenzenden gestützten Teilen *I* und *III* durch je zwei Stäbe verbunden. Die Achsen der Stäbe A_o und A_u schneiden sich im Punkte A,

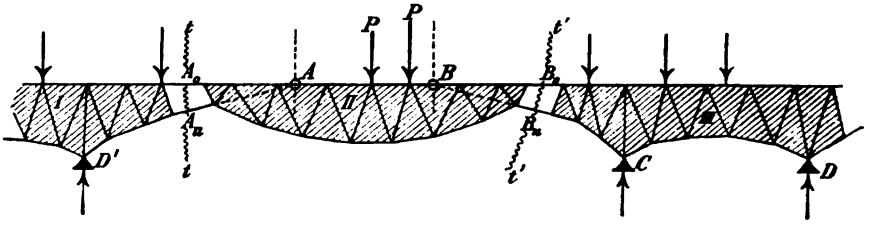


Fig. 360.

diejenigen der Stäbe B_o und B_u im Punkte B; dann sind A und B ***die Mittelgelenke der Öffnung D'C.***

Im folgenden soll nur die Wirkung senkrechter Lasten unter der Voraussetzung wagerechter Bahnen der beweglichen Auflager untersucht werden, und zwar mit Hilfe der Einflußlinien, welche hier am übersichtlichsten zum Ziele führen.

Zunächst bestimmen wir die am Koppelträger *II* in Fig. 360 angreifenden Kräfte. Gegeben sind die auf *II* wirkenden Lasten, gesucht die Spannkräfte A_o, A_u, B_o, B_u der gleichbezeichneten Stäbe. Die Mittelkraft A aus A_o und A_u geht durch das Gelenk A, die Mittelkraft B aus B_o und B_u durch das Gelenk B. Beide Mittelkräfte müssen senkrecht gerichtet sein, da ***sämtliche*** auf den hier betrachteten Gerberschen Balken (der nur *ein* festes Lager besitzt) wirkenden äußeren Kräfte senkrecht sind und mithin den äußeren Kräften links vom Schnitte tt (Fig. 360), sowie den äußeren Kräften rechts von $t't'$ nur durch senkrechte Kräfte A, beziehungsweise B das Gleichgewicht gehalten werden kann. Wir nehmen A und B positiv an, wenn sie auf den Koppelträger nach ***oben***, also auf die Ausleger nach *unten* wirken; beide Kräfte sind nur von den auf den Koppelträger wirkenden Lasten P abhängig. Man findet, mit den aus der Fig. 361 ersichtlichen Bezeichnungen, den Einfluß einer Last $P = 1$ mittels der auf die Punkte B und A bezogenen Momentengleichungen:

Digitized by Google

$$Al - Pb = 0 \text{ und } Bl - Pa = 0,$$

woraus

$$A = P\frac{b}{l} = 1\frac{b}{l} \text{ und } B = P\frac{a}{l} = 1\frac{a}{l}.$$

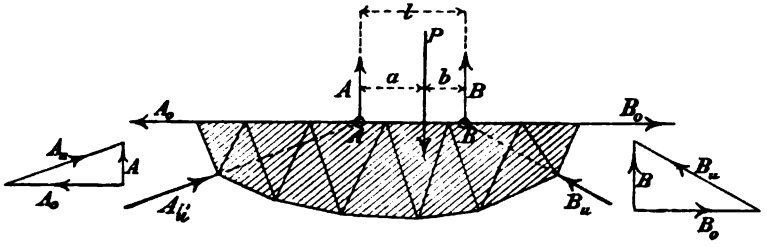


Fig. 361.

Liegt P rechts von B, so wird b negativ, befindet es sich links von A, so ändert a das Vorzeichen. Die Einflußlinien für A und B sind in den Figuren 363 u. 364 für zwei verschiedene gegenseitige Lagen der Gelenke A und B dargestellt worden. Die A-Linie besteht zwischen R_1 und T_1 aus einer Geraden, welche auf der Senkrechten durch A und B beziehungsweise die Ordinaten 1 und 0 abschneidet, und an welche sich links und rechts die den Feldern R_1R_2 und T_1T_2 entsprechenden Geraden schließen. Lasten, welche durch R_2 und T_2 gehen, entspricht $A = 0$. Ebenso wird die B-Linie bestimmt. In den Figuren 363 und 364 wurde die A-Fläche durch Schraffierung hervorgehoben. Aus den Grenzwerten der Kräfte A und B lassen sich die größten und kleinsten Spannkräfte in den Stäben A_o, A_u, B_o, B_u durch einfache Zerlegung von A und B ermitteln.

In den folgenden Untersuchungen, die sich auf das einfache Dreiecknetz beschränken, bezeichnen wir die Spannkräfte ganz allgemein mit S und deuten damit an, daß alle zur Bestimmung der Einflußlinien für diese Kräfte gegebenen Regeln sowohl für die Gurtstäbe als auch für die Füllungsstäbe gelten.

178. Um die Einflußlinien für die Spannkräfte in den Stäben eines Koppelträgers (bei dessen Betrachtung wir A und B zu den äußeren Kräften rechnen) zu bestimmen, denken wir uns diesen Trägerteil am rechten Ende festgehalten und ermitteln diejenigen Spannkräfte S', welche in den Stäben entstehen, sobald nur zwei Kräfte A_o und A_u angreifen, deren Mittelkraft $A = 1$ ist. In gleicher Weise bestimmen wir die Spannkräfte S'' für den am linken Ende festgehaltenen und mit $B = 1$ belasteten schwebenden Teil.

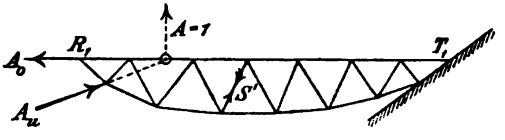


Fig. 362.

Liegt nun die über den Träger wandernde Last $P = 1$ rechts von dem Schnitte tt, welcher den Stab, für dessen Spannkraft S die Einflußlinie gesucht wird, und höchstens noch zwei andere Stäbe trifft, so greift links von tt nur die äußere Kraft A an, und es entsteht daher $S = AS'$, während eine links von tt sich befindende Last 1 für sich allein die Spannkraft

Digitized by Google

$S = BS''$ hervorruft. Sind F_1 und F_2 die Querträger links und rechts vom Schnitte tt (Fig. 363), so folgt:

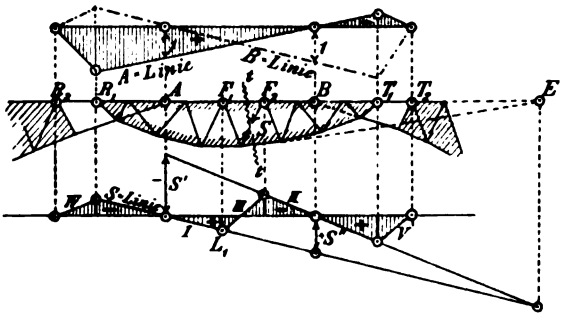


Fig. 363.

Die Ordinaten des $\frac{\text{rechts von } E_2}{\text{links von } F_1}$ *gelegenen Teiles der Einflußlinie für S (kurz: S-Linie) sind gleich den* $\frac{\text{mit } S'}{\text{mit } S''}$ *multiplizierten entsprechenden Ordinaten der* $\frac{A\text{-Linie}}{B\text{-Linie}}$.

Durch diesen Satz und durch die Werte S' und S'' ist die S-Linie eines jeden Stabes vollständig bestimmt; sie wurde in den Figuren 363 und 364 für eine linkssteigende Diagonale unter Voraussetzung verschiedener gegenseitiger Lagen der Gelenke A und B und des Schnittpunktes E der von tt getroffenen

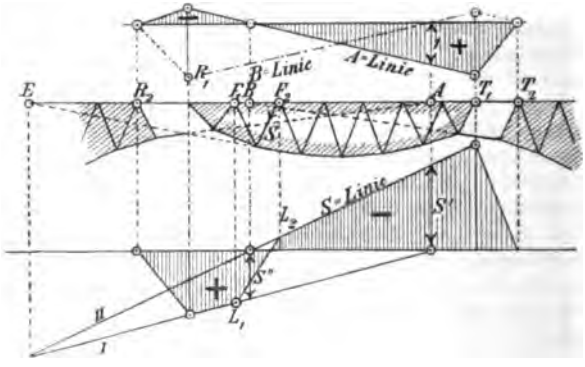


Fig. 364.

Gurtstäbe dargestellt. Die Belastung ist an der oberen Gurtung angreifend gedacht. Mit Hilfe der Werte S' und S'', deren erster im vorliegenden Falle positiv ist, während S'' einen Druck bedeutet, wurden die Geraden I und II festgelegt; erstere gilt zwischen F_1 und R_1, letztere zwischen F_2 und T_1. Den Feldern $\overline{R_2 R_1}$, $\overline{F_1 F_2}$, $\overline{T_1 T_2}$ entsprechen beziehungsweise die Geraden IV, III, V.

Digitized by Google

Wir weisen noch besonders auf die ähnlichen Untersuchungen in No. 148 und 175 hin, deren Ergebnisse auch im vorliegenden Falle zur Bestimmung der Geraden *I* und *II* verwendet werden können. Beispielsweise müssen sich *I* und *II* in einem Punkte der Senkrechten durch *E* treffen.

179. Einflußlinie für die Spannkraft *S* in einem Stabe eines Auslegers. Wir betrachten das über die Stütze *C* ragende Stück des Trägerteiles *CD* (Fig. 360), denken die Stäbe B_o und B_u durch zwei bis zum Gelenke *B* reichende Stäbe ersetzt (Fig. 365) und bestimmen hierauf diejenigen Spannkräfte *S'*, welche eine in *B* angreifende, abwärts gerichtete Last 1 in den Stäben des zu untersuchenden Trägerstückes hervorbringt. Nun gelangen wir zur Einflußlinie für die Spannkraft *S* in irgend einem Stabe durch die folgende einfache Überlegung:

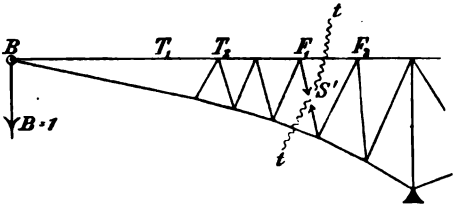


Fig. 365.

Der Einfluß einer Einzellast $P=1$, welche auf den in der Fig. 365 dargestellten Träger wirkt und links von dem Felde F_1F_2, durch das der Schnitt *tt* geht, angreift, ist durch die Ordinate einer Geraden (*I*) gegeben, welche bei *B* die Ordinate *S'* besitzt und deren Nullpunkt *N* senkrecht unter dem Schnittpunkte *E* der beiden Stäbe liegt, die außer dem fraglichen Stabe noch vom Schnitte *tt* getroffen werden. Diese Gerade darf für

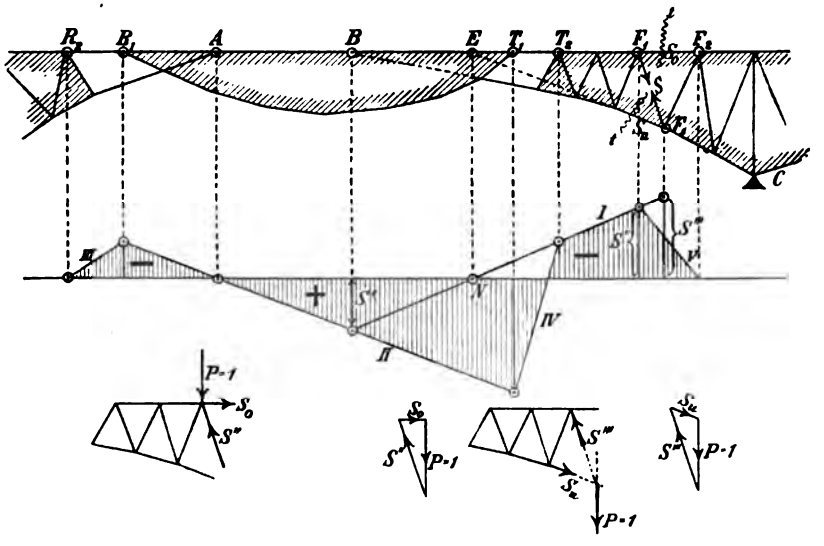


Fig. 366.

den Träger in Fig. 366 natürlich nur zwischen T_2 und F_1 benutzt werden. Ruht die über den Träger wandernde Lasteinheit auf dem anliegenden Koppel-

Digitized by Google

träger, so übt sie auf den Ausleger einen im Punkte B angreifenden Druck B aus und erzeugt die Spannkraft $S = B \cdot S'$. Die Ordinaten der links von T_1 gelegenen Teile II und III der gesuchten S-Linie sind also gleich den mit S' multiplizierten Ordinaten der B-Linie, während sich die den Feldern T_1T_2 und F_1F_2 entsprechenden Teile der S-Linie mit Hilfe des Satzes ergeben, daß jede Einflußlinie zwischen zwei benachbarten Querträgern eine Gerade ist. Der Nullpunkt von II entspricht dem Gelenke A.

In der Figur 366 ist die Einflußlinie für die Spannkraft in einer linksteigenden Diagonale dargestellt worden. Die Spannkraft S' ist im vorliegenden Falle positiv.

Es möge noch an die in No. 174 durchgeführten Untersuchungen erinnert werden. Danach kann die Einflußlinie in Fig. 366 auch durch die den Punkten F_1 und F_2 entsprechenden Ordinaten S'' und S''' der Geraden I festgelegt werden. Um S'' und S''' zu erhalten, zerlegt man eine in F_1 angreifend gedachte Last $P = 1$ nach den Richtungen von S und S_o, sodann eine in F_2 angreifende Last $P = 1$ nach den Richtungen von S und S_u. Auf welche Weise der Sinn von S'' und S''' bestimmt wird, ist durch die neben die Kräftedreiecke (deren Umfahrungssinn ein stetiger sein muß) gesetzten Figuren angedeutet worden.

180. Die Einflußlinie für die Spannkraft in irgend einem Stabe des zwischen den Stützen C und D gelegenen Trägerteiles (Fig. 367) ist nach Ermittelung der Spannkräfte S' und S'', welche beziehungsweise mit den in No. 143 eingeführten Spannkräften O', U', D' und O'', U'', D'' übereinstimmen, durch den Satz gegeben:

Die Ordinaten des $\frac{\text{rechts von } F_2}{\text{links von } F_1}$ *gelegenen Teiles der Einflußlinie für S sind gleich den* $\frac{\text{mit } S'}{\text{mit } S''}$ *multiplizierten entsprechenden Ordinaten der* $\frac{C\text{-Linie}}{D\text{-Linie}}$.

Dabei bedeuten, wie früher, F_1 und F_2 die links und rechts von dem Schnitte tt gelegenen Querträger. Die Einflußlinie für den Stützenwiderstand C (d. i. die C-Linie) ist zwischen den Querträgern T_2 und T'_2 eine Gerade (I), welche durch die Bedingungen bestimmt ist, daß einer senkrecht über C liegenden Last $P = 1$ der Wert $C = 1$ entspricht und einer senkrecht über D angreifenden der Wert $C = 0$. Es gibt aber diese Gerade auch den Einfluß einer auf dem linksseitigen Koppelträger ruhenden, durch das Gelenk B gehenden Last Eins an, weil diese Last auf den Ausleger T_2C (welchen man sich in der durch die Figur 365 veranschaulichten Weise bis B verlängert denken kann) einen Druck $B = 1$ ausübt. Da nun eine durch A gehende Last den Wert $B = 0$ erzeugt, so ist sie auch ohne Einfluß auf C, und hieraus und aus einer ähnlichen, den Einfluß von Lasten rechts von T'_2 betreffenden Überlegung ergibt sich die in der Fig. 367a dargestellte C-Linie. Sie besteht aus der Geraden I, den beiden Geraden II und III, welche beziehungsweise durch die Schnittpunkte der I mit den Senkrechten durch die Gelenke B und B' gehen, und deren Nullpunkte den Gelenken A und A' entsprechen, schließlich aus den Geraden IV, V, VI, VII, gehörig zu den Feldern $\overline{R_2R_1}$, $\overline{T_1T_2}$, $\overline{T'_2T'_1}$, $\overline{R'_2R'_1}$. In Fig. 367 wurden zu beiden Seiten der Öffnung CD verschiedene gegenseitige Lagen der Mittelgelenke A und B, A' und B' vorausgesetzt.

Digitized by Google

Ganz ebenso wird die (in der Fig. 367a strichpunktierte) Einflußlinie für den Stützenwiderstand D bestimmt, und nun unterliegt es keinerlei Schwierigkeit mehr,

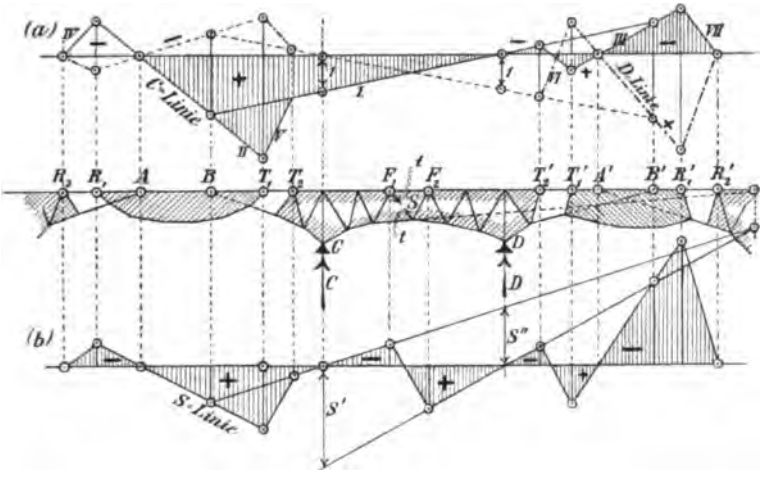


Fig. 367.

die Einflußlinie für die Spannkraft S in irgend einem Füllungsstabe mit Hilfe von S' und S'' aufzutragen. Fig. 367b enthält die Anwendung unseres Verfahrens auf die Ermittelung der Einflußlinie für die Spannkraft S in einer linkssteigenden Diagonale.

181. Es soll noch der in Fig. 368 dargestellte Fachwerkbalken untersucht werden, dessen gestützter Teil AG_1 drei Auflager A, B, C besitzt. Zwischen B und C liegt ein von senkrechten Füllungsstäben begrenztes Feld ohne Diagonale.

Um die ***Einflußlinie für den Stützenwiderstand C*** zu bestimmen, wird die über den Träger wandernde Last ***Eins*** zuerst irgendwo zwischen C und G_1 angenommen und die Summe der auf das Trägerstück CG_1 wirkenden senkrechten Kräfte gleich Null gesetzt. Da die Spannkraft S_o im Stabe S_o wagerecht ist, so ergibt sich $C = 1$, und hierdurch ist die in der Fig. 368a dargestellte C-Linie bestimmt. Lasten links von B sind ohne Einfluß auf den Widerstand C.

Die ***Einflußlinien für die Stützenwiderstände A und B*** sind in den Figuren 368b und c angegeben; die Gerade I der ersteren besitzt bei A die Ordinate 1, diejenige der letzteren bei B die Ordinate 1; in beiden Figuren sind die Geraden I und II einander parallel; denn so lange der Trägerteil AB nur zwischen A und B belastet ist, verhält er sich wie ein einfacher Balken; greift die Last ***Eins*** in G_1 an, so erzeugt sie:

$$S_o = +1\,\frac{e}{h} \quad \text{und} \quad A = -S_o\frac{h}{l} = -1\,\frac{e}{l},$$

$$\text{ferner } B = -A = +1\,\frac{e}{l}.$$

Um die ***Einflußlinie für die Spannkraft in irgend einem Stabe des Trägerstückes AB*** zu finden, betrachte man AB zuerst als einfachen Balken und verfahre

Digitized by Google

nach No. 143 Seite 269. Sodann beachte man, daß der Einfluß von Lasten, welche auf den Trägerteil rechts vom Schnitte tt wirken, ganz allgemein $= AS'$ ist, wo S'

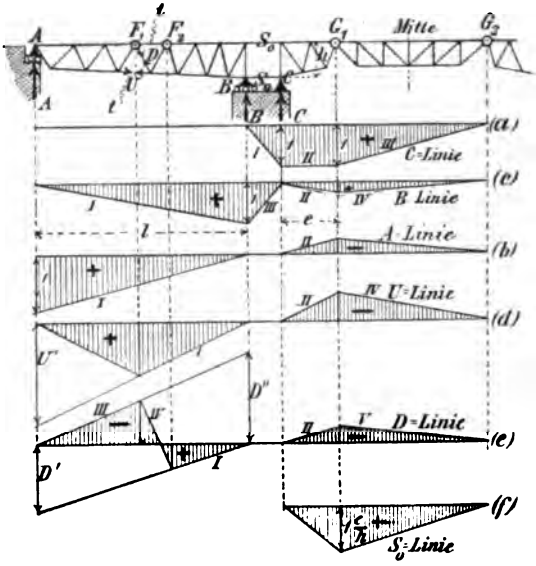


Fig. 368.

die Spannkraft für den in No. 143 erklärten *Zustand* $A = 1$ ist. In den Figuren 368d und e sind die Einflußlinien für eine Spannkraft U und eine Spannkraft D dargestellt worden. Die links von B gelegenen Teile dieser Linien sind durch die Werte U', D', D'' bestimmt, und die Teile rechts von B durch die Bedingung, daß in beiden Figuren die Gerade II der Geraden I parallel sein muß.

Die Spannkräfte in den wagerechten Gurtstäben des Feldes BC sind für jeden Belastungszustand entgegengesetzt gleich ($S_u = -S_o$); die Einflußlinie für S_o (Fig. 368f) ist durch die dem Mittelgelenke G_1 entsprechende Ordinate $1 \frac{e}{h}$ bestimmt.

Fig. 368 gibt im wesentlichen die Anordnung der Hauptträger der neuen Eisenbahnbrücke an, welche den *Niagara* in kurzer Entfernung unterhalb der berühmten Fälle überspannt und im Dezember 1883 dem Verkehr übergeben wurde.*) Eigentümlich ist bei dieser Brücke auch die Anordnung der Füllungsstäbe. Fig. 369 zeigt den überragenden und den angrenzenden schwebenden Teil. Die Diagonalen 3, 4, 5, 6, 7 gehen durch je zwei Felder, die erste derselben vereinigt sich jedoch mit der einfeldrigen Diagonale 2 in der Nähe des unteren Knotens F zu *einem* Stabe 1, und infolgedessen ist der Träger auch

*) Eine ausführliche Beschreibung dieser vom Ober-Ingenieur *C. C. Schneider* in *Newyork* entworfenen Brücke findet sich in der *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, 1881, S. 385.

Digitized by Google

innerlich statisch bestimmt. Um beispielsweise die Spannkräfte D_1, D_2, . . . D_8 im Stabe 1 und in den Diagonalen 2, 3, ... 8 zu finden, führe man zuerst

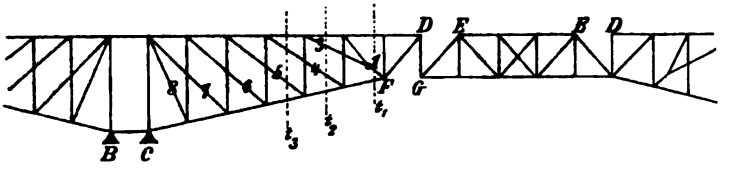


Fig. 369.

den Schnitt t_1, bestimme D_1 nach dem *Ritter*schen Verfahren, hierauf D_2 und D_3, welche mit D_1 im Gleichgewichte sein müssen, und führe nun die Schnitte t_2, t_3, . . ., um der Reihe nach mittels Ritterscher Momentengleichungen die Spannkräfte D_4, D_5, ... zu erhalten. Wir werden uns im letzten Abschnitte dieses Bandes noch eingehender mit derartigen Fachwerken beschäftigen.

Hinzuzufügen ist, daß bei der Niagarabrücke die Knoten E und D, desgleichen G und F durch Stäbe miteinander verbunden wurden, deren Befestigungsbolzen jedoch bei E und G durch länglich geformte Löcher greifen. Es ist deshalb an diesen Stellen eine Verschiebung der Stabenden möglich, und der Koppelträger verhält sich wie ein einfacher Balken.

§ 43.

Gerberscher Balken mit Hängegurtung.

182. Fig. 370 stellt einen in neuerer Zeit öfter ausgeführten Gerberschen Balken mit Hängegurtung dar. Die gestrichelten Gurtstäbe sind an dem einen Ende durch Bolzen, welche durch längliche Löcher gesteckt sind, befestigt; sie sind wirkungslos und werden nur mit Rücksicht auf das bessere Aussehen des Trägers angeordnet. Führt man durch das erste Feld rechts von der Mittelstütze einen Schnitt, so kann man die Spannkraft S'_1 in dem obersten Kettengliede aus der Momentengleichung für den Stützpunkt B bestimmen. Zerlegt man S'_1 nach wagerechter und senkrechter Richtung (Fig. 371), so findet man für den Einfluß einer am Ausleger BG_1 angreifenden Last P auf die wagerechte Seitenkraft H den Wert

$$H = P\frac{\xi'}{f}.$$

Die Einflußfläche für H ist demnach ein Dreieck (Fig. 370a) von der Höhe $1\frac{l'}{f}$. Sind Ausleger und Koppelträger unbelastet, so ist $H = 0$. Lasten, welche auf das Trägerstück AB wirken, üben also keinen Einfluß auf H aus. Nach Ermittelung von H_{max} findet man die Spann-

Digitized by Google

kräfte S und S' in der Hängegurtung nach Fig. 370b aus der Bedingung, daß die wagerechten Projektionen dieser Kräfte sämtlich

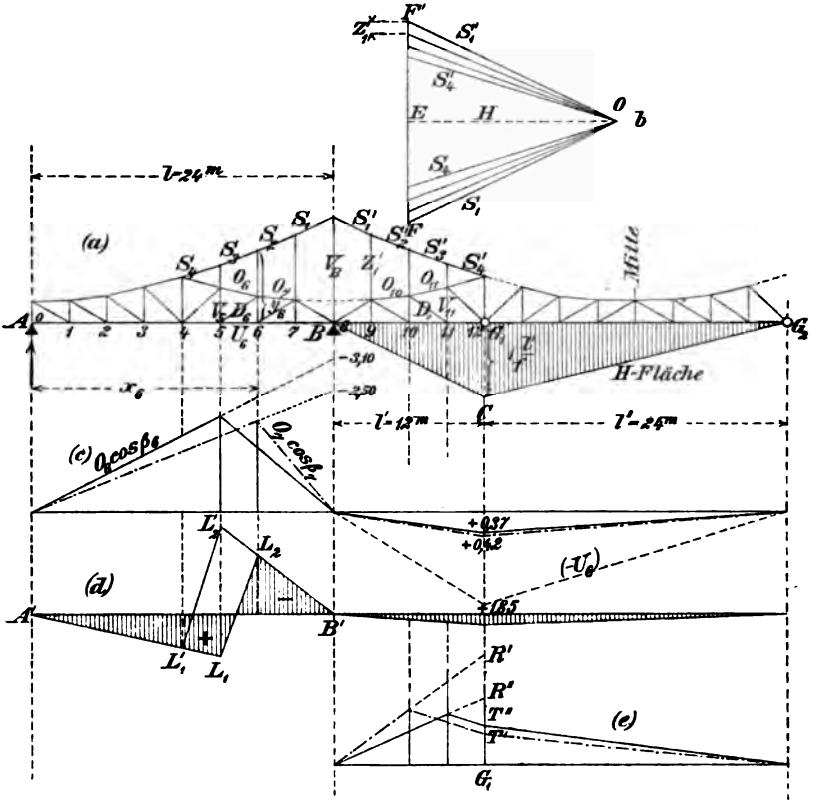


Fig. 370.

gleich H sind. Die Strecken, welche die S' und S auf der Vertikalen $F'F$ abschneiden, stellen die Spannkräfte Z in den Hängestangen dar und die Strecke $F'F$ den Druck in der Vertikalen V_B.

Die Einflußlinien für die Spannkräfte O, U, D und V der gegliederten Scheibe AB verlaufen zwischen A und B genau wie beim einfachen Balken; zwischen B und G_2 aber ist jede Einflußfläche ein Dreieck, dessen Spitze in der Senkrechten durch G_1 liegt und das durch den Einfluß einer in G_1 angreifenden Last 1 bestimmt ist. Zu den in No. 143 benutzten Kräfteplänen für die Zustände $A = 1$ und $B = 1$ tritt noch ein dritter über den Träger-Teil ABG_1 auszudehnender Kräfteplan, für dessen Herstellung die folgende kurze An-

Digitized by Google

weisung genügt. Die in G_1 angreifende Last 1 erzeugt am Auflager A den Widerstand $A = -1\frac{l'}{l}$ und in der Hängegurtung den Horizontalzug $H = 1\frac{l'}{f}$, ein Wert, der auch durch Zerlegung der Last 1

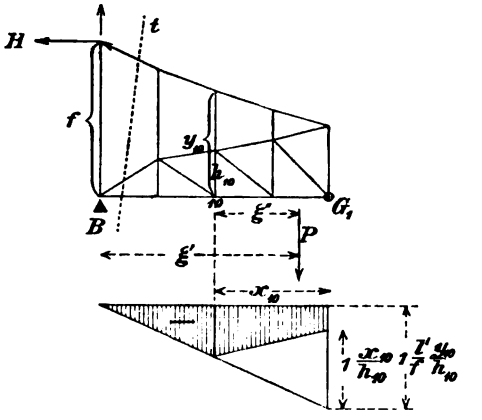


Fig. 371.

nach den Richtungen der in Fig. 371 vom Schnitte t getroffenen drei Stäbe zeichnerisch dargestellt werden kann. Nun lassen sich nach Fig. 370b die Spannkräfte in den Kettenstäben und den Hängestäben ermitteln, und damit sind alle an den Dreiecknetzen AB und BG_1 angreifenden Kräfte bestimmt. Für die Dreiecknetze werden Cremonasche Kräftepläne gezeichnet.

Sehr schnell führt auch das folgende rechnerische Verfahren, das durch ein Zahlenbeispiel erläutert werden möge, zum Ziele. Es sei $l = 24^m$, $l' = 12^m$, $l'' = 24^m$, λ (Feldweite) $= 3^m$. Die Höhen der Dreiecknetze seien in den Punkten

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$h =$	2,0	2,1	2,4	2,9	3,6	2,9	2,4	2,1	2,0	2,1	2,4	2,9	3,6^m

und die von der Geraden ABG_1 aus gemessenen Ordinaten der Hängegurtung in den Punkten

	5	6	7	8	9	10	11
$y =$	4,5	5,6	6,9	8,4	6,9	5,6	4,5^m.

Gesucht sei zunächst die Einflußlinie für $O_7 \cos \beta_7$, wo β_7 den Neigungswinkel von O_7 gegen die Wagerechte bedeutet. Da

$$O_7 \cos \beta_7 = -\frac{M_6}{h_6}$$

Digitized by Google

ist, so erzeugt $B = 1$ die Spannkraft

$$O_7 \cos \beta_7 = -1 \frac{2 \cdot 3{,}0}{2{,}4} = -250'$$

und durch diesen Wert ist die strichpunktierte Einflußlinie (Fig. 370c) für $O_7 \cos \beta_7$ im Gebiete AB bestimmt. Die ausgezogene Linie gehört zu $O_6 \cos \beta_6$; sie ist festgelegt durch $-1 \frac{3 \cdot 3{,}0}{2{,}9} = -3{,}10$. Nun erzeugt eine in G_1 angreifende Last 1:

$$A = -0{,}5, \quad H = 1 \frac{12}{8{,}4} = \frac{10}{7}$$

$$O_7 \cos \beta_7 = -\frac{M_6}{h_6} = -\frac{A x_6 + H y_6}{h_6} = \frac{0{,}5 \cdot 18 - \frac{10}{7} \cdot 5{,}6}{2{,}4} = +0{,}42$$

$$O_6 \cos \beta_6 = -\frac{M_5}{h_5} = -\frac{A x_5 + H y_5}{h_5} = \frac{0{,}5 \cdot 15 - \frac{10}{7} \cdot 4{,}5}{2{,}9} = +0{,}37$$

und durch diese beiden, an der Stelle G_1 aufzutragenden Werte sind die Einflußlinien für das Gebiet BG_2 bestimmt.

Führt man nun einen Schnitt durch die Stäbe S_2, O_7, V_6 und U_6, und setzt man die Summe der am abgeschnittenen Fachwerksteile angreifenden wagerechten Kräfte gleich Null, so erhält man

$$U_6 + O_7 \cos \beta_7 + H = 0$$

und hieraus folgt

$$-U_6 = O_7 \cos \beta_7 + H.$$

Die Einflußlinie für $(-U_6)$ stimmt also zwischen A und B mit der Einflußlinie für $O_7 \cos \beta_7$ überein, weil Lasten, die am Trägerstück AB angreifen, in den Kettenstäben keine Beanspruchungen erzeugen. Liegt die Last 1 in G_1, so erzeugt sie $H = \frac{10}{7} = 1{,}43$ und $-U_6 = +0{,}42$ $+1{,}43 = 1{,}85$ und durch diesen Wert ist der zur Trägerstrecke BG_2 gehörige, in Fig. 370c gestrichelte Teil der $(-U_6)$-Linie bestimmt.

Bedeutet φ_6 den Neigungswinkel der Diagonale D_6, so muß sein

$$D_6 \cos \varphi_6 = O_7 \cos \beta_7 - O_6 \cos \beta_6.$$

Der Unterschied der für $O_7 \cos \beta_7$ und $O_6 \cos \beta_6$ gezeichneten Einflußflächen ist also gleich der Einflußfläche für $D_6 \cos \varphi_6$. Diese Fläche wurde in Fig. 370d — im doppelten Maßstabe — auf eine wagerechte Nulllinie zurückgeführt.

Jetzt läßt sich auch sofort die Einflußfläche für den Wert $(-V_5 \operatorname{cotg} \varphi_6)$ angeben. Solange nämlich der Knotenpunkt unbelastet ist, muß

$$V_5 = -D_6 \sin \varphi_6,$$

Digitized by Google

also

$$-V_5 \operatorname{cotg} \varphi_6 = D_6 \cos \varphi_6$$

sein; und da ferner die V_5-Linie von Stütze B bis Knotenpunkt 5 geradlinig verlaufen muß, und im Felde 4—5 ihren Nullpunkt besitzt, so braucht man, um aus der $D_6 \cos \varphi_6$-Linie die $(-V_5 \operatorname{cotg} \varphi_6)$-Linie zu erhalten, nur die Gerade $L_1 L_2$ durch die Gerade $L'_1 L'_2$ zu ersetzen.

In derselben Weise wird bei der Untersuchung des Auslegers verfahren; es genügt auch hier die Berechnung der $O \cos \beta$-Linien. Eine zwischen G_1 und Knoten 10 liegende Last $P = 1$ (Fig. 371) erzeugt

$$O_{10} \cos \beta_{10} = -\frac{M_{10}}{h_{10}} = -\left(\frac{Hy_{10}}{h_{10}} = 1\,\frac{\xi''}{h_{10}}\right)$$

und aus dieser Gleichung folgt, daß die in Fig. 371 schraffierte Fläche den zum Gebiete BG_1 gehörenden Teil der Einflußfläche für $O_{10} \cos \beta_{10}$ darstellt; sie ist bestimmt durch die Strecken

$$1\,\frac{l'}{f}\,\frac{y_{10}}{h_{10}} \quad \text{und} \quad 1\,\frac{x_{10}}{h_{10}} \quad \text{für} \quad \xi'' = x_{10}.$$

In Fig. 370e sind die Einflußlinien für $O_{10} \cos \beta_{10}$ und $O_{11} \cos \beta_{11}$ in $\frac{2}{3}$ des der Fig. 370c zu Grunde gelegten Maßstabes aufgetragen worden; sie sind bestimmt durch die Strecken

$$\overline{G_1 R'} = \frac{10}{7} \cdot \frac{5{,}6}{2{,}4} = 3{,}33, \qquad \overline{G_1 R''} = \frac{10}{7} \cdot \frac{4{,}5}{2{,}9} = 2{,}22$$

$$\overline{R' T'} = \frac{6{,}0}{2{,}4} = 2{,}50, \qquad \overline{R'' T''} = \frac{3{,}0}{2{,}9} = 1{,}03.$$

Der Unterschied beider Flächen ist Einflußfläche für $D_{11} \cos \varphi_{11}$, aus welcher sich die V_{11}-Fläche mittels Ziehen einer Geraden ableiten läßt.

Hinsichtlich der aus der Form der Einflußlinien für die kürzeste Berechnung der größten und kleinsten Spannkräfte zu ziehenden Schlüsse verweisen wir auf die früheren Untersuchungen. Vergl. namentlich § 19, Seite 157.

Digitized by Google

XI. Abschnitt.

Der Fachwerkbogen mit drei Gelenken.

§ 44.

Anwendung der Verfahren von Culmann und Ritter.

Wir setzen voraus, daß die beiden gegliederten Scheiben, aus denen der Fachwerkbogen mit drei Gelenken besteht, einfache Dreiecknetze sind und erläutern zunächst die

183. Anwendung der Ritterschen Momentengleichungen. Auf den Bogen mögen beliebig gerichtete Lasten wirken. Die von ihnen

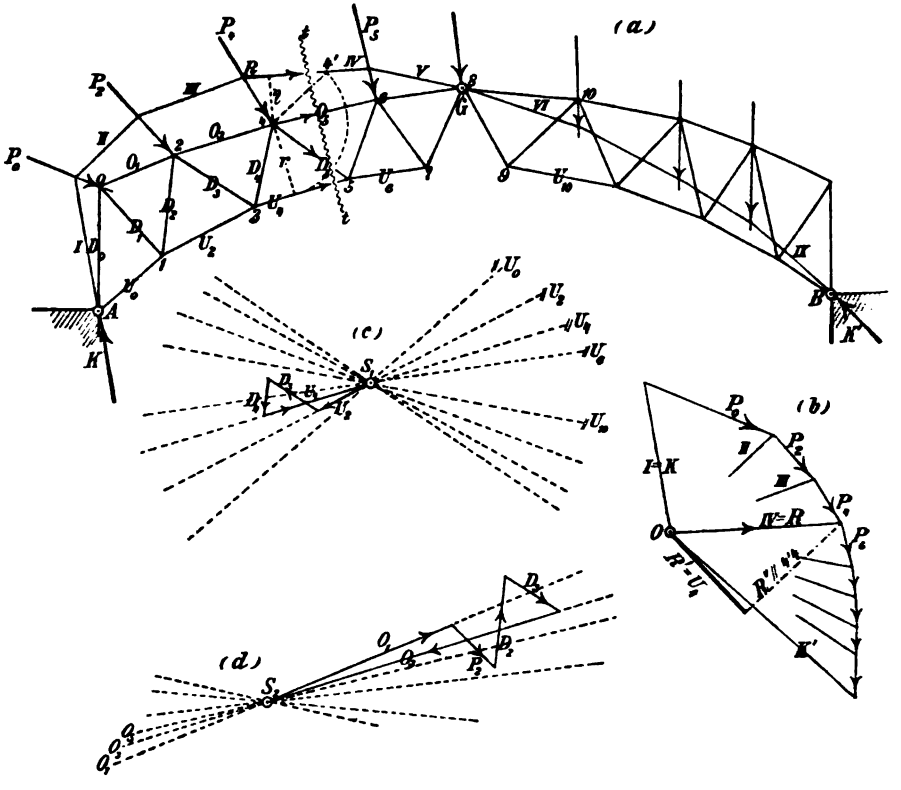


Fig. 372.

hervorgerufenen Stützenwiderstände seien bekannt; auch sei ein durch die drei Gelenke *A*, *G*, *B* gehendes Seilpolygon *I II III* . . .

Digitized by Google

der äußeren Kräfte gegeben*). Gesucht sei die Spannkraft U_4 in Fig. 372.

Durch die Stäbe U_4, D_5, O_5 wird ein Schnitt tt geführt; er trifft die Seilpolygonseite IV, welche die Lage der Mittelkraft R der links von tt wirkenden äußeren Kräfte bestimmt, während der entsprechende Seilstrahl $\overline{IV} = R$ die Größe und den Sinn dieser Kraft angibt. Bezeichnen η und r die auf den Knotenpunkt 4 als Drehpunkt bezogenen Hebelarme von R und U_4, so lautet die Momentengleichung $R\eta - U_4 r = 0$, und es folgt der leicht durch Zeichnung zu bestimmende Ausdruck $U_4 = \frac{R\eta}{r}$.

Ein anderer Weg ist der folgende: Ist $\eta < r$, so beschreibe man um den Drehpunkt 4 mit r einen Kreisbogen, bestimme dessen Schnittpunkt 4′ mit der Seilpolygonseite IV und zerlege R in zwei im Punkte 4′ angreifende Seitenkräfte R' und R'', deren erste senkrecht auf der Geraden 4′4 steht, während R'' mit dieser Geraden zusammenfällt. Die Momentengleichung geht dann über in $R'r - U_4 r = 0$ und liefert $U_4 = R'$. Ist $\eta > r$, so zerlege man R in einem beliebigen Punkte seiner Richtung in eine durch 4 gehende Seitenkraft R'' und eine zweite, welche den um 4 mit r beschriebenen Kreisbogen berührt. Fig. 373. Man findet dann wieder $U_4 = R'$.

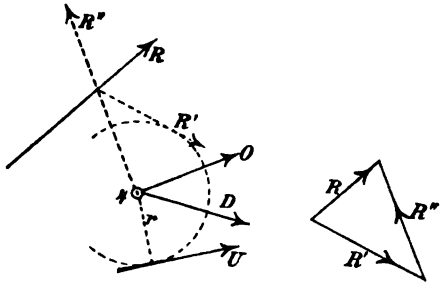


Fig. 373.

In gleicher Weise werden die Kräfte O gefunden. Zur Ermittelung der Spannkräfte D in den Füllungsstäben ist indes das vorstehend beschriebene Verfahren, wegen der in der Regel unbequem gelegenen Drehpunkte, selten geeignet, und es empfiehlt sich deshalb, die D den Kräftepolygonen zu entnehmen, welche sich für die Knoten der unteren oder oberen Gurtung übersichtlich aufzeichnen lassen, sobald die Spannkräfte U oder O gegeben sind. Das Verfahren ist in den Figuren 372c und d dargestellt worden; die dort von Parallelen zu den Gurtstäben O und U gebildeten Strahlenbüschel S_1 und S_2 lassen sich für alle zu untersuchenden Belastungsfälle verwenden. Es genügt natürlich, die eine der beiden Figuren zu zeichnen; entwirft man aber beide, so erhält

*) Vergl. No. 116, 117, 158.

Digitized by Google

man jede Kraft D zweimal und ist dann im stande, durch Vergleichung der Ergebnisse, die Güte der Zeichnung zu prüfen*).

Das beschriebene Verfahren kann u. a. zur Ermittelung der in einem Dachbinder durch den Winddruck und die ständige Belastung hervorgerufenen Spannkräfte empfohlen werden und ist dann häufig der Anwendung eines *Cremona*schen Kräfteplanes (§ 27) vorzuziehen; denn bei Fachwerken mit größerer Stabzahl pflanzen sich bei der letzteren Bestimmungsweise die Zeichenfehler zuweilen in recht unliebsamer Weise fort, und es ist zum mindesten empfehlenswert, von Zeit zu Zeit eine Spannkraft durch unmittelbare Bestimmung derselben zu prüfen. Bei Bogenträgern ist aber im allgemeinen die Feldweite geringer und mithin die Stabzahl größer als bei Balkenträgern von gleicher Stützweite.

Auch das folgende, dem Cremonaschen ähnliche Verfahren verdient hier angeführt zu werden. Man zeichnet der Reihe nach die Kräftepolygone für die Knoten A, 0, 1, 2 . . . . und bestimmt nacheinander: D_0 und U_0, D_1 und O_1, D_2 und U_2, wobei man aber, anstatt die Kräftepolygone auf die im § 27 beschriebene Weise zu einer, jede Spannkraft nur einmal enthaltenden Figur zu vereinigen, abwechselnd die Strahlenbüschel S_1 und S_2 benutzt**). Zuweilen wird einer der Werte U und O in der oben gezeigten Art mittels einer *Ritter*schen Momentengleichung geprüft.

Wird der Bogen nur durch senkrechte Lasten beansprucht, so können die größten positiven und negativen Momente M_m für die Knotenpunkte m auch auf die im § 24 angegebene Weise in der Form $M_m = H\eta_m$ dargestellt und hierauf die Grenzwerte der Spannkräfte O und U nach § 31 bestimmt werden.

184. Soll das **Culmannsche Verfahren** zur Ermittelung der in Fig. 372 vom Schnitte tt getroffenen Gurtstäbe benutzt werden, so ist nur die in No. 12 behandelte Aufgabe zu lösen: Drei Kräfte O, U und D zu finden, welche der gegebenen Kraft R das Gleichgewicht halten.

Die früher gegebene Lösung der Aufgabe stößt bei ihrer Anwendung auf Bogenträger zuweilen auf Schwierigkeiten. So ist es zum Beispiel in der Fig. 372 zwar möglich, den Schnittpunkt (RD) von R und D scharf zu bestimmen; die Schnittpunkte (RO), (RU) und (OU) hingegen fallen häufig außerhalb des Zeichenblattes. Man ersetze dann R in irgend einem Punkte seiner Richtung durch zwei Seitenkräfte R' und R'', welche durch die Schnittpunkte (OD) und $UD)$ gehen, und

---

*) Um genaue Werte zu erhalten, scheue man ja die kleine Mühe nicht, die Strahlenbüschel S_1 und S_2 in Fig. 372 in der auf Seite 308 angegebenen Weise durch Rechnung festzulegen. Parallelen zu den kurzen Gurtstäben zu ziehen, ist nach den Erfahrungen des Verfassers unbedingt zu verwerfen.

**) Es stimmt dieses Verfahren im wesentlichen mit demjenigen überein, welches zuerst von *Lang* im Civilingenieur 1882 auf Tafel XIV zur Untersuchung eines sichelförmigen Balkens (Dachbinder) angewendet worden ist.

Digitized by Google

zerlege R' nach den Richtungen von O und D, ferner R'' nach den Richtungen von U und D. Man gelangt dann zu dem in der Fig. 374 dargestellten Kräftepolygone.

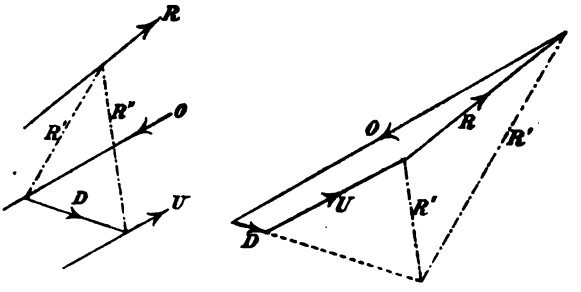


Fig. 374.

Es soll noch eine oft benutzte Anwendung des *Culmann*schen Verfahrens zur Ermittelung der durch eine *gleichförmige bewegliche Belastung* hervorgerufenen Grenzwerte der Spannkräfte an einem Beispiele erläutert werden. Die Feldweiten seien gleich groß vorausgesetzt, und die Belastung eines Feldes werde mit $p\lambda = P$ bezeichnet. Die Zeiger 1, 2, 3, ... in der Figur 375 deuten also nur an, daß die gleich großen Lasten P_1, P_2, P_3 . . . . in den Knoten 1, 2, 3 . . . . angreifen.

Zuerst werden die von jeder einzelnen Last herrührenden, in A und B angreifenden Stützenwiderstände K_1, K_2, K_3, ... und K'_1, K'_2, K'_3, ... gesondert bestimmt. Um z. B. K_2 und K'_2 zu erhalten, wird P_2 mit der Kämpferdrucklinie in 2 zum Schnitte gebracht und hierauf die von A aus auf einer Senkrechten aufgetragene Last P nach den Richtungen $A2$ und $B2$ zerlegt. Es liegen dann die Endpunkte von K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 auf einer Geraden, desgl. die Endpunkte von K'_5, K'_6, K'_7, K'_8, K'_9. Nach Bestimmung sämtlicher K und K' werden die in A angreifenden Stützenwiderstände in der Reihenfolge K_1, K_2 . . . . zu einem Polygone LN zusammengesetzt, die in B angreifenden in der Reihenfolge K'_9, K'_8 . . . . zu einem Polygone $L'N$*).

Jetzt kann zur Ermittelung der Spannkräfte geschritten werden. Gesucht sei z. B. die Spannkraft O_3, welche dem Momente M_3 für den gegenüberliegenden Knoten 3 proportional ist und den größten positiven oder den größten negativen Wert annimmt, je nachdem der Träger so belastet wird, daß $_{min}M_3$ oder $_{max}M_3$ entsteht. Legt man nun durch A und den Knoten 3 eine Gerade, welche die Kämpfer-

*) Für Fig. 375b wurde ein kleinerer Kräftemaßstab gewählt wie für Fig. 375a.

Digitized by Google

drucklinie in E schneidet, so ist die Senkrechte durch E nach § 24 eine Belastungsscheide; jede Last rechts von E erzeugt ein negatives

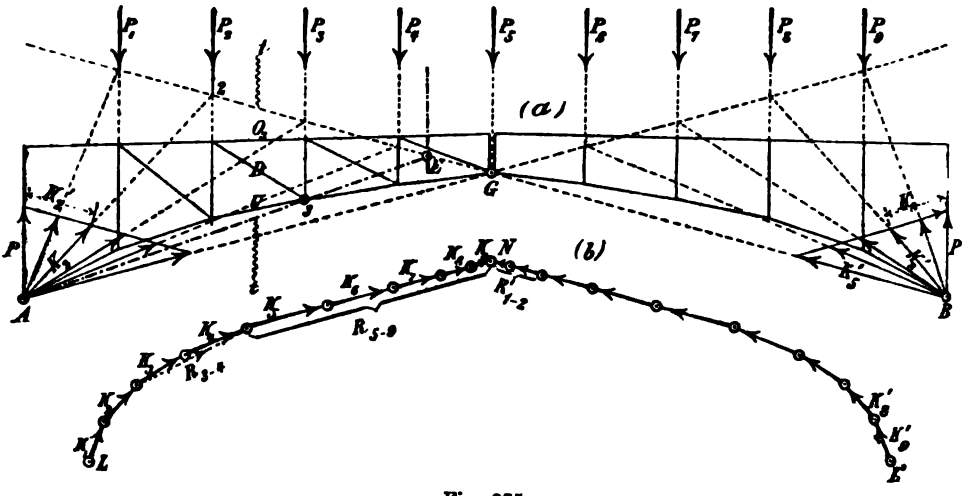


Fig. 375.

M_3, jede Last links ein positives. Um also den größten Zug O_3 zu erhalten, werden alle Lasten links von E beseitigt. Es greift dann am Trägerteile links vom Schnitte tt nur *eine* äußere Kraft an, nämlich die durch A gehende Mittelkraft R_{5-9} der Widerstände K_5, K_6, ... bis K_9, und mit dieser müssen die ebenfalls am linken Trägerteile angreifenden Spannkräfte O, U, D im Gleichgewichte sein. Die Ermittelung der letzteren Kräfte erfolgt nun nach Fig. 374.

Um $_{min}O_3$ zu erhalten, ist der Träger rechts von E zu entlasten; die verbleibenden Lasten werden in die durch den Schnitt tt geschiedenen Gruppen P_1, P_2 und P_3, P_4 getrennt, deren Einflüsse gesondert bestimmt und schließlich addiert werden. Wirken nur P_1 und P_2, so zeichnet man das Kräftepolygon für die *rechts* vom Schnitte tt wirksamen Kräfte O, U, D, R'_{1-2}, wobei R'_{1-2} die in B angreifende Mittelkraft aus K'_1 und K'_2 ist, und um den Einfluß von P_3 und P_4 zu erhalten, wird der linke Trägerteil betrachtet, an welchem nur die äußere Kraft R_{3-4}, d. i. die Mittelkraft aus K_3 und K_4 angreift.

Auf dem beschriebenen Wege können auch die größten Spannkräfte in den Füllungsstäben (für welche die ungünstigste Belastung im folgenden § mit Hilfe der Einflußlinien ermittelt werden soll) bestimmt werden; doch halten wir das ganze Verfahren für wenig zweckmäßig, weil es zu sehr unübersichtlichen und deshalb schwierig zu prüfenden Kräfteplänen führt.

Digitized by Google

§ 45.

Belastung durch senkrecht gerichtete Kräfte.

185. Einflußlinien. Wir setzen den Träger zunächst nur links vom Scheitelgelenke G belastet voraus, denken den Stützenwiderstand K' in der Richtung BG von B bis nach G verschoben und zerlegen K und K' in die senkrechten Seitenkräfte A' und B' und in die entgegengesetzt gleichen, in die Gerade AG fallenden Seitenkräfte Q,

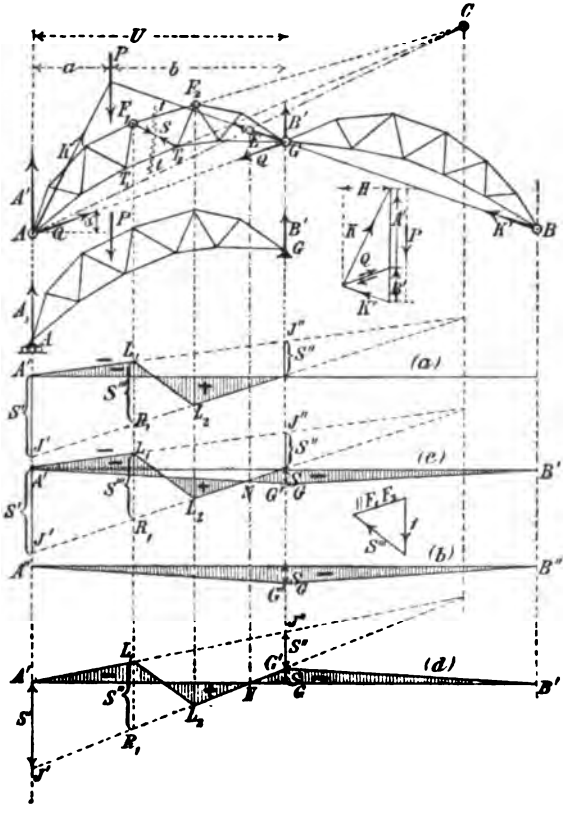


Fig. 376.

Fig. 376. Wäre $Q = 0$, so würde sich der Trägerteil AG wie ein einfacher Balken verhalten, und man könnte dann die Einflußlinie für irgend eine Spannkraft S *(gleichgültig, ob diejenige eines Füllungs- oder Gurtstabes)* auf die im § 30 beschriebene Weise mit Hilfe der den Belastungszuständen $A' = 1$ und $B' = 1$ (Fig. 377 und 378) ent-

Digitized by Google

sprechenden Spannkräfte S' und S'' zeichnen;*) sie ist in der Figur 376a für einen linkssteigenden Füllungsstab unter der Voraussetzung eines positiven S' und eines negativen S'' dargestellt worden.

Um nun den Einfluß der beiden Kräfte Q zu bestimmen, beachte man, daß, wegen $Q = H \sec \alpha$ (wo α = Neigungswinkel der Geraden AG), der von Q herrührende und dieser Kraft proportionale Teil der Spannkraft S auch proportional H sein muß, daß also der noch fehlende, die Wirkung der Kräfte Q darstellende Teil der Einflußfläche ein Dreieck ($A''G'B''$ in Fig. 376b) ist, dessen Spitze dem Gelenke G entspricht.**) Dieses Dreieck, welches mit Berücksichtigung des Vorzeichens zu der Einflußfläche in Fig. 376a zu addieren ist, läßt sich mit Hilfe derjenigen Spannkraft S_a bestimmen, welche von

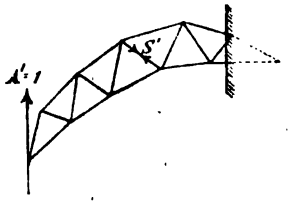


Fig. 377.

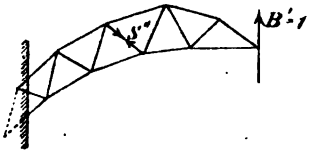


Fig. 378.

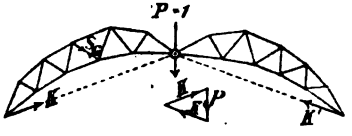


Fig. 379.

einer in G angreifenden Last 1 im fraglichen Stabe hervorgerufen wird (Belastungsfall in Fig. 379). In Fig. 376 ist S_a negativ; so daß die in der Figur 376c dargestellte Einflußfläche für S entsteht. Man kann auch die in der Figur 376d angegebene Anordnung wählen, bei welcher die Einflußlinie $A'L_1L_2G'B'$ auf eine gerade Achse $A'B'$ bezogen ist; hier sollen positive Werte S', S_a, S'' nach unten hin aufgetragen werden, negative Werte nach oben, die beiden ersten von der Geraden $A'B'$, der letzte Wert vom Punkte G' aus. Sind also beispielsweise S' und S_a positiv, und S'' negativ, so ergibt sich die in der Fig. 380 dargestellte Fläche.

Bei bequemer Lage des Schnittpunktes C der beiden Stäbe, welche der Schnitt tt außer S noch trifft, kann die Ermittelung eines der beiden Werte S', S'' gespart und z. B. die Gerade $A'L_1$ mit Hilfe der

*) In den Figuren 377 und 378 denke man sich den Träger rechts oder links von der anschraffierten Geraden festgehalten.

**) Vergl. No. 113. Dort ist gezeigt, daß die Einflußfläche für H ein Dreieck ist.

Digitized by Google

Bedingung festgelegt werden, daß sich die Geraden $A'L_1$ und $J'L_2$ auf der Senkrechten durch C schneiden müssen. Aber auch die übrigen im § 30 nachgewiesenen Eigenschaften der Einflußlinien für die Spannkräfte einfacher Balken lassen sich zur Bestimmung oder Prüfung der Einflußfläche in Fig. 376a sowie des Liniengebildes in Fig. 376d benutzen. So ist beispielsweise für den in Fig. 376 behandelten Fall eines linkssteigenden Füllungsstabes und einer an der oberen Gurtung angreifenden Belastung die Länge der Strecke L_1R_1 gleich der Größe einer Spannkraft S''', die sich durch Zerlegung der Last $P=1$ nach den Richtungen der Stäbe F_1F_2 und S ergibt.

Ein weiteres wichtiges Gesetz folgt aus der Bedingung, daß eine in der Fig. 376 durch den Schnittpunkt E der Geraden AC und BG gehende Last die Spannkraft $S=0$ erzeugt, weil sie am linken Auflager einen durch den Punkt C gehenden Stützenwiderstand hervorruft. Hieraus folgt aber, daß sich die Geraden $J'L_2$ und $A'G'$ in Fig. 376c und ebenso die Geraden $J'L_2$ und $A'B'$ in der Fig. 376d auf der

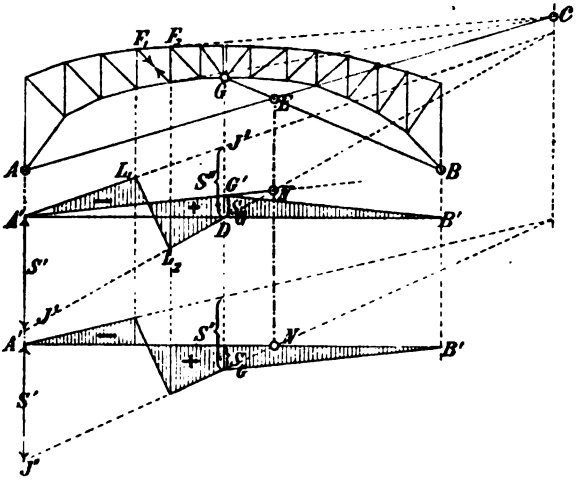


Fig. 380.

Senkrechten durch E schneiden müssen. Dies ist auch dann der Fall, wenn E unter G liegt, wie in Fig. 380; denn es geben hier die Unterschiede der Ordinaten der über die Scheitelsenkrechte verlängerten Geraden $J'L_2D$ und $A'G'$ den Einfluß S derjenigen beiden, links von *tt* wirksamen Kräfte A' und Q an, welche durch eine, rechts von G gelegene, jedoch auf den Trägerteil AG wirkende Last *Eins* hervorgerufen werden, und dieser Einfluß ist $=0$, sobald jene Last durch E geht. Hinsichtlich der Spannkräfte in den Gurtungen, welche den

Digitized by Google

Momenten für die gegenüberliegenden Knotenpunkte proportional sind, kann auf dieses Gesetz auch auf Grund der im § 24 gewonnenen Ergebnisse geschlossen werden.

Die vorstehenden Untersuchungen lehren, daß bei bequem gelegenem Schnittpunkte C (also beispielsweise immer dann, wenn es sich um die Spannkraft in einem Gurtstabe handelt — Fig. 381 —) der eine der Werte S', S'', S''', S_0 zur vollständigen Bestimmung der Einflußlinie ausreicht. In der Regel ist es dann am zweckmäßigsten, die Spannkräfte S' zu ermitteln; vergl. das im § 46 durchgeführte Zahlenbeispiel.*)

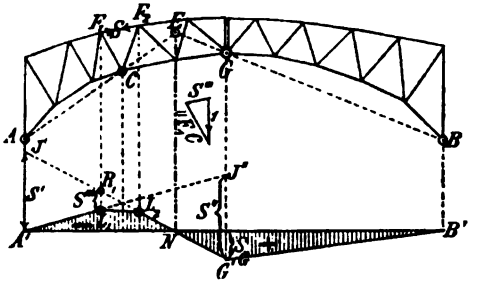


Fig. 381.

In allen hier vorgeführten Figuren wurde vorausgesetzt, daß die Belastung oben angreift. Wirkt sie an den Knoten der unteren Gurtung, so ist nur die Gerade L_1L_2 zu verlegen; sie würde dann in Fig. 376 dem Felde T_1T_2 zu entsprechen haben. In der Regel liegt aber der erstere Fall vor, und es darf dann auch meistens die gesamte ständige Belastung auf die oberen Knoten verteilt werden, ohne daß nennenswerte Fehler zu gewärtigen sind.

Schließlich sei noch hervorgehoben, daß das hier entwickelte Verfahren zur Ermittelung der Einflußlinien auch brauchbar ist, wenn an Stelle der Gelenke A, B und G Gelenkvierecke treten. Wir überlassen es dem Leser (im Anschluß an die Untersuchungen im § 42), die Zeichnungen für diesen Fall selbst zu entwerfen.

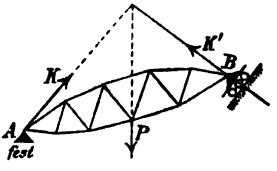


Fig. 382.

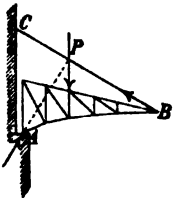


Fig. 383.

Auch empfehlen wir dem Leser, den in der Fig. 382 dargestellten *Träger mit schräger Auflagerung* und den in der Fig. 383 abgebildeten *Dachbinder* (der bei A ein festes Auflagergelenk besitzt und bei B durch eine um C drehbare Stange gestützt wird) mit Hilfe der für den Bogen mit drei Gelenken entwickelten Gesetze zu untersuchen.

Die Theorie der Einflußlinien ist auch dann wichtig, wenn die Ermittelung der Spannkräfte nach einem der im vorigen Paragraph beschriebenen Verfahren, beispielsweise dem zuletzt angegebenen, erfolgen soll:

*) Wir verweisen auch auf Fig. 226 und erinnern daran, daß $S' = 1\frac{x}{r}$ ist.

Digitized by Google

sie gestatten eine sehr übersichtliche Feststellung der ungünstigsten Belastungsweise. Es genügt nämlich, das Vorzeichen der Spannkraft S anzugeben (am besten durch Anwendung des *Ritter*schen Verfahrens auf den Zustand $A' = 1$), um sofort mittels Ziehen von wenigen Geraden zum Ziele zu gelangen. Liegt z. B. der in Fig. 376 dargestellte Fall eines linkssteigenden Füllungsstabes S vor, so leuchtet sofort ein, daß der rechts um C drehenden äußeren Kraft $A' = 1$ nur durch eine am linken Trägerabschnitte angreifende, links drehende Spannkraft S' das Gleichgewicht gehalten werden kann; es muß also S von F_1 nach T_2 gerichtet, d. h. positiv sein, und hierdurch sind die Vorzeichen der einzelnen Teile der Einflußfläche bestimmt. Man findet, daß im vorliegenden Falle ${}_{max}S_p$ entsteht, sobald nur die Knotenpunkte zwischen tt und der Senkrechten durch E belastet werden, während ${}_{min}S_p$ durch ausschließliche Belastung der übrigen Knoten hervorgerufen wird. Selbstverständlich genügt es, um dieses Ergebnis zu finden, die Einflußlinie aus freier Hand zu skizzieren.*)

Dem Leser wird empfohlen, als Beispiel einen linkssteigenden Füllungsstab unter folgenden Voraussetzungen zu untersuchen:

1. Punkt C liegt rechts vom Schnitte tt, aber unterhalb der Geraden BG. (Alle Lasten links von E erzeugen Zugspannungen, alle Lasten rechts von E Druckspannungen.)
2. C liegt links von A und oberhalb der Geraden GA. (Lasten links von tt erzeugen Druck, rechts von tt Zug.)

186. Vereinfachungen für einen besonders wichtigen Fall parabelförmiger Bogenträger. Sind die Füllungsstäbe abwechselnd senkrecht und geneigt angeordnet (Fig. 384), und liegen die Knotenpunkte der unteren Gurtung — welche das Scheitelgelenk enthalten möge — auf einer Parabel mit senkrechter Achse, so fällt bei *gänzlicher gleichförmiger Belastung* das durch die drei Gelenke A, G, B geführte Seilpolygon vollständig mit der unteren Gurtung zusammen. Denn die Eckpunkte dieses

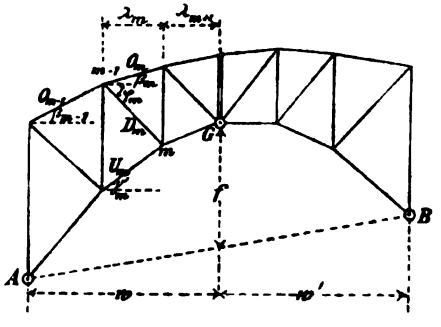


Fig. 384.

*) Wir setzen hierbei voraus, daß im Falle gleichförmiger Belastung nach Seite 118 (Fig. 109) mit festen Werten der Knotenlasten gerechnet wird. Es ist dann die Aufsuchung der genauen Lage einer etwa im Felde $F_1 F_2$ vorhandenen Belastungsscheide nicht nötig.

Digitized by Google

Seilpolygons gehören einer Parabel an, deren Achse senkrecht ist und welche durch drei Punkte A, G, B eindeutig bestimmt ist.

Hieraus folgt, daß die Momente M_m für sämtliche Knotenpunkte der unteren Gurtung und infolgedessen auch sämtliche Spannkräfte O gleich Null sind, und da nun für jeden oberen Knotenpunkt die Gleichgewichtsbedingung $D_m \cos \varphi_m = O_{m-1} \cos \beta_{m-1} - O_m \cos \beta_m$ besteht, so müssen auch alle Spannkräfte $D = 0$ sein. Es werden also infolge einer gänzlichen, gleichförmigen Belastung nur die Vertikalen und die Untergurtstäbe beansprucht, und zwar die ersteren durch Drücke, welche gleich den entsprechenden Knotenlasten sind, während sich für einen unter γ_m gegen die Wagerechte geneigten Stab der unteren Gurtung der Wert $U_m = -H \sec \gamma_m$ ergibt, wo $H =$ Horizontalschub. Ist also die ständige Belastung ($g = g_0 + g_m$) eine gleichförmige, so erzeugt sie die Spannkräfte

$$(1) \qquad V_{mg} = -\frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \text{ und } U_{mg} = -\frac{gww'}{2f} \sec \gamma_m, \text{*)}$$

während einer gänzlichen, gleichförmigen beweglichen Belastung p die Werte entsprechen

$$(2) \qquad V_{mp} = -\frac{1}{2} p (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \text{ und } U_{mp} = -\frac{pww'}{2f} \sec \gamma_m.$$

Da nun für jede Spannkraft S eines beliebigen Trägers die Gleichung besteht

$$(3) \qquad S_p = {}_{max}S_p + {}_{min}S_p,$$

wo $S_p =$ Spannkraft infolge gänzlicher Belastung mit p, während ${}_{max}S_p$ und ${}_{min}S_p$ die Einflüsse der auf den positiven, beziehungsweise negativen Beitragstrecken liegenden Last p bedeuten, so ergeben sich für den Parabelbogen in Fig. 384 die wichtigen Beziehungen

$$(4) \qquad \begin{cases} {}_{max}V_{pm} + {}_{min}V_{pm} = -\frac{1}{2} p (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \\ {}_{max}U_{pm} + {}_{min}U_{pm} = U_{pm} = -\frac{pww'}{2f} \sec \gamma_m \\ {}_{max}O_m + {}_{min}O_m = 0 \\ {}_{max}D_m + {}_{min}D_m = 0, \end{cases}$$

deren beide letzte die Zeiger p nicht enthalten, weil die Spannkräfte O und D infolge der ständigen Belastung $= 0$ sind. Es braucht jetzt nur noch der eine der beiden, von der Belastung p abhängigen Grenzwerte V, U, O, D angegeben zu werden; der andere ist dann sofort durch die Gleich. (4) bestimmt. Werden die Einflußlinien benutzt, so genügt es zuweilen, *Teile* derselben aufzuzeichnen. So wird man sich beispielsweise, um die Spannkraft in einem Stabe der oberen Gurtung

*) Vergl. die auf S. 188 gezeigte Berechnung von H.

Digitized by Google

zu bestimmen (Fig. 381), darauf beschränken, die Geraden $J'G'$ und $G'B'$ mit Hilfe von S' und N festzulegen, da durch diese Geraden der positive Teil $NG'B'$ der Einflußfläche und mithin auch $_{max}S$ bestimmt ist, worauf dann $_{min}S = -\,_{max}S$ gefunden wird.

An Stelle der Einflußlinien kann man auch das folgende übersichtliche und schnell zum Ziele führende Verfahren benutzen, das hier an der Hand eines *Zahlenbeispiels* beschrieben werden soll. Verlangt sei die

187. Berechnung einer Fußgängerbrücke mit Parabelbögen. Die 3,8^m breite Brücke besitzt zwei Hauptträger, deren Anordnung in der Fig. 385 angegeben ist. Die obere Gurtung ist wagerecht; die

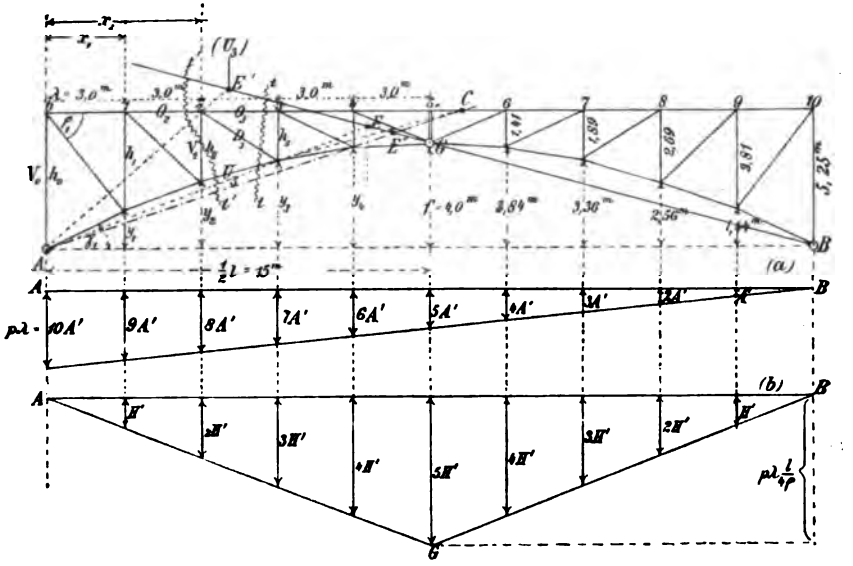


Fig. 385.

Knotenpunkte der unteren Gurtung liegen auf einer Parabel. Es ist $l = 30^m$; $\lambda = 3^m$; $f = 4{,}0^m$; $h_0 = 5{,}25^m$. Das Eigengewicht ist zu 194^{kg} f. d. qm der Brückenbahn geschätzt worden,*) die ständige Belastung (Menschengedränge) zu 350^{kg} f. d. qm,**) weshalb $g = 0{,}194 \cdot \frac{3{,}8}{2} = 0{,}37$;

*) Es wird vorausgesetzt, daß die Brückenbahn aus einem einfachen Bohlenbelage auf eisernen Querträgern besteht. Dann darf man nach *Heinzerling* die ständige Belastung für das qm der Brückenbahn $= 1{,}36\,l^m + 153^{kg}$ annehmen; dies gibt $1{,}36 \cdot 30 + 153 = 194^{kg}$. Vergl. *Heinzerling, die Brücken der Gegenwart*, Abteil. I, Heft 5, Seite 22.

**) Für Brücken mit geringerem Verkehr, sonst 400 bis 500^{kg}.

Digitized by Google

$p = 0{,}350 \cdot \frac{3{,}8}{2} = 0{,}665^t$ und $q = g + p = 1{,}035^t$. Die bewegliche Belastung eines Feldes ist $p\lambda = 0{,}665 \cdot 3 = 2{,}0^t$. Eine Zerlegung von g in g_o und g_u ist überflüssig.

Wir beginnen mit der Bestimmung der Stützenwiderstände A und H, welche eine der Reihe nach in den Knotenpunkten 1, 2, 3 .... angreifende Last $p\lambda$ hervorruft. Liegt die Last bei 9, so möge $A = A'$ und $H = H'$ sein. Die den übrigen Knoten entsprechenden Werte A und H sind durch die in Fig. 385 a u. b dargestellten Einflußlinien bestimmt. Im vorliegenden Falle ist $A' = \frac{1}{10} p\lambda = 0{,}2^t$ und (da eine im Scheitel angreifende Last $P = p\lambda$ den Schub $H = \frac{Pl}{4f} = \frac{p\lambda l}{4f}$ hervorbringt) $H' = \frac{1}{5} \cdot p\lambda \frac{l}{4f} = \frac{1}{5} \cdot 2{,}0 \frac{30}{4 \cdot 4{,}0} = 0{,}75^t$.

Jetzt zeichnen wir zwei *Cremona*sche Kräftepläne (Fig. 386 u. 387 auf Tafel 6), welche die durch die äußeren Kräfte A' und H' hervorgerufenen Spannkräfte enthalten, und ermitteln zu gleicher Zeit die Einflüsse der ständigen Belastung und der über den ganzen Träger verteilt gedachten beweglichen Last p. In Fig. 386 wurde die Wagerechte $\overline{BC_0}$ gleich dem von der ständigen Belastung erzeugten Horizontalschub: $H_g = \frac{gl^2}{8f} = \frac{0{,}37 \cdot 30^2}{8 \cdot 4} = 10{,}4^t$ gemacht (und zwar in dem mit *II* bezeichneten Kräftemaßstabe); auf der Senkrechten durch C_0 wurden die Lasten $\frac{1}{2} g\lambda$, $g\lambda$, $g\lambda$ . . . aufgetragen und die Teilpunkte C_4, C_5 . . . mit B verbunden. Dann ist, da die untere Gurtung als das Seilpolygon der gänzlichen Belastung betrachtet werden darf:

Strecke $\overline{BC_1} = U_{1g} = -11{,}5^t$; $\overline{BC_2} = U_{2g} = -11{,}1^t$;
$\overline{BC_3} = U_{3g} = -10{,}8^t$; $\overline{BC_4} = U_{4g} = -10{,}5^t$;
$\overline{BC_5} = U_{5g} = -10{,}4^t$.

In gleicher Weise wurden aus $\overline{BE_0} = H_p = \frac{pl^2}{8f} = \frac{10 p\lambda \cdot l}{8f}$ $= \frac{10 \cdot 2{,}0 \cdot 3{,}0}{8 \cdot 4} = 18{,}75^t$ (Kräftemaßstab $10^{mm} = 20^t$) die Werte abgeleitet

$U_{1p} = -20{,}8^t$; $U_{2p} = -20{,}0^t$; $U_{3p} = -19{,}4^t$; $U_{4p} = -18{,}9^t$;
$U_{5p} = -18{,}8^t$.*)

*) Man erhält bei diesem Verfahren gleichzeitig die Größe der Spannkräfte U und die *Richtungen* dieser Kräfte. Parallelen zu den kurzen Linien des Trägernetzes zu ziehen, ist nicht ratsam. Damit infolge der Abrundungen von $g\lambda$ und H_g keine Zeichenfehler entstehen, beachte man, daß sich

Digitized by Google

Der Kräfteplan für $A' = 0{,}2^t$ (Maßstab I) bedarf keiner Erläuterung; zu beachten ist, daß nach No. 151 die Verlängerungen der Spannkräfte D auf der Senkrechten durch B die Strecken A abschneiden müssen.

Der in Fig. 387 für den Zustand $H' = 0{,}75^t$ gezeichnete Plan (Maßstab I) läßt sich in ähnlicher Weise prüfen. Bei gleichen Feldweiten müssen sich nämlich (wie zuerst *Mohr* gezeigt hat) die Verlängerungen sämtlicher D in einem Punkte T der durch R bestimmten Senkrechten treffen. Es folgt dies aus der nachstehenden Untersuchung.

Fügt man im Knotenpunkte 1 der Fig. 388a zwei sich aufhebende Kräfte H' hinzu, so wirkt links vom Schnitte tt ein Kräftepaar, dessen Moment $= H'h_0$ ist und eine in 1 angreifende Kraft H'. Das Kräftepaar läßt sich ersetzen durch zwei in 1 und 2 wirksame, entgegengesetzt gleiche, senkrechte Kräfte Q, deren Moment $Q\lambda$ dem Momente $H'h_0$ entgegengesetzt gleich ist. Zeichnet man nun die Kräftepolygone der Knoten 1 und 2, so gelangt man zu der Fig. 388b, welche einen Teil der Fig. 387 ausmacht, und aus welcher hervorgeht, daß die Verlängerung von D auf der Senkrechten durch R die im vorliegenden Falle für alle Diagonalen gleich große Strecke $Q = \frac{H'h_0}{\lambda}$ $= \frac{0{,}75 \cdot 5{,}25}{3} = 1{,}3125^t$ abschneidet.

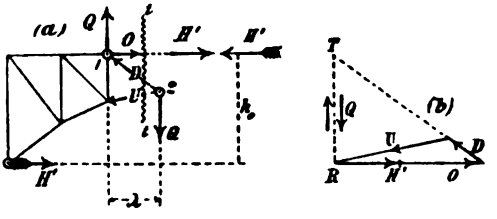


Fig. 388.

Für die durch A' und H' erzeugten Spannkräfte ergeben sich die folgenden Werte:*)

(mit $l = n\lambda$) verhalten muß $\overline{C_1C_0} : \overline{C_0B} = \frac{n-1}{2} g\lambda : \frac{gl^2}{8f} = \frac{(n-1)4f}{n^2\lambda}$. Im vorliegenden Falle ergibt sich: $\overline{C_1C_0} : \overline{C_0B} = \frac{9 \cdot 4 \cdot 4}{10^2 \cdot 3} = 0{,}48$. Es wurde in der Fig. 386 die wagerechte Strecke $\overline{BN} = 12{,}5^{cm}$ gemacht, die senkrechte Strecke $\overline{NL} = 0{,}48 \cdot 12{,}5 = 6{,}0^{cm}$, hierauf NL in 9 gleiche Teile geteilt und mit Hilfe der Teilpunkte der Strahlenbüschel der Spannkräfte U festgelegt. Natürlich wird man BN und NL nicht zu klein wählen.

*) Es lassen sich diese Werte auch schnell berechnen. Man findet z. B. für den ersten Fall (Einfluß von A') mit den aus der Fig. 385 ersichtlichen Bezeichnungen mit Hilfe *Ritter*scher Momentengleichungen die Spannkräfte in der oberen Gurtung

$$O_1 = -\frac{A'x_1}{h_1}; \quad O_2 = -\frac{A'x_2}{h_2} \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

Stab	Spannkraft infolge $A'=0{,}2$	$H'=0{,}75$	Stab	Spannkraft infolge $A'=0{,}2$	$H'=0{,}75$
O_4	−1,702	+2,043	U_5	+1,705	−2,797
O_3	−0,952	+1,333	U_4	+0,965	−2,110
O_2	−0,446	+0,714	U_3	+0,462	−1,515
O_1	−0,157	+0,283	U_2	+0,168	−1,103
D_1	+0,255	−0,458	V_0	−0,200	+0,360
D_2	+0,388	−0,578	V_1	−0,259	+0,386
D_3	+0,598	−0,732	V_2	−0,319	+0,390
D_4	+0,828	−0,784	V_3	−0,352	+0,333
D_5	+0,756	−0,387	V_4	−0,291	+0,149

Mit Hilfe dieser Werte lassen sich die von der Verkehrslast herrührenden Grenzwerte der Spannkräfte S schnell berechnen.

Handelt es sich z. B. um O_3, so wird von A durch den gegenüberliegenden Knotenpunkt eine Gerade gelegt und deren Schnittpunkt E mit der Geraden BG bestimmt, Fig. 385. Die Senkrechte durch E ist Belastungsscheide; alle Lasten rechts von E erzeugen ein positives, alle Lasten links von E ein negatives O. Werden also nur die Knoten 5, 6, 7, 8, 9 belastet angenommen und zwar jeder mit $p\lambda$*), so entsteht ${}_{max}O_3$. Links von E greifen nur die äußeren Kräfte A und H an; erstere ist $A = A' + 2A' + 3A' + 4A' + 5A' = 15A'$, letztere: $H = 15H'$. Da nun A' die Spannkraft $O_3 = -0{,}952$ erzeugt und H' die Spannkraft $O_3 = -1{,}333$, so entsteht

$${}_{max}O_3 = -0{,}952 \cdot 15 + 1{,}333 \cdot 15 = +5{,}7'.$$

Die ständige Belastung ist ohne Einfluß auf O.

Um den einen Grenzwert von U_{3p} zu ermitteln, wird der Schnittpunkt E' (Fig. 385) der von A durch den oberen Knoten 2 gelegten Geraden BG bestimmt. Ausschließliche Belastung rechts von E' erzeugt ${}_{min}U_{3p}$. Es entsteht: $A = A'(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$

---

hierauf $U_1 = 0$; $U_2 = -O_1 \sec\gamma_2$; $U_3 = -O_2 \sec\gamma_3$; ....
sodann $D_1 = (O_1 - O_2)\sec\varphi_1$; $D_2 = (O_2 - O_3)\sec\varphi_2$; ....
schließlich $V_0 = -D_1 \sin\varphi_1$; $V_1 = -D_2 \sin\varphi_2$; ....

In gleich einfacher Weise lassen sich die durch H' erzeugten Spannkräfte berechnen. Hier ergibt sich

$$U_1 = -H' \sec\gamma_1;\ U_2 = -\frac{H'h_0}{h_1}\sec\gamma_2;\ U_3 = -\frac{H'h_0}{h_2}\sec\gamma_3; \ldots.$$

$$O_1 = +\frac{H'h_0}{h_1} - H';\ O_2 = +\frac{H'h_0}{h_2} - H'; \ldots.$$

worauf die Werte D und V wie vorhin bestimmt werden.

Bei ungleichen Feldweiten sind an Stelle der Belastungszustände $A = A'$ und $H = H'$ die Zustände $A = 1$ und $H = 1$ zu untersuchen.

*) Wir rechnen, nach Seite 118, mit festen Werten der Knotenlasten.

Digitized by Google

$= 28\,A'$ und $H = H'(1+2+3+4+5+4+3) = 22\,H'$, weshalb

$$_{min}U_{5p} = +0{,}462 \cdot 28 - 1{,}515 \cdot 22 = -20{,}4^t.$$*)

Befindet sich der dem Stabe U gegenüberliegende Knotenpunkt oberhalb der Geraden BG, so wird (wie aus der Gestalt der Einflußlinie hervorgeht) U bei gänzlicher Belastung des Trägers am größten.**) Dies ist der Fall hinsichtlich U_5, und man erhält deshalb (nach Hinzurechnung des Einflusses der ständigen Last) $_{min}U_5 = U_{5p} + U_{5g} = -18{,}8 - 10{,}4 = -29{,}2^t$. Ebenso nimmt, da für jeden Belastungszustand $U_1 = -H \sec \gamma_1$ ist, die Spannkraft U_1 bei gänzlicher Belastung ihren größten negativen Wert an. Man findet $_{min}U_1 = -20{,}8 - 11{,}5 = -32{,}3^t$.

Wird ein Grenzwert der (von g unabhängigen) Spannkraft D_3 gesucht, so wird der Schnittpunkt C von O_3 und U_3 mit A durch eine Gerade verbunden, welche die BG in E'' schneiden möge. Liegt, wie in Fig. 385, der Punkt E'' oberhalb G, so ist die Senkrechte durch E'' Belastungsscheide; liegt E'' auch links von C, so ist auch ein durch das Feld $\overline{23}$ geführter Schnitt eine Belastungsscheide. $_{max}D$ entsteht dann infolge ausschließlicher Belastung der Knoten zwischen tt und E'', im vorliegenden Falle also, sobald nur die Knoten 3 und 4 belastet werden. Man findet $A = (7+6)\,A' = 13\,A'$; $H = (3+4)\,H' = 7\,H'$ und

$$_{max}D_3 = +0{,}598 \cdot 13 - 0{,}732 \cdot 7 = +2{,}7^t.$$

Die den Stäben D_1 und D_2 entsprechenden Punkte E liegen ebenfalls oberhalb G und links von den zugehörigen Punkten C. Dagegen entsprechen den Stäben D_4 und D_5 Punkte E, die unterhalb G liegen. Dann sind zur Erzielung von $_{max}D$ alle Knoten rechts vom fraglichen Felde zu belasten. Würde E oberhalb G, aber rechts von C liegen, welcher Fall eintritt, sobald sich C unterhalb der Geraden BG befindet, so würde nur die Senkrechte durch E (nicht aber der Schnitt tt) eine Belastungsscheide sein. Man würde dann alle Knoten rechts von E belasten und $_{min}D$ bestimmen.***)

Um einen Grenzwert von V_{23} zu erhalten, wird der Schnitt $t't'$ geführt, und der Schnittpunkt von O_2 und U_3 mit A verbunden. Bezüglich der gegenseitigen Lage der Punkte E, C, G sind dieselben Fälle zu unterscheiden wie bei der Berechnung der D. Im vorliegenden

*) Es empfiehlt sich, die Belastungsscheiden in einer (in nicht zu kleinem Maßstabe gezeichneten) besonderen Figur zusammenzustellen und an dieselben — in Klammern — die entsprechenden Spannkräfte zu schreiben, wie dies z. B. in Fig. 385 hinsichtlich U_3 geschehen ist.

**) Wir verweisen auf Tafel 6 u. 7, auf denen die Einflußlinien für sämtliche Spannkräfte des vorliegenden Trägers abgebildet sind.

***) Der Leser skizziere für diesen im vorliegenden Beispiele nicht enthaltenen Fall die Einflußlinie.

Digitized by Google

Falle entsteht in V_2 der größte Druck, sobald nur die Knoten 2, 3, 4 (zwischen tt und E'') belastet werden. Man erhält $A = (8+7+6)\,A' = 21\,A'$; $H = (2+3+4)\,H' = 9\,H'$, also

$$_{min}V_{2p} = -0{,}319 \cdot 21 + 0{,}390 \cdot 9 = -3{,}2'.$$

Auf die beschriebene Weise ist für jede Spannkraft der eine der beiden von der beweglichen Belastung abhängigen Grenzwerte bestimmt und in die folgende Tabelle eingetragen worden.

Gesucht:	Zu belasten sind die Knoten	$\frac{A}{A'} =$	$\frac{H}{H'} =$	Spannkräfte in Tonnen
$_{max}O_4$	5, 6, 7, 8, 9	15	15	$_{max}O_4 = +5{,}1$
$_{max}O_3$	5, 6, 7, 8, 9	15	15	$_{max}O_3 = +5{,}7$
$_{max}O_2$	4, 5, 6, 7, 8, 9	21	19	$_{max}O_2 = +4{,}2$
$_{max}O_1$	4, 5, 6, 7, 8, 9	21	19	$_{max}O_1 = +2{,}1$
$_{min}U_4$	4, 5, 6, 7, 8, 9	21	19	$_{min}U_{p4} = -19{,}8$
$_{min}U_3$	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	28	22	$_{min}U_{p3} = -20{,}4$
$_{min}U_2$	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	36	24	$_{min}U_{p2} = -20{,}4$
$_{max}D_1$	1, 2, 3	24	6	$_{max}D_1 = +3{,}4$
$_{max}D_2$	2, 3, 4	21	9	$_{max}D_2 = +2{,}9$
$_{max}D_3$	3, 4	13	7	$_{max}D_3 = +2{,}7$
$_{max}D_4$	4, 5, 6, 7, 8, 9	21	19	$_{max}D_4 = +2{,}5$
$_{max}D_5$	5, 6, 7, 8, 9	15	15	$_{max}D_5 = +5{,}5$
$_{min}V_0$	0, 1, 2, 3*)	29	6	$_{min}V_{p0} = -3{,}6$
$_{min}V_1$	1, 2, 3, 4	30	10	$_{min}V_{p1} = -3{,}9$
$_{min}V_2$	2, 3, 4	21	9	$_{min}V_{p2} = -3{,}2$
$_{min}V_3$	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	28	22	$_{min}V_{p3} = -2{,}5$
$_{min}V_4$	4, 5, 6, 7, 8, 9	21	19	$_{min}V_{p4} = -3{,}3$

Nun ergibt sich, nach den Gleichungen (4) für sämtliche O und D

$$_{min}O = -\,_{max}O \text{ und } _{min}D = -\,_{max}D,$$

ferner

$$_{max}U_{pm} = -\,_{min}U_{pm} + U_{pm} \text{ also:}$$

$$_{max}U_{p2} = +20{,}4 - 20{,}0 = +0{,}4'$$
$$_{max}U_{p3} = +20{,}4 - 19{,}4 = +1{,}0'$$
$$_{max}U_{p4} = +19{,}8 - 18{,}9 = +0{,}9'$$

und

$$_{max}V_{pm} = -\,_{min}V_{pm} - p\lambda, \text{ d. i.}$$

$$_{max}V_{p1} = +3{,}9 - 2{,}0 = +1{,}9' \quad | \quad _{max}V_{p3} = +2{,}5 - 2{,}0 = +0{,}5'$$
$$_{max}V_{p2} = +3{,}2 - 2{,}0 = +1{,}2' \quad | \quad _{max}V_{p4} = +3{,}3 - 2{,}0 = +1{,}3'.$$

Für die Endvertikale ist $\frac{1}{2}p\lambda$ statt $p\lambda$ zu setzen, weshalb $_{max}V_{p0} = +3{,}6 - 1{,}0 = +2{,}6'$.

Addiert man zu den Grenzwerten von U_p und V_p noch die von

*) Zu beachten ist, daß der Knoten 0 nur die Last $\frac{1}{2}p\lambda$ trägt, weshalb $A = (\frac{1}{2}+9+8+7)\,A' = 29\,A'$.

Digitized by Google

der ständigen Belastung herrührenden Spannkräfte U_g und V_g, so erhält man (wegen $g\lambda = 1{,}1^t$) schließlich

$$\begin{array}{l|l}
{}_{min}U_2 = -20{,}4 - 11{,}1 = -31{,}5^t & {}_{max}U_2 = +0{,}4 - 11{,}1 = -10{,}7^t \\
{}_{min}U_3 = -20{,}4 - 10{,}8 = -31{,}2^t & {}_{max}U_3 = +1{,}0 - 10{,}8 = -9{,}8^t \\
{}_{min}U_4 = -19{,}8 - 10{,}5 = -30{,}3^t & {}_{max}U_4 = +0{,}9 - 10{,}5 = -9{,}6^t
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
{}_{min}V_0 = -3{,}6 - \tfrac{1}{2}1{,}1 = -4{,}2^t & {}_{max}V_0 = +2{,}6 - \tfrac{1}{2}\cdot 1{,}1 = +2{,}1^t \\
{}_{min}V_1 = -3{,}9 - 1{,}1 = -5{,}0^t & {}_{max}V_1 = +1{,}9 - 1{,}1 = +0{,}8^t \\
{}_{min}V_2 = -3{,}2 - 1{,}1 = -4{,}3^t & {}_{max}V_2 = +1{,}2 - 1{,}1 = 0 \text{ gesetzt} \\
{}_{min}V_3 = -2{,}5 - 1{,}1 = -3{,}6^t & {}_{max}V_3 = +0{,}5 - 1{,}1 = -0{,}6^t \\
{}_{min}V_4 = -3{,}3 - 1{,}1 = -4{,}4^t & {}_{max}V_4 = +1{,}3 - 1{,}1 = 0 \text{ gesetzt.}
\end{array}$$

Jede der im Scheitel angeordneten beiden Vertikalen hat den *Druck* $\frac{1}{2}q\lambda = 1{,}6^t$ auszuhalten. Eine übersichtliche Zusammenstellung sämtlicher Spannkräfte findet sich in der folgenden Figur.

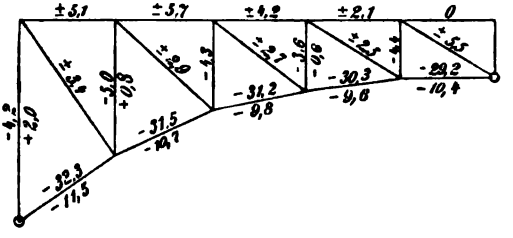


Fig. 389.

§ 46.

Zahlenbeispiel. Einflußlinien für einen Bogenträger von 30m Stützweite.

Es sollen die Einflußlinien für den in der Fig. 385 abgebildeten Bogenträger dargestellt und zur Bestimmung der Spannkräfte infolge verschiedenartiger Belastungsfälle benutzt werden.*)

Wir wählen ein Verfahren, das auch dann schnell zum Ziele führt, wenn die in Fig. 376 mit C bezeichneten Schnittpunkte der Gurtstäbe O und U ungünstig liegen. Zunächst sind die Spannkräfte S' und S_a zu bestimmen. Die ersteren, dem Zustande $A' = 1$ entsprechend, können dem auf Tafel 6, Fig. 386, gezeichneten Kräfteplane entnommen werden. Wird dort $A' = 1$ vorausgesetzt, so gilt der Kräftemaßstab *II*. Die Ergebnisse enthält die nachfolgende Tabelle. Um die Spannkräfte S_a infolge einer im Scheitel angreifenden Last 1 zu bestimmen, zerlege man

*) Wir empfehlen dem Leser, dieses Beispiel auch mit Hilfe der im § 19 entwickelten Verfahren durchzuarbeiten und sämtliche Spannkräfte mit Hilfe eines einzigen Seilpolygons zu ermitteln; sie lassen sich alle auf die Form $\frac{\xi}{x}\cdot Hy$ bringen. Vergl. die Figuren 145, 146 u. 147.

Digitized by Google

den Kämpferdruck in $A' = \frac{1}{2}$ und $H' = 1 \frac{l}{4f} = 1 \cdot \frac{30}{4 \cdot 4} = 1{,}875$ und bestimme die Einflüsse von A' und H' getrennt. Den von H' herrührenden Teil von S_G liefert der Kräfteplan in Fig. 387 (Maßstab *III*); wird dieser Teil mit S_H bezeichnet, so folgt $S_G = \frac{1}{2} S' + S_H$. Man findet

Stab	S'	S_H	S_G	Stab	S'	S_H	S_G
O_1	— 0,787	+ 0,709	+ 0,315	U_2	+ 0,840	— 2,758	— 2,338
O_2	— 2,230	+ 1,784	+ 0,669	U_3	+ 2,308	— 3,787	— 2,633
O_3	— 4,762	+ 3,333	+ 0,952	U_4	+ 4,822	— 5,275	— 2,864
O_4	— 8,511	+ 5,106	+ 0,851	U_5	+ 8,523	— 6,991	— 2,730
D_1	+ 1,273	— 1,145	— 0,509	V_0	— 1,000	+ 0,900	+ 0,400
D_2	+ 1,938	— 1,445	— 0,476	V_1	— 1,294	+ 0,965	+ 0,318
D_3	+ 2,992	— 1,831	— 0,335	V_2	— 1,595	+ 0,976	+ 0,179
D_4	+ 4,142	— 1,959	+ 0,112	V_3	— 1,762	+ 0,833	— 0,048
D_5	+ 3,780	— 0,968	+ 0,922	V_4	— 1,454	+ 0,372	— 0,355

Die Einflußlinien für die Spannkräfte O_1, O_2, O_3, O_4 sind in der Fig. 390 (Tafel 6) dargestellt worden. Um beispielsweise die Linie für O_2 zu erhalten, wurden (im Maßstabe 3,0 = 5 cm) die Strecken aufgetragen $\overline{A_2 J_2} = S' = -2{,}230$ und $\overline{GG'} = S_G = + 0{,}669$,*) und hierauf die Geraden *I*, *II*, *III* gezogen. Will man die Ermittelung von S_G sparen, so lege man nach Bestimmung des Punktes J_2 die Gerade *I* mit Hilfe des senkrecht unter E_2 gelegenen Nullpunktes N_2 fest. E_2 ist der Schnittpunkt einer durch A und den unteren Knoten 2 gelegten Geraden mit der Geraden BG. Ist weder S_G noch S' gegeben, so bestimme man die Strecke $\overline{RT} = O_2'''$, welche die Geraden *I* und *III* auf der Senkrechten durch den Knoten 1 abschneiden, indem man die Last 1 nach den Richtungen von O_2 und D_2 zerlegt. Fig. 390f. Nun gebe man der Geraden *I* eine beliebige Lage (Fig. 390e), trage $\overline{RT} = O_2'''$ auf, ziehe *III* und, nach Ermittelung des Nullpunktes N_2, die Geraden $A_2 B_2$ und *II*.

Das zuletzt beschriebene Verfahren führt am schnellsten zum Ziele, erfordert aber ein sehr genaues Zeichnen, nämlich scharfe Bestimmung des Punktes *N*. Im allgemeinen liefert die Benutzung der Werte S' und S_G die zuverlässigsten Zeichnungen, deren Güte man leicht prüfen kann, indem man nachträglich die Punkte *N* mit Hilfe der Punkte *E* und die Strecken $\overline{RT} = O'''$ durch Zerlegung einer Last 1 bestimmt.

*) Es genügen bereits zwei Dezimalstellen. Die oben angegebenen Zahlenwerte wurden vom Verfasser gerechnet.

Digitized by Google

Die Einflußlinien für U_2, U_3, U_4, R_5*) zeigt Fig. 391. Bei gegebenen Werten S' und S_G wird z. B. die Gerade I der U_3-Linie mit Hilfe der Ordinaten $A_3J_3 = S' = +2{,}308$ und $GG' = S_G = -2{,}633$ bestimmt. An Stelle von S_G kann man auch den Nullpunkt N_3 benutzen. Schließlich läßt sich auch die Strecke $\overline{RT} = U_3'''$ auf der Senkrechten durch den Knoten 3 durch Zerlegung der Last 1 nach den Richtungen von D_3 und U_3 ermitteln, Fig. 391e, worauf die Bestimmung der U_3-Linie mit Hilfe von U_3''' und Punkt N_3 erfolgen kann.

Die dem Stabe U_5 entsprechenden Punkte E_5 und N_5 befinden sich links von dem oberhalb der Kämpferdrucklinie gelegenen Knoten 4 der oberen Gurtung. Infolgedessen sind sämtliche Ordinaten der U_5-Linie negativ.

Die Einflußlinien für die Spannkräfte D und V in den Füllungsstäben sind auf Tafel 7 zusammengestellt worden. Wir beschreiben die Erzeugung der D_3-Linie Fig. 392c. Es wird $\overline{A_3J_3} = S' = +2{,}992$ und $\overline{GG'} = S_G = -0{,}335$ aufgetragen und die Gerade I gezogen; sie schneidet die Senkrechte durch den Schnittpunkt C_3 von O_3 und U_3 im Punkte C_3', und durch diesen Punkt ist die Gerade II bestimmt.**) Nun zieht man III und IV. Man kann auch I mit Hilfe der Punkte J_3 und N_3 festlegen; N_3 liegt senkrecht unter dem Schnittpunkte E_3 der Geraden BG und AC_3. Außerdem läßt sich die Strecke $\overline{RT} = D_3'''$ leicht angeben, welche die Geraden I und II auf der Senkrechten durch den Knoten 2 abschneiden. Man hat nur nötig, die Last 1 nach den Richtungen D_3 und O_3 zu zerlegen, Fig. 392f.

Am schnellsten gelangt man wieder zum Ziele, wenn man die Einflußlinie mit Hilfe der Strecke D''' und mittels der Punkte E und C bestimmt. Man zieht dann die Gerade I beliebig, setzt die Strecke $\overline{RT} = D'''$ ab, zieht III, bestimmt auf I die Punkte C' und N, legt durch C' und T die Gerade II und durch A und N die Gerade AB. Schließlich zieht man IV. Es setzt dieses Verfahren allerdings eine bequeme Lage der Punkte E und C voraus, welcher Bedingung im vorliegenden Falle hinsichtlich sämtlicher Füllungsstäbe genügt wird.

Man vergleiche übrigens die Anmerkung am Schluß der Beschreibung der O-Linien.***)

---

*) U_1 ist für jeden Belastungszustand (wenn nur senkrechte Lasten wirken) $= -H \sec \gamma_1$, hiernach ergeben sich die Grenzwerte von U_1 aus denen von H. Die Einflußlinie für H ist in No. 113 behandelt worden. Hervorzuheben ist, daß die Grenzwerte von H zur Berechnung der Widerlager gegeben sein müssen.

**) Die Punkte C werden zweckmäßig durch Rechnung bestimmt. Die Entfernung des Punktes C_2 von der Vertikalen 2 ist z. B.

$$\lambda \frac{h_2}{h_2 - h_3} = 3{,}0 \quad \frac{2{,}69}{2{,}69 - 1{,}89} = 10{,}09^{\,m}.$$

***) N_1 in Fig. 392a hat dieselbe Lage wie in N_1 in Fig. 390a.

Digitized by Google

Um die Einflußlinie für V_2 (Fig. 393c) zu bestimmen, kann man die Lage der Geraden I mit Hilfe der Werte finden $\overline{A_2 J_2} = S' = -1{,}595$ und $\overline{G G'} = S_0 = +0{,}179$ oder mittels S' und des Nullpunktes N, welcher im vorliegenden Falle mit dem Nullpunkte N_3 in Fig. 392c übereinstimmt, weil sich O_2 und U_3 in demselben Punkte C_3 schneiden wie O_3 und U_3. Nun wird die Senkrechte durch C_3 im Punkte C_3' mit I zum Schnitte gebracht, die Gerade II gezogen und hierauf III und IV. Auch die von I und II auf der Senkrechten durch den Knoten 2 abgeschnittene Strecke $\overline{RT} = V_2'''$ läßt sich schnell durch Zerlegung der Last 1 nach den Richtungen von O_2 und V_2 ermitteln. Man findet $V_2''' = 1$.

Wir gehen jetzt dazu über, die Benutzung der dargestellten Einflußlinien an einigen Beispielen zu erläutern, und behandeln zunächst den

Einfluß einer gleichförmigen Belastung. Gesucht seien die Grenzwerte für die Spannkraft U_3 unter der Voraussetzung, daß $g = 0{,}37^t$, $p = 0{,}665^t$ also $q = g + p = 1{,}035^t$ ist.

Bedeutet $\overset{+}{F}$ den Inhalt des negativen Teiles der Einflußfläche und $\overset{-}{F}$ den Inhalt des positiven Teiles, so ergibt sich nach Seite 117 (Gleich. 5 u. 6)

$$_{max}U_3 = q\overset{+}{F} - g\overset{-}{F} = qa\left(\frac{\overset{+}{F}}{a} - \frac{g}{q}\frac{\overset{-}{F}}{a}\right)$$

$$_{min}U_3 = g\overset{+}{F} - q\overset{-}{F} = qa\left(\frac{g}{q}\frac{\overset{+}{F}}{a} - \frac{\overset{-}{F}}{a}\right),$$

wo a die Länge einer beliebigen Strecke bedeutet. Verwandelt man nun die Flächen $\overset{+}{F}$ und $\overset{-}{F}$ in Dreiecke, deren Grundlinien $= a$ sind, und bezeichnet die Höhen dieser Dreiecke mit h_{II} und h_I, so erhält man

$$(1) \qquad _{max}U_3 = \frac{qa}{2}\left(h_{II} - \frac{g}{q}h_I\right); \quad _{min}U_3 = \frac{qa}{2}\left(\frac{g}{q}h_{II} - h_I\right).$$

Die Länge a wähle man so, daß $\frac{1}{2}qa$ durch eine bequeme Zahl ausgedrückt wird.*) Wird im vorliegenden Falle $a = 19{,}324^m$ gewählt, so ergibt sich $\frac{1}{2}qa = 10{,}000^t$. Man findet durch Zeichnung: $h_{II} = 0{,}12$; $h_I = 3{,}14$, also

*) Maßgebend für die Länge von a ist natürlich auch die Bedingung, daß sich bei der Flächenverwandlung nicht schleifende Schnitte ergeben dürfen. Zuweilen ist es zweckmäßig, eine sehr kleine Fläche in ein Dreieck mit der Grundlinie $\frac{1}{n}a$ zu verwandeln und dann die Höhe dieses Dreiecks durch n zu dividieren, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

Digitized by Google

$$_{max}U_3 = 10\left(0{,}12 - \frac{0{,}37}{1{,}035} \cdot 3{,}14\right) = -10^t \text{ (abgerundet);}$$

$$_{min}U_3 = 10\left(\frac{0{,}37}{1{,}035}\, 0{,}12 - 3{,}14\right) = -31^t.*)$$

In Fig. 391b wurden nur die Hilfslinien zur Ermittelung von h_I eingetragen. Es ist $\overline{B_3K} = a$, ferner $G'S$ wagerecht und $N_3H \parallel KS$, schließlich $\overline{B_3H} = h_I$.

Will man die Multiplikation mit $\frac{1}{2}qa$ sparen, so ersetze man bei Aufzeichnung der Einflußlinien die über den Träger wandernde Last 1 durch eine Last $\frac{1}{2}qa$. Dann erhält man für irgend eine Spannkraft S die Grenzwerte: $_{max}S = h_{II} - \frac{g}{q}h_I$ und $_{min}S = \frac{g}{q}h_{II} - h_I$.

Ein anderes, schon auf Seite 118 für den Fall gleich weiter Felder besprochenes Verfahren soll an der Bestimmung der Grenzwerte von V_2 erläutert werden. Um $_{max}V_2$ zu erhalten, wird jeder Knoten einer positiven Beitragstrecke mit $q\lambda = 1{,}035 \cdot 3{,}0 = 3{,}11^t$ belastet, jeder Knoten einer negativen Beitragstrecke mit $g\lambda = 0.37 \cdot 3{,}0 = 1{,}11$. Die Summe der den ersten Knoten entsprechenden Ordinaten ist in Fig. 393c: $\Sigma_2 = \eta_1 + \eta_5 + \eta_6 + \eta_7 + \eta_8 + \eta_9 = 0{,}59$ und die Summe der Ordinaten unter den übrigen Knoten: $\Sigma_1 = \eta_{12} = \eta_{13} = \eta_{14} = 1{,}59$, weshalb (nach Gleich. 7, Seite 118)

$$_{max}V_2 = 3{,}11 \cdot 0{,}59 - 1{,}11 \cdot 1{,}59 = +0.1^t$$

und nach Vertauschung der Lasten $q\lambda$ und $g\lambda$

$$_{min}V_2 = 1{,}11 \cdot 0{,}59 - 3{,}11 \cdot 1{,}59 = -4{,}3^t.**)$$

Besteht die bewegliche Belastung aus den Raddrücken von Fahrzeugen, während die ständige Belastung eine gleichförmige ist, so kann der Einfluß der letzteren auf die eben beschriebene Weise in der Form: $\frac{1}{2}ga(h_{II} - h_I)$ oder $g\lambda(\Sigma_2 - \Sigma_1)$ dargestellt werden. Die Verwandlungsgrundlinie a wähle man dann so, daß ein bequemer Multiplikator $\frac{1}{2}ga$ entsteht.***)

Einfluß der aus Einzelkräften bestehenden Verkehrslast einer Eisenbahnbrücke. Es sollen Fahrzeuge mit den in Fig. 111 (Seite 121) angegebenen Radständen und Achsenbelastungen vorausgesetzt werden. Wegen der Kürze der Brücke kommen nur Lokomotiven und Tender in Betracht. Die Brücke sei eingleisig und besitze zwei Hauptträger.

*) Vergl. das Zahlenbeispiel in No. 187.

**) Für den vorliegenden Parabelbogen muß sich bei gänzlicher Belastung mit p ergeben: $V_g = -p\lambda$. In der Tat ist auch $V_g = p\lambda[\Sigma_2 - \Sigma_1] = -p\lambda$. Die Spannkräfte O und D werden infolge gänzlicher Belastung $= 0$, und es muß also beispielsweise in Fig. 392c sein $\eta_1 + \eta_2 + \eta_5 + \eta_6 + \eta_7 + \eta_8 + \eta_9 = \eta_{13} + \eta_{14}$.

***) Oft empfiehlt sich ein Cremonascher Plan. Beim Parabelbogen benutze man die Gleichungen (1) auf Seite 376.

Digitized by Google

Es ist dann mit den Raddrücken $L = \frac{1}{2}\,13'$ (Lokomotive) und $T = \frac{1}{2}\,9'$ (Tender) zu rechnen.

Gesucht seien die Grenzwerte von U_4, Fig. 391c auf Tafel 6. Um ${}_{min}U_4$ zu erhalten, wird ein Zug auf die negative Beitragstrecke gestellt, so daß die schwersten Lasten in der Nähe von G und eine schwere Last bei G selbst liegt. Hierauf wird der Wert ${}_{min}U_{p4} = L\Sigma\eta_L = T\Sigma\eta_T$ berechnet. Die gefährlichste Stellung des Lastenzuges findet man am schnellsten durch Probieren. Ist die Einflußlinie für eine Strecke eine Gerade, so dürfen beliebige innerhalb dieser Strecke liegende Lasten zu einer Mittelkraft vereinigt werden. Bei der in der Figur angegebenen Laststellung, welche sich als die gefährlichste erwies, ist die (mit dem Zirkel zu bestimmende) Summe der den fünf Lasten L entsprechenden Ordinaten = 8,33. Dem mittelsten Rade des Tenders, welcher ein Gewicht von 27' besitzt, entspricht $\eta = 1{,}55$. Mithin ergibt sich

$$ {}_{min}U_{p4} = -\tfrac{1}{2}\,[13 \cdot 8{,}33 + 27 \cdot 1{,}55] = -75{,}1'. $$

In gleicher Weise findet man, daß die Belastung der positiven Beitragstrecke erzeugt

$$ {}_{max}U_{p4} = +\tfrac{1}{2}\,39 \cdot 0{,}18 + \tfrac{1}{2}\,9 \cdot 0{,}07 = +3{,}8'. $$

Es sollen noch die Grenzwerte von D_3 bestimmt werden. Die positive Beitragstrecke ist hier so kurz, daß bei Aufstellung einer Lokomotive nebst Tender der größere Teil des letzteren jenseits der Belastungsscheide N_3 liegt. Der in Fig. 392b abgebildeten ungünstigsten Zugstellung entspricht

$$ {}_{max}D_3 = \tfrac{1}{2}\,13 \cdot 2{,}22 - \tfrac{1}{2} \cdot 27 \cdot 0{,}14 = +14{,}43 - 1{,}89 = +12{,}5'. $$

Läßt man den Tender fort, so erhält man den Wert ${}_{max}D_3 = 14{,}4'$. Trotzdem diese Beanspruchung, des höchst unwahrscheinlichen Belastungszustandes wegen, etwas zu ungünstig gerechnet ist, dürfte es sich empfehlen, der fraglichen Diagonale einen entsprechend großen Querschnitt zu geben. Jedenfalls ist der erstgerechnete Wert ${}_{max}D_3 = 12{,}5'$ als zu klein anzusehen, sobald nicht die Untersuchung der Wirkung kürzerer, wenn auch leichterer Fahrzeuge das Gegenteil bewiesen hat. Besonders aber wäre noch der Einfluß einer sogenannten Tender-Lokomotive schwerster Art zu bestimmen.*)

Die negative Beitragstrecke der D_3-Linie besteht aus zwei Teilen. Schließt man die Belastung der eingleisigen Brücke durch zwei getrennte Züge als unwahrscheinlich aus, so erhält man für den in der Fig. 393b von B aus vorgeschobenen Lastenzug

$$ {}_{min}D_3 = -\tfrac{1}{2}\,(39 \cdot 0{,}43 + 27 \cdot 0{,}21 + 13 \cdot 0{,}04) = -11.5'. $$

*) Vergl. No. 99, Seite 168.

Digitized by Google

XII. Abschnitt.

Statisch bestimmte Hängebrücken und Gelenkbögen, versteift durch Balken.

§ 47.

Hängebrücken, deren Hauptträger aus einfachen Dreiecknetzen bestehen.

a. Untersuchung des in Fig. 394 dargestellten Hängewerks.

188. Der vorliegende Träger besteht aus vier gegliederten Scheiben *I*, *II*, *III*, *IV*, deren jede auf zwei wagerechten Gleitlagern ruht, und welche durch die Stäbe B_1C, CA, BD, DA_2 miteinander verbunden sind. Die Stützpunkte C und D werden ebenfalls auf wagerechten Geraden geführt. In A_1 und B_2 greifen die Rückhaltketten an. Die Spannkräfte in den Kettengliedern A_1L und B_2N sollen zu den Stützen-

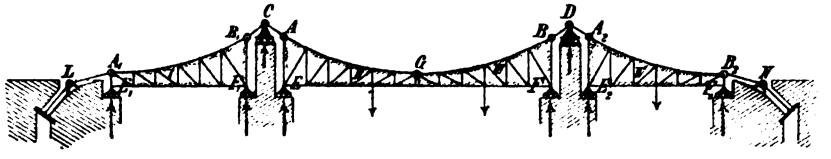


Fig. 394.

widerständen gerechnet werden. Jede der beiden Scheiben *I* und *IV* ist dann durch drei Widerstände gestützt, deren Richtungen sich nicht in einem und demselben Punkte schneiden, so daß alle auf *I* und *IV* wirkenden Kräfte in eindeutiger Weise auf die Widerlager übertragen werden. Die Scheiben *II* und *III* bilden einen Dreigelenkbogen, dessen Kämpferwiderstände sich aus den in E und F angreifenden lotrechten Auflagerkräften und den Spannkräften der Stäbe CA und BD zusammensetzen. Die Spannkräfte der Stäbe CA und BD aber sind im Gleichgewicht mit den in C und D angreifenden lotrechten Widerständen der Mittelpfeiler und den Spannkräften der Stäbe B_1C und A_2D. Ergeben sich an den Gleitlagern negative Auflagerdrücke, so muß für eine Verankerung dieser Lager gesorgt werden.

Digitized by Google

189. Untersuchung der Mittelöffnung. Wir ziehen hier nur die Wirkung senkrechter, abwärts gerichteter Lasten in Betracht und verfolgen zunächst den Einfluß einer über der Mittelöffnung ruhenden Einzellast P. Dabei setzen wir den allgemeineren Fall ungleich hoch liegender Aufhängepunkte A und B voraus. Fig. 395. Die Spannkräfte S_a und S_d*) der in A und B angreifenden Stäbe zerlegen wir in die senkrechten Seitenkräfte A_o und B_o und in die beiden mit der Schlußlinie AB zusammenfallenden, entgegengesetzt gleichen Seitenkräfte H. Hierauf denken wir uns die Angriffspunkte der an den

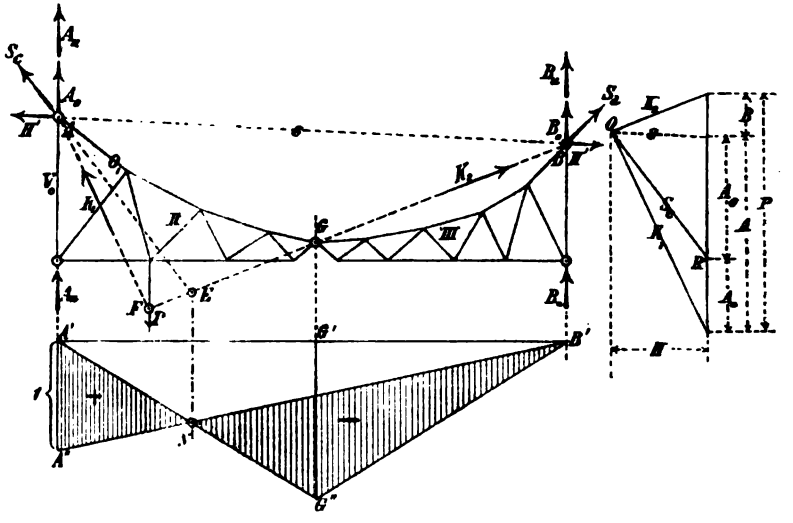


Fig. 395.

Auflagern der Scheiben *II* und *III* wirksamen senkrechten Widerstände A_u und B_u nach A und B verlegt, und vereinigen A_o und A_u zu $A = A_o + A_u$, desgl. B_o und B_u zu $B = B_o + B_u$. Es verhält sich jetzt der Trägerteil AGB wie ein Bogen mit drei Gelenken, auf welchen die Ergebnisse der im § 24 und im Abschnitte XI durchgeführten Untersuchungen angewendet werden können. Zu diesem Zwecke verwandele man das Hängewerk durch Umkehrung in einen Bogenträger, berechne die Spannkräfte auf die früher angegebene Weise und ändere schließlich sämtliche Vorzeichen. Nur bei der Berechnung

*) Wir bezeichnen die Spannkräfte in den Stäben LA_1, B_1C, CA, BD, der Reihe nach mit S_a, S_b, S_c, S_d.

Digitized by Google

der Spannkraft V_0 in einer Endvertikalen ist die Verlegung von A_u unzulässig. Man bestimme S_o mit Hilfe der Bedingung, daß die wagerechte Projektion dieser Kraft $= H$ sein muß, zeichne hierauf das Kräftepolygon für den Knoten A und entnehme diesem V_0. Fällt S_o mit O_1 zusammen, wie bei dem in der Fig. 396 abgebildeten Träger, so ergibt sich $V_0 = 0$. *Die Endvertikale darf dann weggelassen werden.**)

Ist die Mittelöffnung unbelastet, so verschwinden innerhalb derselben sämtliche Spannkräfte. Lasten, welche auf die Scheiben I und IV (Fig. 394) wirken, sind ohne Einfluß auf die Inanspruchnahme des Trägerteiles AGB; sie erzeugen auch in den Stäben CA, BD, B_1C, DA_2, LA_1, B_1N keine Spannungen, und es verhalten sich dann die Scheiben I und IV wie einfache Balken.

Zahlenbeispiel. Fig. 396 stellt die Hälfte des einen Hauptträgers einer Fußgängerbrücke dar, welche die in dem Zahlenbeispiele in No. 187 angenommenen Belastungen $g = 0{,}37'$, $p = 0{,}665'$, $q = 1{,}035'$ f. d. Meter erfährt. Die Mittelöffnung hat dieselben Abmessungen wie der früher behandelte Bogenträger (Fig. 385). Es entstehen dann im Trägerteile dieser Öffnung Spannkräfte, welche sich von den in der Fig. 389 zusammengestellten nur durch die Vorzeichen unterscheiden, mit Ausnahme von V_0, welches hier $= 0$ wird.

Um noch die Grenzwerte des Stützenwiderstandes A_u (Fig. 395) zu bestimmen, suchen wir zunächst die Einflußlinie für A_u. Es ist $A_u = A - A_o$, wobei A den Auflagerdruck eines einfachen Balkens AB bedeutet, während A_o — ebenso wie die Spannkraft S_o — proportional dem Horizontalschube H ist. Die Einflußlinie für A_o besteht (wie die H-Linie) aus zwei Geraden $A'G''$ und $G''B'$, deren Schnittpunkt G'' dem Scheitelgelenk entspricht, und es ist deshalb die schraffierte Fläche in der Fig. 395 (in welcher die Gerade $B'A''$ die Einflußlinie für A bedeutet) die gesuchte Einflußfläche für A_u; sie ist bestimmt, sobald die Lage des Nullpunktes N gegeben ist. Um N zu finden, untersuchen wir den Einfluß einer links von G angreifenden Last P, welche die Gerade BG (Fig. 395) in F schneidet, zerlegen P in $K_2 \parallel BG$ und

*) Soll sich der Trägerteil AGB vollständig wie ein umgekehrter Fachwerkbogen verhalten, so müssen die in Fig. 394 angeordneten Auflager der Scheiben *II* und *III* fortbleiben, und die Mittellinien der Endvertikalen von *II* und *I* müssen in die Senkrechte durch C fallen; es können diese Stäbe in einem entsprechenden Hohlraume des Pfeilers untergebracht werden. C wird wie vorhin auf einer Wagerechten geführt. Diese Anordnung ist jedoch nicht zu empfehlen. Verfasser hält es für das beste, die Endvertikale fortzulassen und das Gelenk G in die untere Gurtung zu legen.

Digitized by Google

in $K_1 \parallel AF$ und ziehen hierauf im Kräfteplane den Strahl $s \parallel AB$; er zerlegt P in A und B. Wird noch der Strahl $OR \parallel S_e$ gezogen, so gibt die Strecke OR die Größe der Spannkraft S_e an, und der

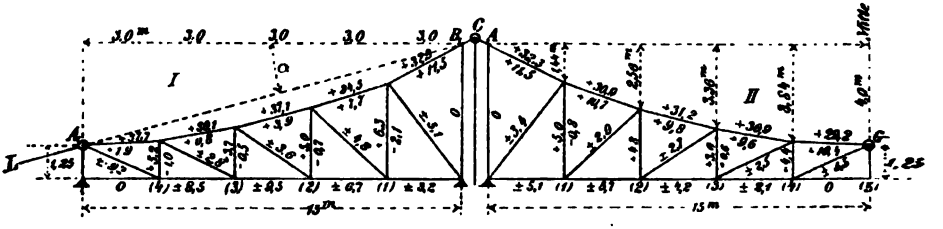


Fig. 396.

Punkt R zerlegt A in A_o und A_u. Fällt die Gerade AF mit der Richtung von S_e zusammen, geht also P durch den Schnittpunkt E von S_e und BG, so ergibt sich $A_u = 0$, und hieraus folgt, daß der Nullpunkt N auf der Senkrechten durch E liegt.

Im vorliegenden Beispiele liegt E im vierten Felde. Die Ermittelung von ${}_{max}A_u$ und ${}_{min}A_u$ geschieht hier, mit Beachtung der für den Parabelbogen nachgewiesenen einfachen Gesetze und mit Bezugnahme auf die Rechnungen in No. 187, wie folgt. Belastet man, um ${}_{min}A_{up}$ zu erhalten, nur die Knoten 4 bis 9 und zwar mit je $p\lambda$, so entsteht (nach Seite 382)

$$A = 21\,A' = 21 \cdot 0{,}2 = 4{,}2^t, \quad H = 19\,H' = 19 \cdot 0{,}75 = 14{,}25^t.$$

Da nun $A_o = H \operatorname{tg} \gamma_1$ und $A_u = A - A_o = A - H \operatorname{tg} \gamma_1$ ist (wo γ_1 Neigungswinkel von CA), so folgt

$${}_{min}A_{up} = 4{,}2 - 14{,}25\,\frac{1{,}44}{3{,}00} = -2{,}6^t.$$

Bei gänzlicher Belastung mit p wird (wegen des Zusammenfallens des Seilpolygons mit der oberen Gurtung) $A_{up} = \frac{1}{2} p\lambda = 1{,}0^t$; ferner ist ${}_{max}A_{up} + {}_{min}A_{up} = A_{up}$, also ${}_{max}A_{up} = +2{,}6 + 1{,}0 = +3{,}6^t$. Die ständige Belastung erzeugt $A_{ug} = \frac{1}{2} g\lambda = \frac{1}{2} \cdot 0{,}37 \cdot 3{,}0 = 0{,}6^t$ weshalb sich schließlich ergibt ${}_{min}A_u = -2{,}6 + 0{,}6 = -2{,}0^t$ und ${}_{max}A_u = +3{,}6 + 0{,}6 = +4{,}2^t$.*)

Wegen des negativen Wertes ${}_{min}A_u$ muß das fragliche Auflager verankert werden.

*) Es unterscheiden sich diese Werte von den für die Endvertikale des Bogenträgers in Fig. 389 gefundenen nur durch die Vorzeichen.

Digitized by Google

190. Untersuchung der Seitenöffnung. So lange nur Lasten zwischen A_1 und B_1 wirken, verhält sich der Trägerteil $A_1 B_1$ wie ein einfacher Balken; es gelten die im § 30 abgeleiteten Gesetze. Wird also die Einflußlinie für irgend eine Spannkraft S gesucht (Fig. 397), so ermittelt man die Spannkraft S' für den früher erklärten Zustand $A_1 = 1$ (vergl. No. 143) sowie den Schnittpunkt E der beiden anderen vom Schnitte tt getroffenen Stäbe und legt nun der Reihe nach die drei Geraden fest, aus denen die Einflußlinie besteht. Befindet sich E links von A_1, so entsteht im m^{ten} Felde eine Belastungsscheide. Liegt E zwischen A_1 und B_1, so tragen alle innerhalb $A_1 B_1$ angreifenden Lasten zu der fraglichen Spannkraft in gleichem Sinne bei. Wie bei ungünstiger Lage des Punktes E zu verfahren ist, und auf welche Weise die Schärfe der Zeichnung geprüft werden kann, ist früher auseinandergesetzt worden. Vergl. Seite 336.

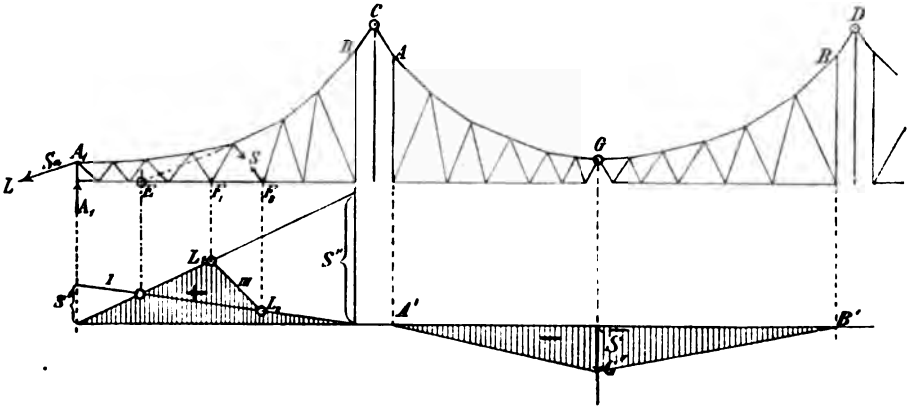


Fig. 397.

Es bleibt jetzt nur noch der Einfluß einer über der Mittelöffnung ruhenden Belastung anzugeben. Hat man den durch diese Belastung hervorgerufenen Horizontalschub H bestimmt, so findet man die Spannkräfte S_b und S_s nach Fig. 398 mittels der Bedingung, daß Gleichgewicht nur möglich ist, wenn die wagerechte Projektion jeder dieser Kräfte $= H$ ist. Indem man jetzt $L A_1 B_1 C$ als ein Seilpolygon auffaßt, welches mit der Polweite H zu den Kräften A_1 und B_1 gezeichnet ist, und im Kräfteplane durch O zu $A_1 B_1$ eine Parallele (s) zieht, kann man auf die in der Fig. 398 angegebene Weise die Größe und den Sinn von A_1 und B_1 feststellen. Fällt die Richtung von S_s mit der Geraden $A_1 B_1$ zusammen, wie dies in dem Beispiele in Fig. 396 angenommen wurde, so ergibt sich $A_1 = 0$.

Digitized by Google

Gesetzt nun, es stelle die Kraft H in Fig. 398 den Horizontalschub infolge einer im Scheitelgelenk G der Mittelöffnung angreifenden Last *Eins* vor, und es entstehe in dem Stabe S, dessen Einflußlinie

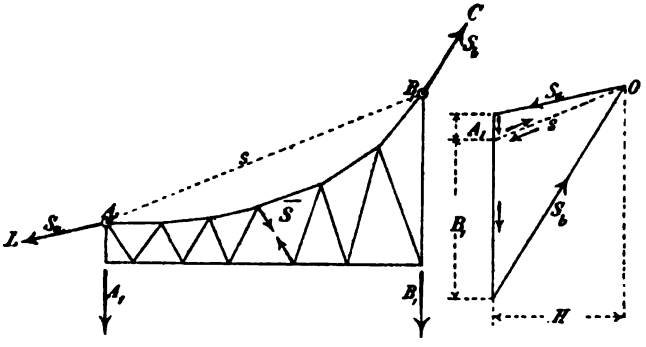


Fig. 398.

gesucht wird, infolge der auf die Scheibe I wirkenden Kräfte S_0, S_1, A_1, B_1 (welche sämtlich proportional H sind) eine Spannkraft $\overline{S}$. Dann stellt in Fig. 397 das Dreieck $A'G''B'$, dessen Spitze dem Scheitelgelenk G entspricht und dessen Höhe $\overline{GG'} = \overline{S}$ ist, den rechts von B_1 gelegenen Teil der fraglichen Einflußfläche dar, und es bereitet jetzt keine Schwierigkeit mehr, die Grenzwerte der gesuchten Spannkraft zu bestimmen.*) Das beschriebene Verfahren gilt für die Gurtungen und die Füllungsstäbe. Die Spannkräfte S' und $\overline{S}$ werden am zweckmäßigsten mit Hilfe von *Cremona*schen Kräfteplänen ermittelt, wobei allerdings das Ziehen von Parallelen zu den kurzen Gurtstäben vermieden werden muß. Wir verweisen in dieser Beziehung auf Seite 308 und 378.

Zahlenbeispiel. Bei dem in der Fig. 396 dargestellten gleichmäßig mit $g = 0{,}37^t$ und $p = 0{,}665^t$ belasteten Fachwerke mit Vertikalen lassen sich, da die Knotenpunkte der oberen Gurtung jeder der beiden kongruenten Scheiben I und II auf Parabeln liegen, deren senkrechte Achsen durch A, beziehungsweise G gehen, wesentliche Vereinfachungen erzielen, wie die folgenden Rechnungen zeigen werden.

Zunächst sollen diejenigen Spannkräfte S_M bestimmt werden, welche in den Stäben der Seitenöffnung entstehen, sobald die Mittelöffnung

*) Für den in der Fig. 397 dargestellten Fall ergibt sich S' positiv und S negativ. Lasten, welche auf Scheibe IV wirken (Fig. 394) sind ohne Einfluß auf die Inanspruchnahme der Scheibe I.

Digitized by Google

gänzlich und zwar mit p belastet wird. Es greift dann am linken Ende nur eine von B_1 nach A_1 gerichtete äußere Kraft S_a an, Fig. 399,

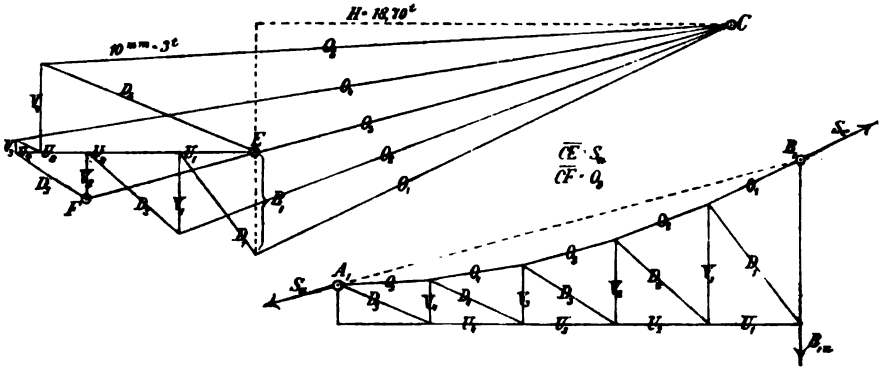


Fig. 399.

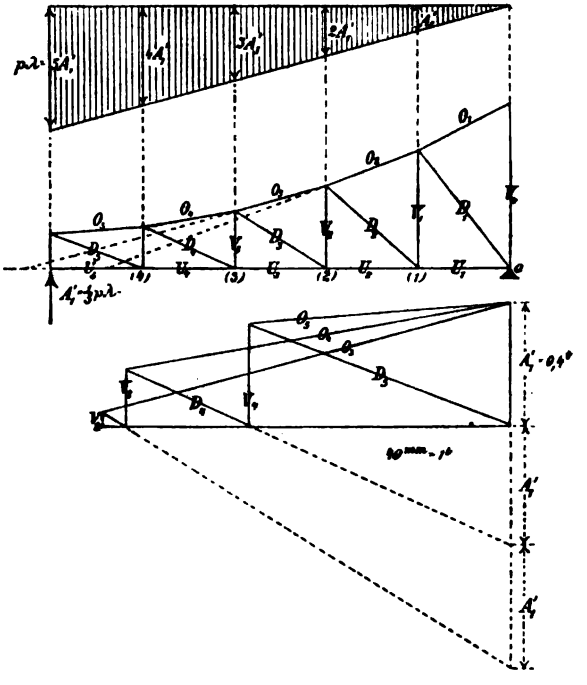


Fig. 400.

deren wagerechte Projektion $= H_p = \frac{p l^2}{8 f} = 18{,}70^t$ ist. Der für diesen

Digitized by Google

Zustand in Fig. 399 gezeichnete *Cremona*sche Plan liefert die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte S_M. Dieselbe Tabelle gibt noch die in der Fig. 400 dargestellten Spannkräfte S_A für den Fall an, daß am linken Ende nur der Stützenwiderstand $A'_1 = \frac{1}{5} p\lambda = \frac{1}{5} \cdot 2{,}0 = 0{,}4^t$ angreift, welchen eine im Knoten 1 wirksame Last $p\lambda$ hervorbringt.*)

Stab	S_M	S_A	Stab	S_M	S_A
O_1	20,8		U_1	— 3,2	
O_2	23,4		U_2	— 6,7	
O_3	26,3		U_3	— 9,5	
O_4	28,6		U_4	— 8,5	
O_5	27,3		U_5	0	
D_1	+ 5,1		V_1	— 3,2	
D_2	+ 4,8		V_2	— 1,8	— 0,04
D_3	+ 3,35	+ 0,08	V_3	Zug	— 0,20
D_4	Druck	+ 0,47	V_4	Zug	— 0,35
D_5	Druck	+ 0,92			
	Tonnen			Tonnen	

Bei gänzlicher Belastung von Seiten- und Mittelöffnung sind die Stäbe der unteren Gurtung und die Diagonalen spannungslos, weil das Mittelkraftspolygon mit der oberen Gurtung zusammenfällt**), während in den Stäben der oberen Gurtung Spannkräfte

$$O_{1p} = + 20{,}8^t; \quad O_{2p} = + 20{,}0; \quad O_{3p} = + 19{,}4; \quad O_{4p} = + 18{,}9;$$
$$O_{5p} = + 18{,}8^{***})$$

entstehen und in den Vertikalen die Spannkräfte

$$V_{0p} = 0; \quad V_{1p} = V_{2p} = V_{3p} = V_{4p} = p\lambda = 2{,}0^t; \quad V_{5p} = - A_{1p}.$$

Die ständige Belastung ruft hervor $U_{mg} = H_g \sec \beta_m$ d. i. (vergl. die Werte U_g auf Seite 378)

*) Für die Diagonalen brauchen (wie die folgenden Rechnungen lehren werden) nur die positiven und für die Vertikalen nur die negativen Spannkräfte S_M gemessen zu werden. Die Spannkräfte S_A sind nur für diejenigen Füllungsstäbe zu bestimmen, deren zugehöriger Punkt E (Fig. 397) links von A_1 liegt. Da sich nun O_2 und U_2 rechts von A_1 schneiden, desgl. O_1 und U_1, so genügt die Angabe der S_A für die Füllungsstäbe D_5, D_4, D_3, V_4, V_3, V_2. Hierauf ist namentlich zu achten, wenn die S_A und S_M berechnet werden sollen. Bei ungleichen Feldweiten ist nicht der Zustand $A_1 = A'_1$ zu untersuchen, sondern der Zustand $A_1 = 1$.

**) Vergl. Seite 375.

***) Es ist $O_{mp} = H_p \sec \beta_m$, wo β_m = Neigungswinkel von O_m. Hiernach sind die O_{mp} entgegengesetzt gleich den auf Seite 378 ermittelten U_{mp}.

Digitized by Google

$$O_{1g} = +11{,}5'; \quad O_{2g} = +11{,}1'; \quad O_{3g} = +10{,}8'; \quad O_{4g} = +10{,}5';$$
$$O_{5g} = +10{,}4';$$
$$V_{0g} = 0; \quad V_{1g} = V_{2g} = V_{3g} = V_{4g} = g\lambda; \quad V_{5g} = -A_{1g};$$

sie ist ohne Einfluß auf die Spannkräfte D und U.

Nach diesen vorbereitenden Rechnungen lassen sich die Grenzwerte sämtlicher Spannkräfte schnell angeben.

1) Untere Gurtung. In irgend einem Stabe U entsteht der größte Druck oder der größte Zug, je nachdem nur die Mittelöffnung oder nur die fragliche Seitenöffnung belastet wird. Da $U_g = 0$ ist, so folgt ${}_{max}U = -{}_{min}U$. Die Spannkräfte ${}_{min}U$ sind gleich den in der Tabelle angegebenen (von der Belastung der Mittelöffnung herrührenden) Spannkräften S_M. Man erhält also

$$\left.\begin{matrix}max\\min\end{matrix}\right\} U_1 = \pm 3{,}2'; \quad \left.\begin{matrix}max\\min\end{matrix}\right\} U_2 = \pm 6{,}7'; \quad \left.\begin{matrix}max\\min\end{matrix}\right\} U_3 = \pm 9{,}5'; \quad \left.\begin{matrix}max\\min\end{matrix}\right\} U_4 = \pm 8{,}5'.$$

Die Spannkraft U_5 ist $= 0$.

2) Obere Gurtung. Belastet man nur die Mittelöffnung mit p, so entsteht ${}_{max}O_g = S_M$; wird nur die Seitenöffnung mit p belastet, so wird ${}_{min}O_p$ erzeugt. Dabei ist ${}_{min}O_p + {}_{max}O_p = O_p =$ Spannkraft infolge gänzlicher Belastung beider Öffnungen, woraus ${}_{min}O_p = -S_M + O_p$. Rechnet man den Einfluß der ständigen Belastung hinzu, so entsteht

$${}_{max}O = S_M + O_g \text{ und } {}_{min}O = -S_M + O_p + O_g.$$

Auf diese Weise findet man

$$\begin{aligned}
{}_{max}O_1 &= +20{,}8 + 11{,}5 = +32{,}3'\\
{}_{max}O_2 &= +23{,}4 + 11{,}1 = +34{,}5'\\
{}_{max}O_3 &= +26{,}3 + 10{,}8 = +37{,}1'\\
{}_{max}O_4 &= +28{,}6 + 10{,}5 = +39{,}1'\\
{}_{max}O_5 &= +27{,}3 + 10{,}4 = +37{,}7'\\
{}_{min}O_1 &= -20{,}8 + 20{,}8 + 11{,}5 = +11{,}5'\\
{}_{min}O_2 &= -23{,}4 + 20{,}0 + 11{,}1 = +\ 7{,}7'\\
{}_{min}O_3 &= -26{,}3 + 19{,}4 + 10{,}8 = +\ 3{,}9'\\
{}_{min}O_4 &= -28{,}6 + 18{,}9 + 10{,}5 = +\ 0{,}8'\\
{}_{min}O_5 &= -27{,}3 + 18{,}8 + 10{,}4 = +\ 1{,}9'.
\end{aligned}$$

Die obere Gurtung wird hiernach nur auf Zug beansprucht, darf also auch aus flachen Stäben bestehen.

Für die Rückhaltkette A_1L (Fig. 396), deren Neigungswinkel gegen die Wagerechte $= \alpha$ sei, erhält man

$${}_{max}S_a = (H_g + H_p)\sec\alpha = (10{,}4 + 18{,}70)\,1{,}035 = +30{,}2'$$
$${}_{min}S_a = H_g \sec\alpha - 10{,}4 \cdot 1{,}035 = +10{,}8'.$$

Digitized by Google

3) Diagonalen. Da der Schnittpunkt von O_1 und U_1 rechts von A_1 liegt, desgleichen der Schnittpunkt von O_2 und U_2, so tragen alle über der Seitenöffnung befindlichen Lasten zu den Spannkräften D_1 und D_2 in gleichem Sinne bei. Ausschließliche Belastung der Mittelöffnung erzeugt (da $D_g = 0$ ist) die Spannkräfte

$$_{max}D_1 = S_M = +\,5{,}1^t \text{ und } _{max}D_2 = +\,4{,}8^t.$$

Ausschließliche Belastung der Seitenöffnung erzeugt (wegen $_{min}D = -\,_{max}D$) die Spannkräfte

$$_{min}D_1 = -\,5{,}1^t \text{ und } _{min}D_2 = -\,4{,}8^t.$$

In jeder der übrigen Diagonalen rufen Lasten, welche auf der Seitenöffnung ruhen, Zug oder Druck hervor, je nachdem sie rechts oder links von der fraglichen Diagonale liegen. Da nun der Wert S_M für die Diagonale D_3 positiv ist, so entsteht $_{max}D_3$, wenn jeder der Knoten 2 und 1 mit $p\lambda$ und außerdem die ganze Mittelöffnung belastet wird. Die in 2 und 1 angreifenden Lasten $p\lambda$ erzeugen: $A'_1 = A' + 2A'_1 = 3A'_1$ (siehe Fig. 400) und $D_3 = 3S_A = 3 \cdot 0{,}08 = 0{,}24^t$, weshalb

$$_{max}D_3 = 0{,}24 + S_M = 0{,}24 + 3{,}35 = +\,3{,}6^t = -\,_{min}D_3.$$

In D_4 und D_5 erzeugt die Belastung der Mittelöffnung Druckspannungen. Um $_{max}D_4$ zu erhalten, belastet man nur die Knoten 1, 2, 3 und um $_{max}D_5$ zu erzeugen, nur die Knoten 1, 2, 3, 4. Im ersten Falle ergibt sich

$$A_1 = A'_1(1 + 2 + 3) = 6A'_1;$$
$$_{max}D_4 = 6 \cdot 0{,}47 = +\,2{,}8^t = -\,_{min}D_4.$$

Im zweiten Falle findet man

$$A_1 = A'_1(1 + 2 + 3 + 4) = 10A'_1;$$
$$_{max}D_5 = 10 \cdot 0{,}920 = +\,9{,}2^t = -\,_{min}D_5.$$

4) Vertikalen. In der Vertikale V_1 erzeugt, da der Schnittpunkt von O_2 und U_1 rechts von A_1 liegt, jede Last über der Seitenöffnung einen Zug. Es entsteht also $_{min}V_{1p} = S_M$ infolge ausschließlicher und gänzlicher Belastung der Mittelöffnung mit p, ferner, wenn nur die Seitenöffnung mit p belastet wird, $_{max}V_{1p} = -\,S_M + V_p$.*) Rechnet man $V_g = g\lambda = 1{,}11$ hinzu, so findet man

$$_{min}V_1 = S_M + g\lambda = -\,3{,}2 + 1{,}1 = -\,2{,}1^t;$$
$$_{max}V_1 = -\,S_M + p\lambda + g\lambda = +\,3{,}2 + 2{,}0 + 1{,}1 = +\,6{,}3^t.$$

In der Vertikale V_2 erzeugen (da der Schnittpunkt von O_3 und U_2 links von A_1 liegt) die Belastungen der Knoten 2, 3, 4, Zugspannungen.

*) Es ist $_{max}V_p + _{min}V_p$ gleich der infolge gänzlicher Belastung beider Öffnungen entstehenden Spannkraft V_p.

Digitized by Google

Um $_{min}V_{2p}$ zu erhalten, wird, da S_M negativ ist, die Mittelöffnung mit p belastet und außerdem nur der Knoten 1 mit $p\lambda$. Letztere Last ruft hervor: $A_1 = A'_1$, also $V_{2p} = S_A = -0{,}04$, weshalb $_{min}V_{2p} = S_M + S_A = -1{,}8 - 0{,}04 = -1{,}84^t$. Man erhält nun

$$_{min}V_2 = -1{,}84 + g\lambda = -1{,}84 + 1{,}11 = -0{,}7^t$$
$$_{max}V_2 = +1{,}84 + p\lambda + g\lambda = +1{,}84 + 2{,}0 + 1{,}11 = +5{,}0^t.$$

In den Vertikalen V_3 und V_4 entstehen infolge der Belastung der Mittelöffnung Zugspannungen. Man findet $_{min}V_{p3}$ und $_{min}V_{p4}$, indem man zuerst nur die Knoten 1 und 2, hierauf nur die Knoten 1, 2, 3 mit je $p\lambda$ belastet. Im ersteren Falle entsteht

$$A_1 = A'_1(1+2) = 3A'_1;\quad _{min}V_{p3} = 3S_A = -3 \cdot 0{,}20 = -0{,}60^t$$
$$_{min}V_3 = -0{,}60 + g\lambda = +0{,}5^t$$
$$_{max}V_3 = +0{,}60 + p\lambda + g\lambda = +3{.}7^t,$$

und im zweiten Falle

$$A_1 = A'_1(1+2+3) = 6A'_1;\quad _{min}V_{p4} = 6S_A = -6 \cdot 0{,}35 = -2{,}10^t$$
$$_{min}V_4 = -2{,}10 + g\lambda = -1{,}0^t$$
$$_{max}V_4 = +2{,}10 + p\lambda + g\lambda = +5{,}2^t.$$

Die gewonnenen Spannkräfte sind in der Fig. 396 übersichtlich zusammengestellt worden.

Es sind noch die Grenzwerte der an der Scheibe I angreifenden Stützenwiderstände B_1 und A_1 anzugeben. Bei gänzlicher Belastung der 15m weiten Seitenöffnung mit $p = 0{,}665^t$ und unbelasteter Mittelöffnung ergibt sich: $_{max}B_{1p} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}665 \cdot 15 = 4{,}99^t$. Ausschließliche und gänzliche Belastung der Mittelöffnung mit p erzeugt den größten negativen Widerstand B_{1p} (d. i. $_{min}B_{1p}$); er ist durch den Kräfteplan in Fig. 399 gegeben, kann aber auch im vorliegenden Falle mittels der Gleichung $_{min}B_{1p} + _{max}B_{1p} = \frac{p\lambda}{2} = 1{,}0^t$ bestimmt werden. Man findet: $_{min}B_{1p} = -4{,}99 + 1{,}0 = -3{,}99^t$. Die ständige Belastung ruft hervor: $B_{1g} = \frac{1}{2} g\lambda = \frac{1}{2} \cdot 1{.}11 = 0{,}56^t$ und es ergibt sich schließlich

$$_{max}B_1 = 4{,}99 + 0{,}56 = +5{,}5^t;\quad _{min}B_1 = -3{,}99 + 0{,}56 = -3{,}4^t.$$

Da $_{min}B_1$ negativ ist, muß die Scheibe I bei B_1 an dem Pfeiler verankert werden.

Am Auflager A_1 ruft ausschließliche und gänzliche Belastung der Seitenöffnung mit $p = 0{,}665^t$ den Widerstand $A_{1p} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}665 \cdot 15 = 4{,}99^t$ hervor, ausschließliche und gänzliche Belastung der Mittelöffnung den Widerstand $A_1 = 0$. Die ständige Belastung $g = 0{,}37^t$ erzeugt hiernach: $A_{1g} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}37 \cdot 15 = 2{,}77^t$ und im ganzen entsteht $A_1 = 4{,}99 + 2{,}77 = +7{,}8^t$. Der Widerstand A_1 ist stets positiv

Digitized by Google

b. Untersuchung des aus Fischbauchträgern zusammengesetzten Hängewerks in Fig. 401.*)

191. Das vorliegende Hängewerk, dessen Auflagergelenke A und B auf wagerechten Geraden geführt werden, und welches an den Enden (bei A_1) in derselben Art gestützt wird, wie der vorhin untersuchte Träger (Fig. 394), kann auch in derselben Weise wie jener berechnet werden. Der mittlere Teil AGB ist ein umgekehrter Bogen mit drei Gelenken, während sich jede Seitenöffnung A_1A unter dem Einflusse der auf ihr ruhenden Lasten wie ein einfacher Balken verhält

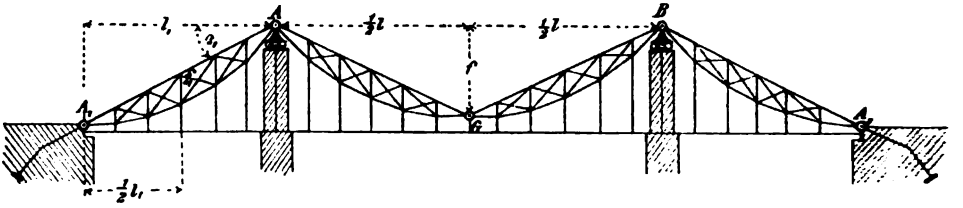


Fig. 401.

und infolge Belastung der Mittelöffnung noch durch zwei in A_1 und A angreifende, entgegengesetzt gleiche Kräfte beansprucht wird, welche die Richtungen AA_1 und A_1A haben. Es möge nur noch auf einige Vereinfachungen hingewiesen werden, die wegen der geradlinigen oberen Gurtungen möglich ist.

Zerlegt man die am Trägerteile AG in A und G angreifenden Widerstände auf die in No. 185 angegebene Art in die Seitenkräfte A', B' und Q (Fig. 402b) und denkt die Spannkräfte U, D und V mittels *Ritter*scher Momentengleichungen bestimmt, so sieht man sofort ein, daß alle diese Spannkräfte unabhängig von Q sind, da sämtliche Drehpunkte in der Geraden AG liegen. Hieraus folgt aber, daß bei der Ermittelung der U, D und V das Trägerstück AG als einfacher Balken behandelt werden darf.

Ist also sowohl die ständige als auch die veränderliche Belastung eine gleichförmig verteilte (g und p), und liegen die Knotenpunkte der unteren Gurtung auf einer Parabel mit senkrechter Achse, in welchem Falle, mit den in der Fig. 402 a und b angegebenen Bezeichnungen,

*) In ähnlicher Weise ist die Hängebrücke über den *Monongahela* bei *Pittsburgh* (Nord-Amerika) ausgeführt. An Stelle der seitlichen Fischbauchträger sind (wie in Fig. 403) geradlinige Rückhaltketten vorhanden.

Digitized by Google

$y_m = \frac{4fx_m(l-x_m)}{l^2}$ und $h_m = \frac{4f'x_m(l'-x_m)}{l'^2}$, ferner $f' = \frac{1}{4}f$*)

ist, so gelten die Gleichungen

$$(1) \quad {}_{max}U_m = \frac{ql'^2}{8f'}\sec\gamma_m = \frac{ql^2}{8f}\sec\gamma_m \text{**)}$$

$$(2) \quad {}_{max}D_m = \frac{pl'}{8f'}d_m$$

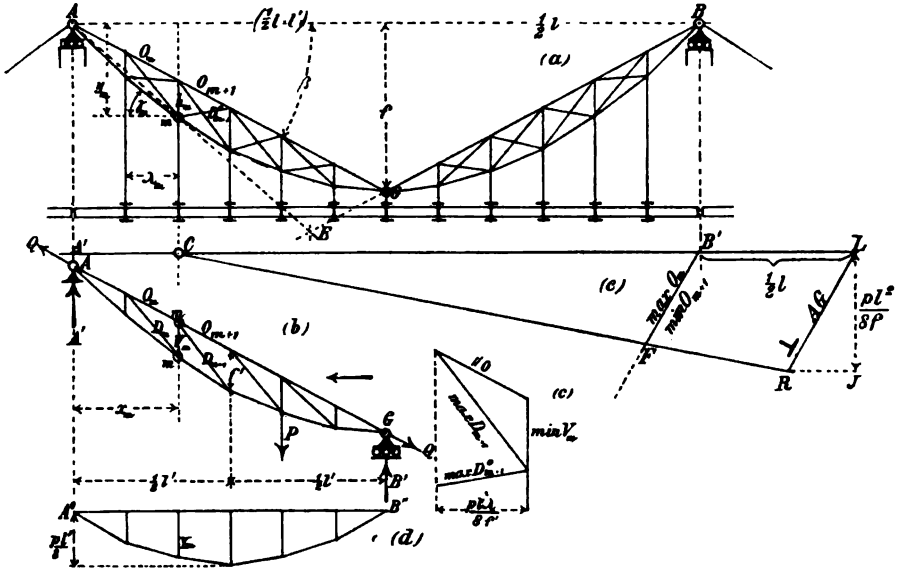


Fig. 402.

wo d_m = Länge der Diagonale. In der Fig. 402 sind in jedem Felde zwei sich kreuzende schlaffe Diagonalen vorausgesetzt worden. Je nachdem sich die veränderliche Belastung (p) von G nach A oder von A nach G über die Brücke bewegt, treten die linkssteigenden oder die rechtssteigenden Diagonalen in Tätigkeit.

Zu beachten ist, daß bei gleich großen Feldweiten λ die wagerechten Projektionen der Spannkräfte D_m und D_m^0 sämtlicher links- und

*) Diese Beziehung gilt auch, wenn bei $x = \frac{1}{2}l'$ keine Vertikale vorhanden ist, in welchem Falle f' die auf die Gerade AG bezogene senkrechte Ordinate der umschriebenen Parabel bedeutet. Vergl. auch Fig. 268.

**) Vergl. § 35. Für die untere Gurtung ist $\frac{{}_{min}U}{{}_{max}U} = \frac{g}{q}$.

Digitized by Google

rechtssteigenden Diagonalen den gleichen Wert $\frac{pl'}{8f'}\lambda$ besitzen; vergleiche Fig. 402c.

Um den in der m^{ten} Vertikale infolge der von G nach A vorrückenden Belastung entstehenden größten Druck ${}_{min}V_m$ zu bestimmen, zeichne man (da ${}_{min}V_m$ gleichzeitig mit ${}_{max}D_{m+1}$ entsteht) ein Kräftedreieck, dessen Seiten parallel D_{m+1}, O und V_m sind, und dessen eine Seite $= {}_{max}D_{m+1}$ ist. Fig. 402c. Man findet dann leicht

$$(-{}_{min}V_m) : {}_{max}D_{m+1} = h_{m+1} : d_{m+1}, \text{ woraus } {}_{min}V_{m_g} = -\frac{pl'}{8f'} h_{m+1}.$$

Der an der oberen Gurtung angreifende Teil g_0 der ständigen Belastung g erzeugt $V_{m_g} = -\frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1})$, und es ergibt sich daher der (auch für ungleichweite Felder gültige) Ausdruck

$$(3) \quad {}_{min}V_m = -\frac{pl'}{8f'} h_{m+1} - \frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1}),$$

während ${}_{max}V_m = V_{m_g}$ ist. Rückt die bewegliche Belastung von A aus nach G vor, so werden die rechtssteigenden Diagonalen gespannt, und es entsteht

$$(4) \quad {}_{min}V_m = -\frac{pl'}{8f'} h_{m-1} - \frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Von den beiden Werten (3) und (4) ist der größere zu wählen. Für die Vertikalen links von f' gilt also Gleichung (3), für die anderen Gleichung (4). Zeichnet man ein Polygon,*) dessen Ecken auf einer Parabel mit dem Pfeile $\frac{pl'}{8}$ liegen (Fig. 402d) und den Knotenpunkten des Trägers AG entsprechen, so ist die Ordinate Y_m dieses Polygons $= \frac{pl'}{8f'} h_m$, und es folgt für eine links von f' befindliche Vertikale der Ausdruck

$$(5) \quad {}_{min}V_m = -Y_{m+1} - \tfrac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1})$$

und für eine rechts von f' gelegene

$$(6) \quad {}_{min}V_m = -Y_{m-1} - \tfrac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Die Gleichungen (1) bis (6) gelten auch für die *Seitenöffnungen*, sobald l' und f' durch l_1 und f_1 ersetzt werden, Fig. 401.**)

*) Das Polygon in Fig. 402d läßt sich als ein Seilpolygon betrachten, welches mit der Polweite l' zu den Knotenlasten eines gleichmäßig belasteten Balkens $A''B''$ gezeichnet ist.

**) f_1 ist die in senkrechter Richtung gemessene Höhe des Fischbauchträgers bei $x = \frac{1}{2} l_1$. Ist an dieser Stelle keine Vertikale vorhanden, so ist f_1 die auf $A_1 A$ bezogene Höhe der umschriebenen Parabel.

Digitized by Google

Wir gehen nun zur Bestimmung der Spannkräfte O für den Fall parabelförmiger unterer Gurtungen über und betrachten zuerst die Mittelöffnung. Der Punkt E, in welchem eine durch A und den unteren Knoten m gelegte Gerade die Gerade BG trifft, ist Belastungsscheide für das Moment M_m. Die von B bis E reichende bewegliche Belastung erzeugt

$$(7) \qquad {}_{min}M_m = -\frac{p x_m (l^2 - 3 l x_m + 2 x_m^2)}{2 (3l - 2x_m)}$$ *)

und (da die linkssteigenden Diagonalen gespannt werden)

$${}_{max}O_m = -\frac{M_m}{h_m} \sec\beta = +\frac{p x_m (l^2 - 3 l x_m + 2 x_m^2)}{2 (3l - 2x_m) h_m} \sec\beta.$$

Dieser Ausdruck läßt sich durch Einsetzen von

$$h_m = \frac{4 f' x_m (l' - x_m)}{l'^2} = \frac{2 f x_m (l - 2 x_m)}{l^2}$$

leicht umformen in

$$(8) \qquad {}_{max}O_m = \frac{p l^2}{8 f} \sec\beta \frac{l - x_m}{1{,}5 l - x_m}$$

und führt zu der folgenden einfachen Darstellung von ${}_{max}O_m$. Man trägt von einer Wagerechten $A'B'$ aus, im Abstande $B'L = \frac{1}{2} l$ **) von der Senkrechten durch B die senkrechte Strecke $\overline{LJ} = \frac{p l^2}{8 f}$ auf, zieht $JR \parallel A'B'$ und $LR \perp AG$ und findet zunächst $\overline{LR} = \frac{p l^2}{8 f} \sec\beta$. Bestimmt man nun senkrecht unter m den Punkt C der Geraden $A'B'$ und zieht die Gerade CR, so schneidet diese auf einer durch B' parallel zu LR gelegten Geraden die Strecke ab

$$\overline{B'F} = \overline{LR} \frac{l - x_m}{1{,}5 l - x_m} = {}_{max}O_m.$$

Wird nur die positive Beitragstrecke AE mit p belastet, so entsteht das Moment ${}_{max}M_m$, welches sich von dem durch die Gleich. (7) gegebenen Momente ${}_{min}M_m$ nur durch das Vorzeichen unterscheidet, da gänzliche Belastung der Mittelöffnung den Wert $M_m = 0$ erzeugt. Es treten jetzt aber die rechtssteigenden Diagonalen in Tätigkeit, und es ergibt sich mithin

$${}_{min}O_{m+1} = -\frac{M_m}{h_m} \sec\beta = -{}_{max}O_m.$$

---

*) Nach Gleich. (9) Seite 205.

**) In Fig. 402 wurde, um Raum zu sparen, $B'L$ kleiner als $\frac{1}{2} l$ gezeichnet.

Digitized by Google

Im ersten Felde ist $_{min}O_1 = -{}_{max}O_1$, und ebenso verhält sich auch das an G grenzende Feld.

Um die Spannkräfte O für die Seitenöffnung zu finden, beachte man, daß ausschließliche und gänzliche Belastung der Seitenöffnung in der oberen Gurtung die größten Drücke erzeugt, während ausschließliche und gänzliche Belastung der Mittelöffnung die stärkste Beanspruchung auf Zug hervorbringt. Im ersteren Falle entsteht in jedem Stabe der Gurtung $A_1 A$ Fig. 401

$$(9) \quad {}_{min}O_p = -\frac{p l_1^2}{8 f_1} \sec \beta_1 \text{ (nach § 35)}$$

und im zweiten

$$(10) \quad {}_{max}O_p = +\frac{p l^2}{8 f} \sec \beta_1, \left(\text{weil } H_p = \frac{p l^2}{8 f}\right).$$

Die ständige Belastung erzeugt

$$(11) \quad O_g = \frac{g \sec \beta_1}{8} \left(\frac{l^2}{f} - \frac{l_1^2}{f_1}\right).$$

Wählt man $f_1 = f \frac{l_1^2}{l^2}$ $\left(\text{also, wenn } l_1 = l' = \frac{1}{2} l \text{ ist, } f_1 = \frac{1}{4} f = f'\right)$, so ergibt sich $O_g = 0$ und

$$(12) \quad {}_{max}O = \frac{p l^2}{8 f} \sec \beta_1 = -{}_{min}O.^*)$$

§ 48.

Kette, versteift durch einen Balken.

a. Kettenbrücke mit einer Öffnung.

192. Einleitung. Eine aus geraden, gelenkartig miteinander verbundenen Stäben bestehende, zunächst gewichtslos gedachte Kette, in deren Knotenpunkten Kräfte Z_1, Z_2, Z_3, ... angreifen, nimmt die Form eines diesen Kräften entsprechenden Seilpolygons an. Sind Größe und Lage sämtlicher Kräfte Z gegeben, so ist die von den Stabachsen gebildete Kettenlinie bestimmt, sobald drei Punkte derselben — in der Regel die beiden Stützpunkte R und T und ein Punkt W in der Nähe des Scheitels — bekannt sind (Fig. 404); denn durch

*) Der Bedingung $f_1 : f = l_1^2 : l^2$ müssen auch die in Parabeln einbeschriebenen oberen Gurtungen des Hängewerks in Fig. 396 genügen, sobald im Falle ungleicher Scheiben I und II bei gänzlicher Belastung sämtliche Spannkräfte U und D gleich Null sein sollen.

Digitized by Google

drei Punkte läßt sich nur ein einziges Seilpolygon der Kräfte Z zeichnen.*) Mit der Belastung ändert sich im allgemeinen auch die Form der Kette.

Betrachten wir nun die in Fig. 403 dargestellte Kettenbrücke. RWT ist die *Tragkette*, RL und TN sind die *Rückhaltketten;* bei R und T sind, um die hohen Pfeiler nur in senkrechter Richtung zu belasten, bewegliche Lager mit wagerechten Führungen angeordnet (Fig. 404). Die senkrechten Hängestangen tragen die Querträger, diese

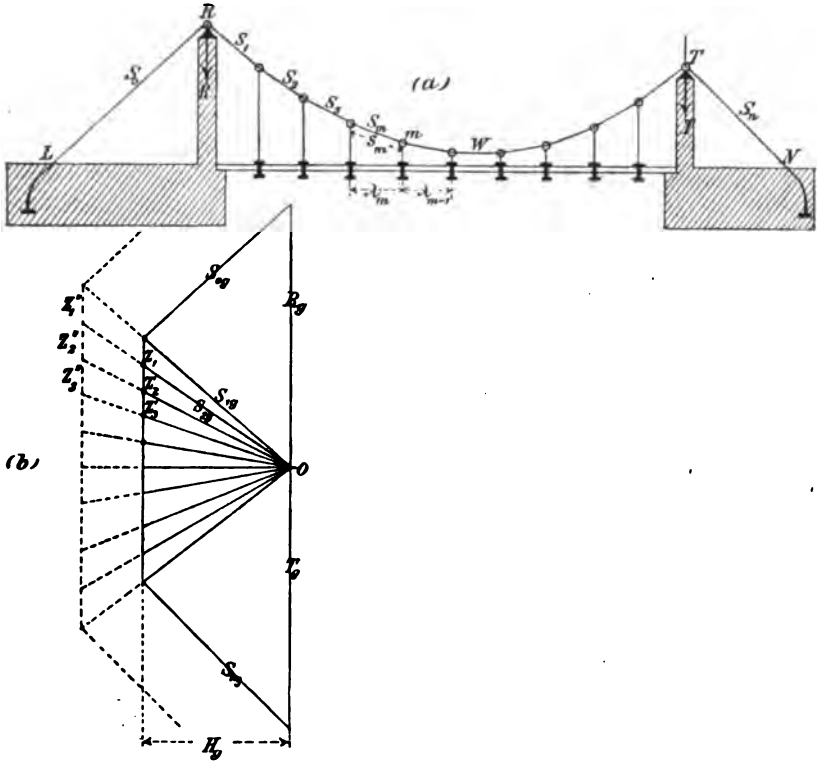


Fig. 403.

die Längsträger, letztere die Bahn. Die Brücke sei frei von Verkehrslast. Dann ist die Spannkraft in der m^{ten} Hängestange

$$Z_{m\,g} = \tfrac{1}{2}\, g_f\,(\lambda_m + \lambda_{m+1}) + G_{m\,h},$$

*) Die Aufgabe: Zu gegebenen Kräften durch drei vorgeschriebene Punkte ein Seilpolygon zu zeichnen, ist in No. 108 gelöst worden.

Digitized by Google

wo g_f das Gewicht der Längeneinheit der Brückenbahn (einschließlich der Längs- und Quer-Träger) und G_{mk} das Gewicht der m^{ten} Hängestange, und es ist im Knoten m der Kette die Belastung

$$Z'_m = Z_{mg} + G_{mk}$$

anzunehmen, wenn mit G_{mk} die Summe der Gewichte der halben Kettenglieder s_m und s_{m+1} bezeichnet wird. Die Gewichte G_{mk} und G_{mk} hängen von der vorläufig noch unbekannten Form der Kette ab; um sie schnell und mit genügender Schärfe zu bestimmen, setze man zuerst voraus, es sei die gesamte ständige Belastung gleichförmig über die Horizontalprojektion der Brücke verteilt, und lege die infolge dieser Annahme erhaltene Kettenlinie, deren Knoten auf einer Parabel mit senkrechter Achse liegen, der Berechnung der Gewichte G_{mk} und G_{mk} zu Grunde. Wie groß hierbei die ständige Belastung gewählt wird, ist gleichgültig, da jene Parabel durch die drei gegebenen Punkte der Kettenlinie eindeutig bestimmt ist. Nun läßt sich die verbesserte Kettenlinie zeichnen, welche von der erstgefundenen stets so wenig abweichen wird, daß eine Neuberechnung der Gewichte G_{mk} und G_{mk} überflüssig ist.

Gleichzeitig mit der Form der Kette findet man die in ihren Gliedern und in den Rückhaltketten auftretenden Spannkräfte, welche mit S_{0g}, S_{1g}, S_{2g}, . . . $S_{(n-1)g}$, S_{ng} bezeichnet werden sollen (Fig. 403b), ferner die auf die Pfeiler wirkenden Drücke R_g und T_g und den Horizontalzug H_g.

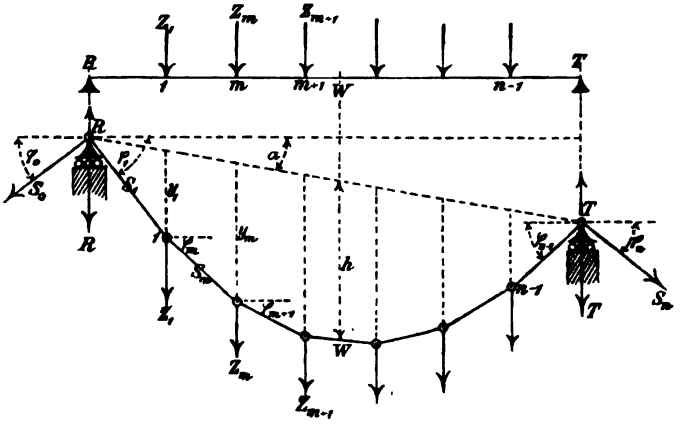


Fig. 404.

Um die auf die Schlußlinie RT bezogenen senkrechten Ordinaten y_1, y_2, y_3, . . . einer durch senkrechte Kräfte Z_1, Z_2, Z_3, . . . belasteten und durch die Punkte R, W, T gehenden Kettenlinie (Fig. 404) durch Rechnung zu bestimmen.

Digitized by Google

kann man u. a. auch den folgenden Weg einschlagen. Man ermittelt die Biegungsmomente M_1, M_2, M_3, ... für die den Knotenpunkten der Kette entsprechenden Querschnitte 1, 2, 3 . . eines einfachen Balkens RT, welcher die Lasten Z_1, Z_2, Z_3 . . . . trägt, desgleichen das Moment M_w für den dem Punkte W entsprechenden Balkenquerschnitt W, und findet dann mittels der Gleichung

$$M_w = Hh,$$

wo h die gegebene Ordinate des Punktes W ist, den Horizontalzug H und hierauf mittels der Gleichungen

$$M_1 = Hy_1, \; M_2 = Hy_2 \; . \; . \; . \; .$$

die Ordinaten y_1, y_2, ... Die Spannkräfte S_0, S_1, S_2, . . . S_n der unter φ_0, φ_1, φ_2, . . . φ_n gegen die Wagerechte geneigten Kettenglieder werden mittels der Formel

$$(1) \quad S_m = H \sec \varphi_m$$

berechnet, und für die Drücke auf die Pfeiler findet man die Werte

$$(2) \quad R = H(\operatorname{tg}\varphi_0 + \operatorname{tg}\varphi_1); \quad T = H(\operatorname{tg}\varphi_{n-1} + \operatorname{tg}\varphi_n).^*)$$

Ist die Gestalt der Kette und der Horizontalzug H gegeben, so ergibt sich

$$(3) \quad Z_m = H(\operatorname{tg}\varphi_m - \operatorname{tg}\varphi_{m+1}).$$

Werden die Lasten Z'_m (Fig. 403b) durch Lasten Z''_m ersetzt, diese letzteren aber so gewählt, daß das gegenseitige Verhältnis der Lasten dasselbe bleibt, daß also

$$Z''_1 : Z''_2 : Z''_3 : \ldots\ldots = Z'_1 : Z'_2 : Z'_3 : \ldots\ldots$$

ist, so behält die Kette ihre Form; es ändert sich nur die Größe des Horizontalzuges und der Kräfte S, R und T, und hieraus folgt, daß eine gleichförmig über die ganze Brücke verteilte Verkehrsbelastung nur unwesentliche Verrückungen der Knoten der Kette verursachen wird, sobald die ständige Belastung zum größten Teile eine gleichförmig verteilte ist. Erfährt jedoch die Brücke eine einseitige Belastung, so können unzulässige Formänderungen entstehen, die um so beträchtlicher ausfallen, je kleiner die ständige und je größer die bewegliche Belastung ist. Um eine wellenförmige Bewegung der Brückenbahn beim Übergange der Verkehrslast zu verhüten, ist die Kette zu versteifen, beispielsweise durch einen Balken AB, der an der Kette hängt (dessen Gewicht also bei der Berechnung von g_f zu berücksichtigen ist) und der bei A ein festes, bei B ein auf einer Wagerechten bewegliches Auflagergelenk besitzt. Fig. 405. Die Ermittelung der an diesem Balken angreifenden Kräfte bildet den Gegenstand der folgenden Untersuchungen. Im Verlaufe derselben wird sich zeigen, daß, zur Erzielung statischer Bestimmtheit, der Balken aus zwei durch ein Gelenk G miteinander bestehenden Teilen herzustellen ist.

Die nachstehenden Entwicklungen knüpfen wir an die Annahme

*) φ_{n-1} = *spitzer* Winkel des Stabes gegen die Wagerechte.

Digitized by Google

vollkommener Starrheit des Balkens, der Hängestangen und der Kette. Wir setzen also wie in den früheren Abschnitten vernachlässigbar kleine elastische Formänderungen voraus, und dürfen dann die Kettenlinie auch als das Seilpolygon derjenigen Kräfte Z_p betrachten, welche in den Hängestangen durch die nach Ausführung der Versteifung aufgebrachten Lasten P hervorgerufen werden.

Die Kräfte Z_p und die von ihnen in den Kettengliedern und an den Auflagern (R und T) erzeugten Kräfte S_p, R_p, T_p sind bekannt, sobald der — ebenfalls von den Lasten P herrührende — Horizontalzug H_p gegeben ist; man hat nur nötig, in Fig. 403b H_g durch H_p zu ersetzen. Werden die dem größten Werte H_p entsprechenden Kräfte Z_p, S_p, R_p, T_p zu denjenigen addiert, die bereits vor der Versteifung der Kette wirksam waren, so ergeben sich die größten Spannkräfte, welche überhaupt in den Hängestangen und Kettengliedern auftreten, sowie die größten Drücke auf die Kettenpfeiler. (Man erhält sie, sobald man in Fig. 403 H_g durch $H_g + H_p$ ersetzt.) Wir haben uns deshalb im folgenden nur noch mit der Bestimmung von H_p und mit der Inanspruchnahme des Versteifungsbalkens zu beschäftigen. Bevor wir mit diesen Untersuchungen beginnen, heben wir noch besonders hervor, daß es bei der Berechnung der Inanspruchnahme einer Kettenbrücke stets zulässig ist, die Knotenpunkte der Kette auf einer Parabel mit senkrechter Achse liegend anzunehmen, entsprechend der Voraussetzung einer gleichförmigen ständigen Belastung g. Die vorhin gelehrte genauere Formbestimmung ist hauptsächlich von Wert für die Aufstellung der Brücke, muß aber noch durch die (im zweiten Bande dieses Buches gelehrte) Berücksichtigung der Dehnungen der elastischen Kette ergänzt werden.

193. Allgemeine Untersuchung des Versteifungsbalkens.

Bezeichnet

M_p das Moment für irgend einen Querschnitt C des an der Kette hängenden Balkens AB,

M_{0p} das durch die Lasten P hervorgerufene Biegungsmoment für den Querschnitt C eines nur bei A und B gestützten (nicht an der Kette hängenden) einfachen Balkens AB,

y die senkrechte Ordinate des dem Querschnitte C entsprechenden Punktes C' der Kette, bezogen auf die Verbindungslinie der Punkte A' und B', in denen die Kette von den Senkrechten durch die Stützpunkte A und B geschnitten wird, Fig. 405,

so ist

$$(4) \quad M_p = M_{0p} - H_p y.$$

Digitized by Google

Das zweite Glied dieser Gleichung gibt den Einfluß der Kräfte Z_p an; man erhält es, indem man die Fläche zwischen der Schlußlinie $A'B'$ und der Kettenlinie $A'G'B'$ als die den Kräften Z_p entsprechende Culmannsche Momentenfläche ansieht und nach No. 69 verfährt. — Für das Mittelgelenk G ergibt sich

$$M_G = M_{0G} - H_p f$$

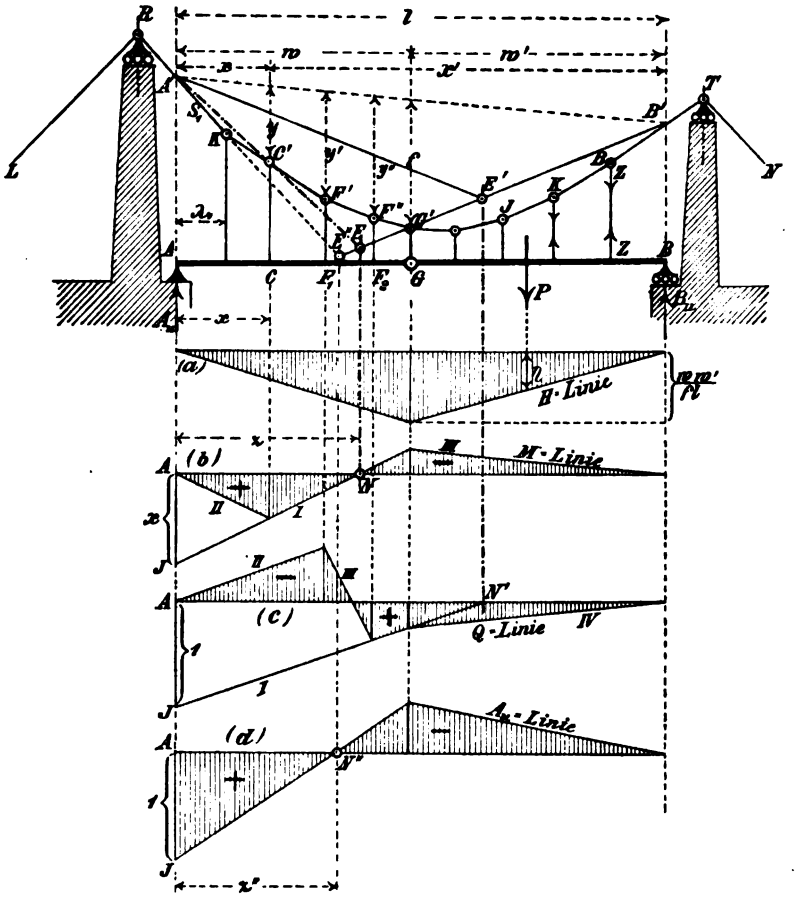


Fig. 405.

und hieraus folgt, da $M_G = 0$ sein muß

$$(5) \quad H_p = \frac{M_{0G}}{f}.$$

Digitized by Google

Bei fehlendem Mittelgelenke ist es nicht möglich, H_p lediglich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen anzugeben; der Träger ist dann ein statisch unbestimmter.

Da die Gleichungen (4) und (5) mit den auf Seite 183 für den Bogen mit drei Gelenken abgeleiteten Gleichungen (2) und (3) übereinstimmen, so können die im § 24 zur Ermittelung von M und H angegebenen Verfahren auch auf den vorliegenden Fall angewendet werden. Es mögen die wichtigsten Gesetze hier wiederholt werden.

1. Die Einflußfläche für H_p ist ein Dreieck, dessen Spitze dem Mittelgelenke G entspricht und dessen Höhe $= \frac{ww'}{lf}$ ist; vergleiche Fig. 405a. Eine Einzellast P erzeugt: $H_p = P\eta$.

2. Zerlegt man die Spannkräfte S_{1p} und S_{np} der äußersten Kettenglieder in den Punkten A' und B' in die senkrechten Seitenkräfte A_{op} und B_{op} und in die mit der Schlußlinie zusammenfallenden, entgegengesetzt gleichen Kräfte H'_p (Fig. 406*), setzt hierauf A_{op} und B_{op} mit

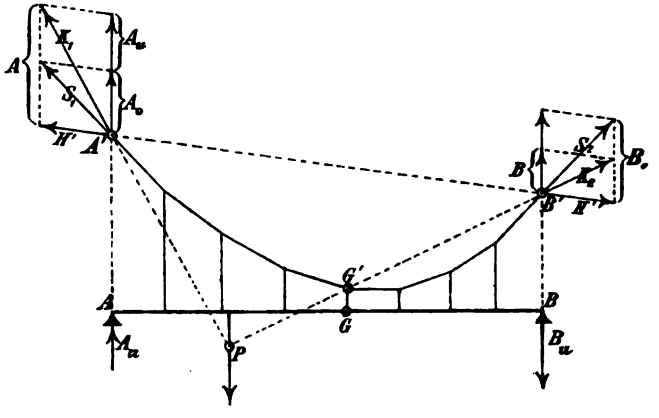


Fig. 406.

den an den Stützpunkten des Balkens angreifenden Widerständen A_{up} und B_{up} zu $A_p = A_{op} + A_{up}$ und $B_p = B_{op} + B_{up}$ zusammen, so besitzen A_p und B_p dieselbe Größe wie die Stützenwiderstände eines nicht an der Kette hängenden einfachen Balkens. Greift am Träger nur eine einzige Last P an, so treffen sich K_1 (d. i. Mittelkraft von A_p und H'_p), K_2 (d. i. Mittelkraft von B_p und H'_p) und P in einem Punkte. Liegt P links von G, so geht K_2 durch den dem Gelenke G entsprechenden Punkt G' der Kette; befindet sich P rechts von G, so geht K_1 durch G'

*) In dieser Figur haben wir die Zeiger p weggelassen.

Digitized by Google

3. Für den Stützenwiderstand $A_{u,p}$ erhält man die in der Fig. 405d dargestellte Einflußfläche; sie ist bestimmt durch $\overline{AJ} = 1$ und durch den Nullpunkt N'', welcher senkrecht unter dem Punkte E'' liegt, in dem die Gerade $B'G'$ vom ersten Kettengliede (S_1) getroffen wird. Da sich für $A_{u,p}$ (und ebenso für $B_{u,p}$) je nach dem Belastungszustande des Balkens positive und negative Werte ergeben, so müssen die Auflagergelenke des Balkens mit den Pfeilern verankert werden. Die ständige Belastung übt auf das Auflager A einen Druck $A_{u,g}$ aus, welcher gleich der Hälfte des Gewichtes des Balkenfeldes λ_1 ist. Bedeutet also g' die ständige Belastung f. d. Längeneinheit, ausschließlich des Gewichtes der Kette und der Hängestangen, so ist $A_{u,g} = \frac{1}{2} g' \lambda_1$. Ebenso wird $B_{u,g}$ bestimmt. Ist die Verkehrslast eine gleichförmig verteilte ($= p$ f. d. Längeneinheit), so entsteht infolge gänzlicher Belastung: $A_{u,p} = \frac{1}{2} p \lambda_1$ und es folgt dann: ${}_{max}A_{u,p} + {}_{min}A_{u,p} = \frac{1}{2} p \lambda_1$.

4. Die Einflußlinie für das den Balken-Querschnitt C beanspruchende Moment M_p besteht aus den Geraden I, II, III, in Fig. 405b und ist bestimmt durch $\overline{AJ} = x$ und durch den senkrecht unter dem Schnittpunkt E der Geraden $A'C'$ und $B'G'$ gelegenen Nullpunkt N. — Die ständige Last erzeugt $M_g = 0$.

5. Um auch die Ermittelung der an den Balkenabschnitten wirksamen Querkräfte Q_p auf die im § 24 gelösten Aufgaben zurückzuführen, bringen wir die den Querschnitten des Feldes $\overline{F_1 F_2} = \lambda$ entsprechende Querkraft

$$(6) \quad Q_p = \frac{M_{2p} - M_{1p}}{\lambda}^{*)}$$

(wo M_{2p} und M_{1p} die Momente für die Querschnitte F_2 und F_1 bedeuten) auf die Form

$$Q_p = \frac{M_{2 \cdot 0} - M_{1 \cdot 0}}{\lambda} - H_p \frac{y'' - y'}{\lambda}, \text{ (vergl. Fig. 405)}$$

setzen hierauf $\frac{M_{2 \cdot 0} - M_{1 \cdot 0}}{\lambda} = Q_0 =$ Querkraft für das Feld $F_1 F_2$ eines einfachen, nicht an der Kette hängenden Balkens AB und erhalten

$$(7) \quad Q_p = Q_0 - H_p \frac{y'' - y'}{\lambda}.$$

Schließen die Geraden $F'F''$ und $A'B'$ mit der Wagerechten die Winkel φ und α ein (Fig. 404), so ist

$$\frac{y'' - y'}{\lambda} = \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \varphi \cos \alpha}$$

*) Vergl. Seite 262.

Digitized by Google

und $H_p = H'_p \cos\alpha$, und es ergibt sich dann

$$(8)\quad Q_p = Q_0 - \frac{H'_p \sin(\varphi-\alpha)}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}\left[Q_0 \cos\varphi - H'_p \sin(\varphi-\alpha)\right].$$

Die Klammergröße dieses Ausdrucks stellt nach Gleich. (5) auf Seite 186 die Querkraft für einen Querschnitt des Feldes $F'F''$ eines steifen Bogens $A'G'B'$ vor; bezeichnen wir sie mit $\overline{Q}$, so erhalten wir

$$(9)\quad Q = \overline{Q}\frac{1}{\cos\varphi},$$

und hieraus und aus den in No. 120 gewonnenen Ergebnissen läßt sich auf die in Fig. 405c und in Fig. 407 dargestellte Einflußlinie für Q schließen; dieselbe ist bestimmt durch $AJ = 1$ und den Nullpunkt N' der Geraden I. Es liegt nämlich N' auf der Senkrechten durch den Punkt E', in welchem die Gerade $B'G'$ von einer durch A' zum Kettengliede $F'F''$ gezogenen Parallelen getroffen wird. Liegt E' links von G, so ist die Senkrechte durch E' eine Belastungsscheide, Fig. 407.

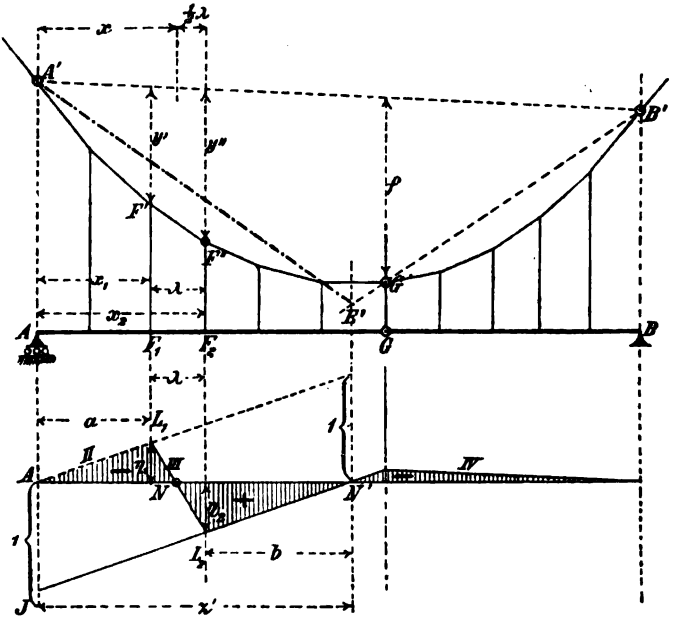


Fig. 407.

Mit Hilfe der angegebenen Einflußlinien lassen sich die Grenzwerte von M_p, Q_p, A_{up}, B_{up}, H_p nach § 15 bestimmen.

Digitized by Google

194. Gegliederter Versteifungsbalken. Die in Fig. 405 für H_p und A_{np} angegebenen Einflußlinien gelten auch dann, wenn der Versteifungsbalken aus zwei gegliederten Scheiben besteht. Die Einflußlinien für die in den Gurtungen entstehenden Spannkräfte lassen sich leicht aus denen für die Momente ableiten. Die schraffierte Fläche in Fig. 408a stellt die Einflußfläche für die Spannkraft O in dem dem Knotenpunkte C gegenüberliegenden Stabe der oberen Gurtung dar; sie ist bestimmt durch den Nullpunkt N und die Strecke $\overline{AJ} = 1 \cdot \frac{x}{h}$ (welche an die Stelle von $\overline{AJ} = x$ in Fig. 405b tritt). h bedeutet den Hebelarm von O in Bezug auf den Drehpunkt C. Die zur Bestimmung der Belastungsscheide zu ziehende Gerade $A'E$ geht durch den dem Punkte C entsprechenden Punkt C' der Kette. Die Belastung

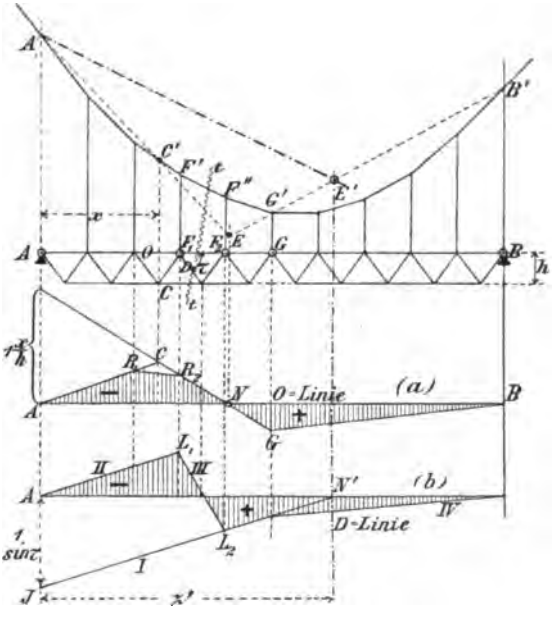


Fig. 408.

ist an den Knoten der oberen Gurtung des Balkens wirkend gedacht. *Das beschriebene Verfahren gilt für Balken mit* ***beliebig geformten Gurtungen.***

Die schraffierte Fläche in Fig. 408b stellt die Einflußfläche für die Spannkraft D_p in der linkssteigenden Diagonale eines Balkens mit *wagerechten* Gurtungen dar. Man geht hier am zweckmäßigsten von

Digitized by Google

der Gleichung $D_p \sin\tau = Q_p$ aus*) (wo τ den Neigungswinkel der Diagonale gegen die Wagerechte bezeichnet) und kann dann die in No. 193 hinsichtlich Q_p angestellten Untersuchungen benutzen. Zuerst wird die Gerade I mit Hilfe des Nullpunktes N' und der Ordinate $\overline{AJ} = \frac{1}{\sin\tau}$ (welche an die Stelle von $\overline{AJ} = 1$ in Fig. 407 tritt) festgelegt, wobei zu beachten ist, daß die Gerade $A'E'$ parallel zu demjenigen Kettengliede $F'F''$ sein muß, welches von dem durch die Diagonale D und zwei Gurtstäbe geführten Schnitte tt (der also im ganzen vier Stäbe schneidet) getroffen wird. Nun wird $II \parallel I$ gezogen, hierauf III und IV. Fig. 408 b setzt eine an der oberen Gurtung wirkende Belastung voraus.

Der Einfluß der ständigen Belastung auf die Spannkräfte O, U, D ist gleich Null. **Bei beliebig geformten Gurtungen** können die Einflußlinien für die Spannkräfte in den Füllungsstäben auf dem im § 45 eingeschlagenen Wege bestimmt werden. Wegen der geringeren Wichtigkeit dieses Gegenstandes unterlassen wir es hier, näher darauf einzugehen, raten jedoch dem Leser, diese Linien (am besten mit Hilfe der Spannkräfte S', S'', S_a, S''') darzustellen. Auch die Untersuchung eines Versteifungsbalkens mit einem Gelenkviereck ist als eine sehr lehrreiche Übung in der selbständigen Anwendung der in diesem Buche gelehrten Behandlungsweise derartiger Aufgaben zu empfehlen.

Sehr zu empfehlen ist es auch, nach Aufzeichnung der O-Linien und U-Linien die Füllungsstäbe mit Hilfe des in No. 143 angegebenen Verfahrens zu untersuchen.

195. Momente und Querkräfte infolge gleichmäßiger Belastung. Am Schluß von No. 192 wurde hervorgehoben, daß es stets zulässig ist, bei der Untersuchung der Inanspruchnahme einer Kettenbrücke die Knotenpunkte der Kette auf einer Parabel mit senkrechter Achse anzunehmen, entsprechend einer gleichförmig über die Wagerechte AB verteilten ständigen Belastung (g). Ist auch die bewegliche Belastung eine gleichförmig verteilte ($= p$), so ist der Balken bei Eintreten gänzlicher Belastung spannungslos, und es folgt deshalb

$$_{min}M_p = -\,_{max}M_p; \quad _{min}Q_p = -\,_{max}Q_p.$$

Es genügt also stets, den einen der beiden Grenzwerte der fraglichen Unbekannten anzugeben. Man gelangt hier auch sehr schnell durch Rechnung zum Ziele, indem man Formeln anwendet, die sich aus der Betrachtung der Einflußlinien ergeben. So findet man z. B. für das einem Knotenpunkte entsprechende Moment $_{max}M_p$, indem man den Inhalt der positiven Einflußfläche mit p multipliziert, unter Einführung

*) Für eine rechtssteigende Diagonale ist $D_p \sin\tau = -Q_p$.

Digitized by Google

der in der Fig. 405b angegebenen Bezeichnungen, den Wert

$$(10) \qquad M_{max} = + p \frac{x(z-x)}{2}.$$ *)

Bedeutet nun c den senkrechten Abstand des Punktes E von der Schlußlinie $A'B'$, so ist einerseits: $c = y\frac{z}{x}$, andrerseits $c = f\frac{l-z}{w'}$, mithin

$$yzw' = fx(l-z) \text{ und } z = \frac{flx}{yw' + fx}.$$

Setzt man noch (nach der Parabelgleichung)

$$(11) \quad y = f\frac{xx'}{ww'},$$

so findet man

$$(12) \qquad z = \frac{wl}{w+x'} \text{ und (da } M_g = 0 \text{ ist)}$$

$$(13) \qquad {}_{max}M = \frac{pxx'(w-x)}{2(w+x')} = -{}_{min}M.$$ **)

Es genügt stets, die Momente für die Knotenpunkte des Balkens zu berechnen. Trägt man sie in den Knotenpunkten als Ordinaten auf und verbindet ihre Endpunkte durch Gerade (wie dies z. B. in Fig. 130 auf Tafel 1 bei Untersuchung eines einfachen Balkens geschah), so geben die Ordinaten dieser Geraden genügend genau die größten Momente für die Querschnitte zwischen den Knotenpunkten an.

Um für die Querkraft Q_x irgend eines Feldes F_1F_2 einen einfachen Ausdruck zu erhalten, sollen die in Fig. 407 angegebenen Bezeichnungen eingeführt werden. Es verhält sich $\overline{AN} : \overline{NN'} = a : b$ und man findet (wegen $\overline{AN} + \overline{NN'} = z'$, und $a + b = x' - \lambda$)

$$\overline{AN} = a\frac{x'}{x'-\lambda}; \quad \overline{NN'} = b\frac{x'}{x'-\lambda}.$$

Die Inhalte der Dreiecke NL_2N' und AL_1N sind beziehungsweise

$$\mathfrak{F}_+ = \frac{1}{2}\eta_2\overline{NN'} = \frac{1}{2}\cdot 1\frac{b}{x'}\cdot\overline{NN'} = \frac{1}{2}\frac{b^2}{x'-\lambda}$$

$$\text{und } \mathfrak{F}_- = \frac{1}{2}\frac{a^2}{x'-\lambda}.$$ ***)

Liegt nun der Punkt E' links vom Scheitelgelenk, so besteht

*) Moment f. d. Querschnitt x eines einfachen Balkens von der Länge x. Vergl. auch die Untersuchungen in No. 117, Seite 190.

**) Mit $w = \frac{1}{2}l$ entsteht die Gleich. (9) auf Seite 205.

***) Links von N' stimmt die Einflußfläche mit derjenigen überein, die sich für die Querkraft Q eines einfachen Balkens von der Länge x' ergibt. Vergl. Fig. 121.

Digitized by Google

der positive Teil der Einflußfläche nur aus dem Dreieck NL_2N', und es ergibt sich dann (wegen $Q_g = 0$)

$$(14) \qquad {}_{max}Q = + \frac{pb^2}{2(x' - \lambda)} = - {}_{min}Q.$$

Befindet sich E' rechts von G (Fig. 405c), so besteht der negative Teil der Einflußfläche aus einem einzigen Dreieck, nämlich dem Dreieck AL_1N (Bezeichnung in Fig. 407), und man findet dann

$$(15) \qquad {}_{min}Q = - \frac{pa^2}{2(x' - \lambda)} = - {}_{max}Q.$$

Die Ausdrücke (14) und (15) gelten auch für ungleiche Feldweiten. Für x' findet man leicht den Wert

$$(16) \qquad x' = \frac{lw}{l - 2x + w},$$

wo x = Abstand der Mitte des Gliedes $F'F''$ von der Senkrechten durch A bedeutet, Fig. 407.*)

Der größte Horizontalzug ist

$$(17) \qquad {}_{max}H = q \frac{ww'}{2f}$$

und die größte Spannkraft in der m^{ten} Hängestange

$$(18) \qquad {}_{max}Z_m = \tfrac{1}{2}(p + g')(\lambda_m + \lambda_{m+1}),$$

wo g' = ständige Belastung nach Abzug des Gewichtes der Hängestangen und der Kette.

Um die Grenzwerte des Stützenwiderstandes A_u zu bestimmen, ermittelt man zuerst (vergl. Fig. 405d)

$$(19) \qquad x'' = \frac{lw}{l - \lambda_1 + w} \text{ (nach Gleichung 16)}$$

und findet nun

$${}_{max}A_{up} = \frac{px''}{2}; \quad {}_{min}A_{up} + {}_{max}A_{up} = \frac{p\lambda_1}{2}; \quad A_{ug} = \frac{g'\lambda_1}{2},$$

mithin

$$(20) \qquad {}_{max}A_u = \frac{px'' + g'\lambda_1}{2}; \quad {}_{min}A_u = - \frac{px'' - (p = g')\lambda_1}{2}.$$

Ganz ebenso werden die Grenzwerte von B_u bestimmt.

---

*) Um (16) zu erhalten, gehe man von der Gleichung aus: $[(y'' - y') \frac{x'}{\lambda} = f \frac{l - x'}{w'}$ und setze (nach der Parabelgleichung)

$$y'' - y' = \frac{f}{ww'}[x_2(l - x_2) - x_1(l - x_1)] = \frac{f(x_2 - x_1)}{ww'}[l - (x_1 + x_2)]$$

$$= \frac{f\lambda}{ww'}(l - 2x).$$

Digitized by Google

Mit Hilfe der Gleichungen 14, 15, 16 lassen sich auch die Spannkräfte in den Füllungsstäben eines Versteifungsbalkens mit parallelen Gurtungen berechnen, da diese nach No. 194 den Querkräften Q proportional sind.

b. Kettenbrücke mit mehreren Öffnungen.

196. Kettenbrücke mit drei Öffnungen, versteift durch Einzelbalken. Fig. 409. Sind die Punkte R, G', T der Mittelöffnung gegeben, so läßt sich die Form der Kette auf die in No. 192 angegebene Weise bestimmen, und hierbei ergibt sich dann auch der durch die ständige Belastung erzeugte Horizontalzug H_g. Die Gestalt der Kette über den Seitenöffnungen kann jetzt durch Lösung der einfachen Aufgabe gefunden werden: zu gegebenen senkrechten Kräften ein Seilpolygon zu zeichnen, welches durch 2 gegebene Punkte (R und L, bezw. T und N) geht und dessen Polweite (H_g) bekannt ist.

Bei Untersuchung der Inanspruchnahme der Brücke darf man stets mit einer gleichförmigen ständigen Belastung g rechnen und dementsprechend die Knoten der Ketten auf Parabeln mit senkrechten Achsen liegend annehmen. Für die Mittelöffnung gilt dann die Gleichung

$$(1) \quad y = f\frac{xx'}{ww'}$$

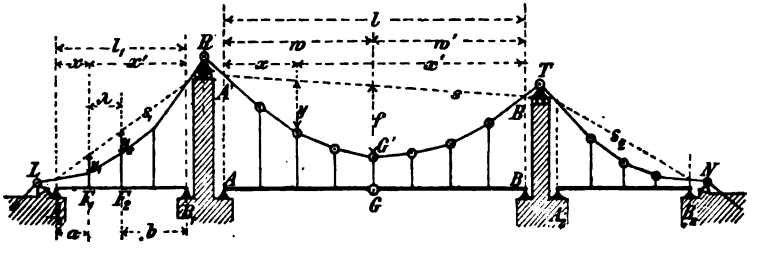


Fig. 409.

und für die Seitenöffnung A_1B_1 die Gleichung

$$y = f_1\frac{xx'}{w_1w'_1},$$

wobei f_1 die der Stelle $x = w_1$ und $x' = l - w_1 = w'_1$ entsprechende Parabelordinate bedeutet. Die Ordinaten sind auf die den Einzelbalken AB und A_1B_1 entsprechenden Schlußlinien zu beziehen. — Da nun einerseits: $H_g = \frac{gww'}{2f}$ und andererseits auch $H_g = \frac{gw_1w'_1}{2f_1}$ ist, so

Digitized by Google

folgt:

$$\frac{w_1 w'_1}{2 f_1} = \frac{w w'}{2 f} \text{ und } f_1 = f \frac{w_1 w'_1}{w w'},$$ *)

womit sich für die Seitenöffnung ebenfalls die Gleichung ergibt

$$(1) \quad y = f \frac{x x'}{w w'}.$$

Der Versteifungsbalken AB der Mittelöffnung wird genau so berechnet wie derjenige einer Kettenbrücke mit einer Öffnung. Es gelten alle in No. 193 bis 195 abgeleiteten Gesetze. Ist AB unbelastet, so ist $H_p = 0$. Lasten, welche über einer Seitenöffnung ruhen, haben keinen Einfluß auf H_p. Die Balken $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ (von denen jeder, ebenso wie AB, ein festes und ein auf wagerechter Bahn bewegliches Lager erhält) verhalten sich unter der Einwirkung solcher Lasten wie einfache (nicht an der Kette hängende) Balken. Lasten über der Mittelöffnung erzeugen einen (nach No. 193 zu bestimmenden) Horizontalzug H_p und beispielsweise für den Querschnitt F_1 des Balkens $A_1 B_1$ das Biegungsmoment $M = -H_p y_1$, ferner für das Feld $F_1 F_2$ die Querkraft: $-H_p \frac{(y_1 - y_2)}{\lambda}$. Hiernach lassen sich die Grenzwerte von M und Q leicht angeben. Es sei z. B. die bewegliche Belastung eine gleichförmige ($= p$). Dann erzeugt gänzliche Belastung von $A_1 B_1$ bei unbelasteter Mittelöffnung AB für irgend einen Querschnitt x des Balkens $A_1 B_1$ das Moment

$$(2) \quad {}_{max}M = p \frac{x x'}{2}.$$

Ausschließliche und gänzliche Belastung der Mittelöffnung bringt hervor

$$(3) \quad {}_{min}M = -H_p y = -p \frac{w w'}{2 f} \cdot f \frac{x x'}{w w'} = -p \frac{x x'}{2}.$$

Es ergibt sich also in der Tat ${}_{max}M = -{}_{min}M$.

Um die Grenzwerte von Q für ein Feld $F_1 F_2$ des Balkens $A_1 B_1$ zu bestimmen, sind die Fälle $y_2 > y_1$ und $y_1 > y_2$ zu unterscheiden. Ist $y_2 > y_1$, so erzeugt die Belastung der Mittelöffnung einen negativen Wert Q. Um ${}_{max}Q$ zu erhalten, wird deshalb die Mittelöffnung unbelastet angenommen und der Balken $A_1 B_1$ nur zwischen B_1 und der im Felde $F_1 F_2$ gelegenen Belastungsscheide belastet. $A_1 B_1$ verhält sich dann wie ein einfacher Balken. Man findet (vergl. die in Fig. 121

*) Mit $w = w' = \frac{1}{2} l$ und $w_1 = w'_1 = \frac{1}{2} l_1$ entsteht (wie auf Seite 404): $f_1 = f \frac{l_1^2}{l^2}$.

Digitized by Google

auf Seite 132 abgeleitete Einflußlinie sowie die Entwicklungen auf Seite 416)

$$(4) \quad {}_{max}Q = +\frac{pb^2}{2(l_1-\lambda)} = -{}_{min}Q,$$

wo b den Abstand des Querträgers F_2 vom Auflager B bedeutet (Fig. 409).

Im Falle $y_2 < y_1$ erzeugt die Belastung der Mittelöffnung ein positives Q, und man berechnet dann zweckmäßig ${}_{min}Q$, indem man wieder nur A_1B_1 und zwar zwischen A_1 und der im Felde F_1F_2 gelegenen Belastungsscheide mit p belastet. Man erhält

$$(5) \quad {}_{min}Q = -\frac{pa^2}{2(l_1-\lambda)} = -{}_{max}Q^*).$$

Das größte Moment für den Balken AB ist im Falle $w = w' = \frac{1}{2}l$ (nach Seite 205) $M = 0{,}019\,pl^2$, und für den Balken A_1B_1 ergibt sich $M = \frac{pl_1^2}{8}$. Sollen beide Momente gleich groß werden, so muß sein $l_1^2 = 8 \cdot 0{,}019\,l^2$ also $l_1 = 0{,}39\,l$.

197. Kettenbrücke mit beliebig vielen Öffnungen und mit durchgehendem Versteifungsbalken. Sind drei Punkte der über eine der Öffnungen zu spannenden Kette gegeben, so läßt sich die Form dieser Kette und die Größe von H_g nach No. 192 bestimmen, und die Gestalt der Ketten über den Seitenöffnungen kann dann (da die Aufhängepunkte stets gegeben sind) durch Lösung der Aufgabe gefunden werden: zu gegebenen senkrechten Lasten ein Seilpolygon mit vorgeschriebener Polweite zu zeichnen, das durch zwei gegebene Punkte geht. Es ist stets zulässig, eine gleichförmige ständige Belastung anzunehmen, und es können dann die Ordinaten auch auf die in No. 196 angegebene Weise berechnet werden. Hierbei sind z. B. die Ketten der in der Fig. 410 dargestellten Brücke zunächst auf die Schlußlinien s'_1, s'_2, s'_3 zu beziehen.

Der durchgehende Versteifungsbalken A, B, C, ... erhält ebensoviele Gelenke, als die Brücke Öffnungen zählt. Die Gelenke sind so zu verteilen, daß nach Weglassung irgend eines Gelenkes ein an der Kette hängender *Gerber*scher Balken entsteht. Die Auflager seien — mit Ausnahme des einen festen Lagers — auf wagerechten Bahnen geführt.

Um die Momente und Querkräfte des Versteifungsbalkens schnell zu finden, denke man zunächst das eine Mittelgelenk beseitigt und betrachte den Gerberschen Balken, an dem außer den beweglichen Lasten P noch die Spannkräfte Z_p der Hängestangen angreifen.

*) Man kann auch ${}_{max}Q$ und ${}_{min}Q$ in der auf Seite 133 angegebenen Weise durch Zeichnung bestimmen, da man es ja in beiden Fällen ($y_2 \lessgtr y_1$) nur mit einem einfachen Balken A_1B_1 zu tun hat.

Digitized by Google

Den Einfluß der P und Z_p bestimme man getrennt und löse den zweiten Teil der Aufgabe mit Hilfe des in No. 92 Seite 163 und Fig. 151 beschriebenen Verfahrens. Man findet dann das von den

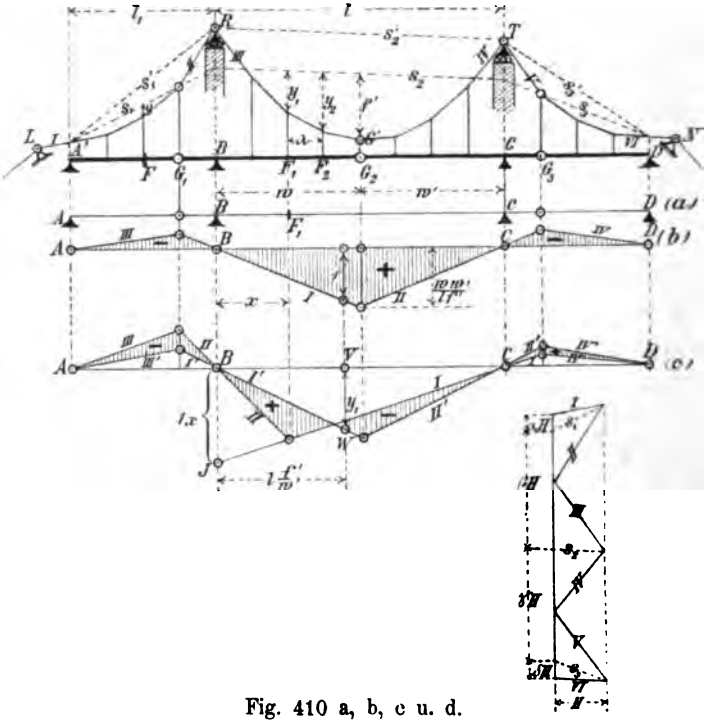


Fig. 410 a, b, c u. d.

Kräften Z_p herrührende Moment in der Form $(-H_p y)$, wo y die Ordinate der Kettenlinie, bezogen auf den durch die Gelenke des Gerberschen Balkens eindeutig bestimmten Schlußlinienzug bedeutet. Auf diese Weise gelangt man z. B. in dem in der Fig. 410 dargestellten Falle, wenn G_2 das vorübergehend beseitigte Gelenk ist, zu dem Gerberschen Balken $ABCD$ (Fig. 410a) und zu dem Schlußlinienzuge $s_1 s_2 s_3$, dessen Ecken auf den Senkrechten durch B und C liegen, und welcher durch die den Gelenken G_1 und G_3 entsprechenden Punkte der Kettenlinie geht. Bezeichnet man dann für irgend einen Querschnitt F_1 oder irgend ein Feld $F_1 F_2$ (gleichgültig innerhalb welcher Öffnung) mit M_0 und Q_0 dasjenige Moment oder diejenige Querkraft, welche entstehen, wenn auf den Gerberschen Balken nur die Kräfte P wirken, so ergibt sich im ganzen

$$M_p = M_0 - H_p y_1 \text{ und } Q_p = Q_0 - H_p \frac{y_2 - y_1}{\lambda}.$$

Digitized by Google

Liegt die Kettenlinie oberhalb des Schlußlinienzuges, so ist y negativ. Dem Querschnitte G_2 entspricht

$$M_G = M_{0G} - H_p f',$$

und es folgt, da dieses Moment $= 0$ sein muß

$$H_p = \frac{M_{0G}}{f'}.$$

Hiernach erhält man die Einflußlinie für den Horizontalzug H_p, indem man die Einflußlinie für das dem Querschnitte G_2 entsprechende Moment eines Gerberschen Balkens $ABCD$ bestimmt und die Ordinaten dieser Linie durch f' dividiert. Auf diesem Wege ergibt sich die in der Fig. 410b dargestellte Einflußlinie für H_p; sie besitzt bei G_2 die Ordinate $\frac{ww'}{lf}$ und — was für die Folge wichtig ist — im Abstande $l\frac{f'}{w'}$ von der Stütze B die Ordinate 1.

Um nun die Einflußlinie für das irgend einem Querschnitte entsprechende Biegungsmoment $M_p = M_0 - H_p y$ zu bestimmen, hat man nur nötig, auf die im Abschnitte VI (Seite 167) angegebene Weise die Einflußlinie für M_0 zu zeichnen und von dieser die mit y multiplizierten Ordinaten der H_p-Linie in Abzug zu bringen. Hiernach stellt z. B. die schraffierte Fläche in Fig. 410c die Einflußfläche für das Moment M_p des Querschnittes F_1 vor. Es wurde zunächst $ABCD$ als ein nicht an der Kette hängender *Gerber*scher Balken betrachtet und die Einflußlinie für M_0 aufgetragen; sie besteht aus den Geraden I, II, III, IV und ist bestimmt durch $\overline{BJ} = 1 \cdot x$. Von den Ordinaten dieser Linie wurden diejenigen der aus den Geraden I' II', III' IV' bestehenden Hy_1-Linie abgezogen, wobei dieser zweite Linienzug durch die im Abstande $l\frac{f'}{w'}$ von Stütze B gelegenen Ordinate $\overline{VW} = 1 \cdot y_1$ bestimmt werden konnte, da ja die H-Linie an dieser Stelle die Ordinate 1 besitzt.

In gleicher Weise kann die Einflußlinie für die in irgend einem Felde auftretende Querkraft Q_p ermittelt werden. Man betrachte den Balken zunächst als nicht an der Kette hängenden Gerberschen Balken, zeichne nach No. 94 (Seite 166) die Einflußlinie für Q_0 und subtrahiere von den Ordinaten derselben diejenigen der $H_p\frac{y_2 - y_1}{\lambda}$-Linie. Letztere Linie besitzt im Abstande $l\frac{f'}{w'}$ von B die (leicht durch Zeichnung zu bestimmende) Ordinate $1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{\lambda}$.

Digitized by Google

Das beschriebene Verfahren ist für Kettenbrücken mit beliebig vielen Öffnungen anwendbar und führt stets sehr schnell zum Ziele; es läßt sich auch zur Ermittelung der an den Auflagern $A, B, C, D, \ldots$ des Versteifungsbalkens wirksamen Stützenwiderstände, welche kurz mit $A, B, C, D, \ldots$ bezeichnet werden sollen, benutzen, da sich diese Widerstände leicht auf die Form bringen lassen

$$A = A_0 - \alpha H;\ B = B_0 - \beta H;\ C = C_0 - \gamma H;\ D = D_0 - \delta H; \ldots$$

wobei $A_0, B_0, C_0, D_0, \ldots$ die Stützenwiderstände für den nicht an der Kette hängenden Balken und $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ feste Zahlenwerte bedeuten. Für den in der Fig. 410 dargestellten Fall erhält man z. B. die einem beliebigen Horizontalzuge H entsprechenden Werte $\alpha H, \beta H, \gamma H, \delta H$ mit Hilfe der ohne weitere Erklärung verständlichen und aus der Fig. 151b abgeleiteten Fig. 410d, deren Geraden $I, II, III, \ldots$ s_1, s_2, s_3 den gleichbezeichneten äußersten Kettengliedern und Schlußlinien der einzelnen Öffnungen parallel sind. Zeichnet man also diese Figur für $H = 1$, so findet man die festen Werte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

§ 49.

Gelenkbogen, versteift durch einen Balken.

198. Gelenkbogen, versteift durch einen darüber liegenden Balken. Ein aus geraden, gelenkartig miteinander verbundenen Stä-

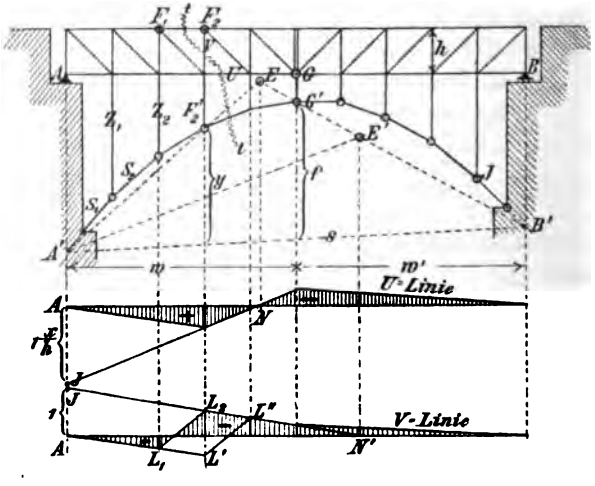


Fig. 411.

ben bestehender Bogenträger werde auf die in der Fig. 411 veranschaulichte Weise durch senkrechte Stangen mit einem Balken ver-

Digitized by Google

bunden, welcher ein festes und ein auf wagerechter Bahn bewegliches Auflager besitzt und durch ein Mittelgelenk G in zwei starre Teile zerlegt wird. Es entsteht ein Träger, welcher als die Umkehrung der durch einen Balken versteiften Kette angesehen werden kann, und für welchen deshalb die in No. 192 bis 195 entwickelten Gesetze gelten. Die Spannkräfte Z und S haben natürlich entgegengesetzte Vorzeichen wie die für die Kettenbrücke gefundenen; sie rufen jetzt Druckspannungen hervor. Auch ist zu beachten, daß die Endpunkte A' und B' der Schlußlinie s unterhalb der Kämpfergelenke auf den verlängerten Mittellinien der äußersten Glieder des Bogens liegen, sobald die Stützweite des Balkens (wie in Fig. 411) größer ist als diejenige des Bogens. In Fig. 411 wurden als Beispiele die Einflußlinien für eine Spannkraft U und eine Spannkraft V vorgeführt.

Die U-Linie ist bestimmt durch die Belastungsscheide E und durch $\overline{AJ} = 1\frac{x}{h}$. Die Gerade $A'E$ geht durch den dem Knoten F_2 (welcher U gegenüberliegt) entsprechenden Punkt F'_2 des Bogens.

Die V-Linie ist (wegen $V = -Q$) bestimmt durch $\overline{AJ} = -1$ und durch den Punkt E'. Die Gerade $A'E'$ ist hierbei parallel zu dem vom Schnitte tt getroffenen Gliede des Bogens zu ziehen. In der Fig. 411 wurde vorausgesetzt, daß die Belastung, um deren Einfluß es sich handelt, in den Knoten der oberen Gurtung angreift. Wirkt sie in den Knoten der unteren Gurtung, so ist die Gerade L_1L_2 zu ersetzen durch $L'L''$.

Wird der Bogen so geformt, daß seine Mittellinie mit dem der ständigen Belastung entsprechenden und durch die Punkte A', G', B' geführten Seilpolygone zusammenfällt, so werden nur die Vertikalen des Versteifungsbalkens infolge der ständigen Belastung beansprucht. In der die Felder λ_m und λ_{m+1} trennenden Vertikale V_m entsteht $V_{m,g} = -\frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1})$, wobei g_0 der an der oberen Gurtung angreifende Teil der ständigen Last ist. Die Spannkräfte O, U, D sind nur von der beweglichen Belastung abhängig, und es gelten die Gleichungen ${}_{max}O + {}_{min}O = 0$; ${}_{max}U + {}_{min}U = 0$; ${}_{max}D + {}_{min}D = 0$.

199. Gelenkbogen, versteift durch einen darunter liegenden, den Horizontalschub des Bogens aufnehmenden Balken. Einen solchen Träger zeigt die Fig. 412. An dem einen Ende ist ein festes Auflager, an dem andern ein bewegliches mit wagerechter Bahn angeordnet worden, so daß der Träger bei ausschließlich senkrechten Lasten auf die Pfeiler nur senkrechte Drücke ausübt, welche mit denen eines einfachen Balkens AB übereinstimmen. Die Versteifung wird bewirkt durch zwei gegliederte, bei G gelenkartig miteinander befestigte

Digitized by Google

starre Scheiben, die mit dem Bogen durch senkrechte Hängestangen verbunden sind.

Wir führen durch den Träger einen Schnitt, welcher vier Stäbe (U_{m-1}, D_m, O_m, S) trifft, Fig. 413, und betrachten das linke Trägerstück. Die Mittelkraft der an ihm angreifenden Lasten sei ΣP; sie ruft im Verein mit dem Stützenwiderstande A in Bezug auf die Knoten m und $(m-1)$ Momente M_{0m} und $M_{0(m-1)}$ hervor, welche ebenso groß sind wie die Momente für dieselben Knoten eines einfachen,

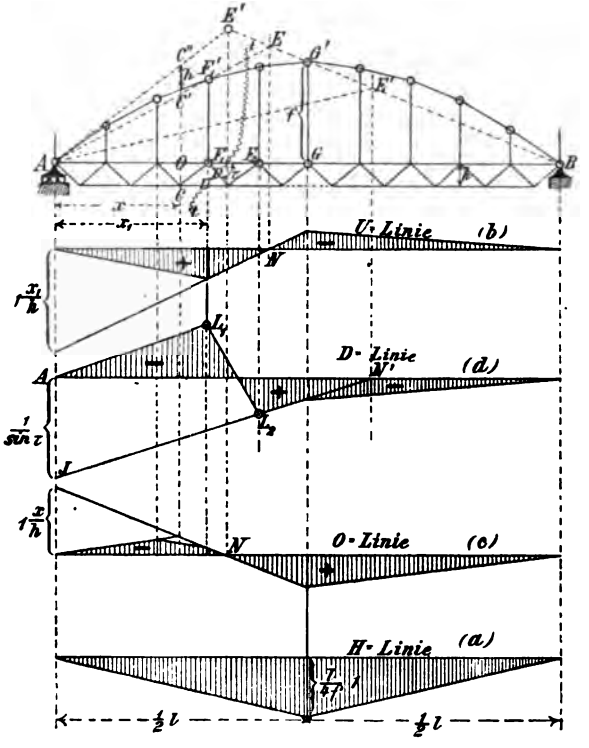


Fig. 412.

nicht am Bogen hängenden Balkens AB. Zerlegt man nun den im geschnittenen Bogengliede wirksamen *Druck* S im Punkte m' in eine wagerechte und in eine senkrechte Seitenkraft, von denen die erstere gleich dem Horizontalschube H ist, so lautet die auf den Knoten m bezogene Rittersche Momentengleichung

$$M_{0m} - H(y_m + h) + O_m h = 0$$

und hieraus folgt

$$O_m = -\frac{M_m}{h}, \text{ wo } M_m = M_{0m} - H(y_m + h).$$

Digitized by Google

Auf demselben Wege findet man

$$U_{m-1} = + \frac{M_{m-1}}{h}, \text{ wo } M_{m-1} = M_{0\,(m-1)} - Hy_{m-1}.$$

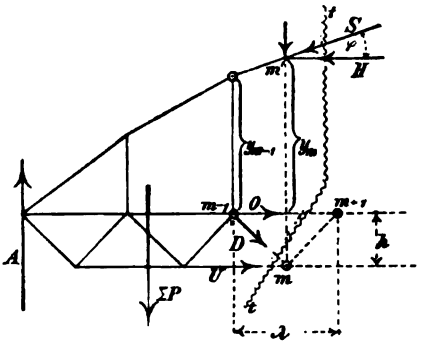


Fig. 413.

Für den Punkt G findet man (Fig. 412)

$$M_G = M_{0\,G} - Hf = 0,$$

weshalb:

$$H = \frac{M_{0\,G}}{f}.$$

Die für M und H gefundenen Ausdrücke stimmen mit denen überein, die sich im § 48 für den Versteifungsbalken der Kette ergaben. Nur tritt, wenn der fragliche Knotenpunkt der unteren Balkengurtung angehört, an die Stelle von y_m der Wert $y_m + h$. Für den Horizontalschub H und für die Spannkräfte U und O ergeben sich deshalb die in den Figuren 412, a, b, c dargestellten Einflußlinien, wobei angenommen ist, daß die Belastung in den Knoten der oberen Gurtung angreift. Die Figuren (a) und (b) bedürfen keiner Erläuterung. Zu Figur (c) ist zu bemerken, daß die Belastungsscheide durch den Punkt E' geht, in welchem die Gerade BG' von der durch A und einen um h oberhalb C' gelegenen Punkt C'' bestimmten Geraden geschnitten wird.

In der Fig. 414 gehört das Mittelgelenk G der unteren Gurtung des Balkens an, während die Kämpfergelenke des Bogens wie vorhin in der oberen Gurtung liegen. Es ergibt sich jetzt

$$H = \frac{M_{0\,G}}{f + h}.$$

Die Höhe des die Einflußfläche für H darstellenden Dreiecks ist nicht mehr $= \frac{l}{4f}$, sondern $= \frac{l}{4(f+h)}$ und die Gerade $B'G'$ ist zu ersetzen durch die Gerade $B'G''$, wobei G' um h höher liegt als G'.

Digitized by Google

Wir haben uns in den Figuren 412 und 414 auf die Darstellung zweier besonderer Fälle beschränkt. *Bei beliebiger Form* der Gurtungen

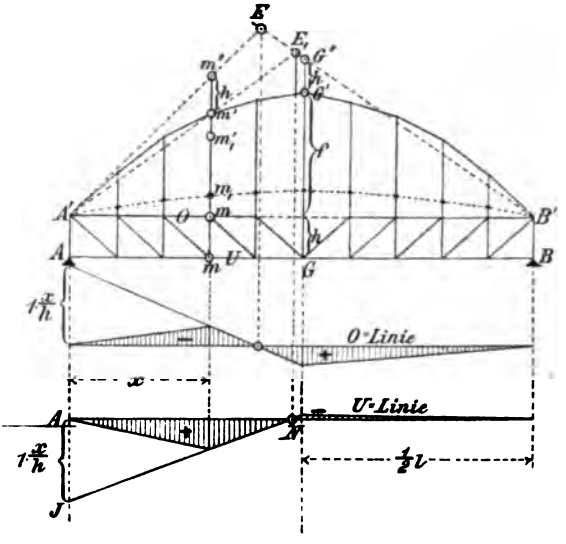


Fig. 414.

des Balkens gelten die Gleichungen

$$M_m = M_{0m} - Hy'_m \text{ und } H = \frac{M_{0G}}{f'},$$

wo y'_m den Abstand des Knotens m von der Bogenachse
und f' „ „ „ Gelenkes G „ „ „
bedeutet, beide Abstände in senkrechter Richtung gemessen. Ersetzt man also beispielsweise in Fig. 414 die gerade obere Gurtung $A'B'$ durch die gebrochene (durch gestrichelte Linien angedeutete) $A'm_1B'$, so wird $U = +\frac{M^m}{r_m}$ und $M_m = M_{0m} - H(y_m - \overline{mm_1})$, wobei r_m das Lot von m_1 auf U bedeutet. An die Stelle von $\overline{AJ} = 1\,\frac{x}{h}$ tritt: $\overline{AJ} = 1\,\frac{x}{r_m}$ und die zur Bestimmung von N zu ziehende Gerade $A'E$ ist durch einen Punkt m'_1 zu ziehen, der von m' den Abstand $m'm'_1 = mm_1$ hat. Da m_1 oberhalb $A'B'$ liegt, muß m'_1 unterhalb m' liegen. Sind auf diese Weise die Einflußlinien für sämtliche Spannkräfte O und U gefunden, so ist man im stande, die Einflußlinien für die in den Füllungsstäben auftretenden Kräfte mittels des in No. 143 beschriebenen Verfahrens zu bestimmen.

Digitized by Google

Die Querkraft für den Schnitt tt in Fig. 413 ist, wenn $A - \Sigma P = Q_0$ (= Querkraft für den durch einen einfachen Balken geführten Schnitt tt) gesetzt wird

$$Q = Q_0 - H \operatorname{tg} \varphi = Q_0 - H \frac{y_{m+1} - y_m}{\lambda_m};$$

sie erscheint in derselben Form wie beim Versteifungsbalken der Kette und kann deshalb auf die im § 48 angegebene Weise ermittelt werden. Fig. 412d zeigt beispielsweise die Einflußlinie für die Spannkraft $D = + \frac{Q}{\sin \tau}$. Der den Punkt N' bestimmende Punkt E' liegt auf der Geraden $B'G'$, und AE' ist parallel dem vom Schnitte tt getroffenen Gliede des Bogens. Es ist $AL_1 \parallel JL_2$. Würde man $\overline{AJ} = 1$ machen, statt $\overline{AJ} = \frac{1}{\sin \tau}$, so würde man die Einflußlinie für die dem Felde F_1F_2 entsprechende Querkraft Q erhalten. In dem in der Fig. 414 dargestellten Falle liegen die Punkte E' auf der Geraden $B'G''$.

Ist die ständige Belastung eine gleichförmige, und gehören die Knoten des Bogens einer Parabel mit senkrechter Achse an, so sind in dem in der Fig. 412 dargestellten Falle die Spannkräfte D_g und $U_g = 0$, vorausgesetzt, daß es zulässig ist, den am Balken angreifenden Teil der ständigen Belastung ausschließlich auf die oberen Knoten desselben zu verteilen. Für sämtliche Stäbe der oberen Gurtung ergibt sich $O_g = + H_g = + \frac{gl^2}{8f}$. Ist auch die bewegliche Belastung eine gleichförmige ($= p$), so entsteht bei gänzlicher Belastung des Balkens mit p in der oberen Gurtung $O_p = + \frac{pl^2}{8f}$, während D_p und U_p wieder $= 0$ werden. Es folgt dann

$$_{max}U + {}_{min}U = 0; \quad {}_{max}D + {}_{min}D = 0.$$

§ 50.

Verwertung der Kettenlinie zur Linienführung der Gurtungen.

200. Gelegentlich der Bearbeitung eines Brückenentwurfs kam der Verfasser auf den Gedanken, die Gurtungen eines Auslegerbalkens als Seillinien für eine gesetzmäßig sich ändernde Belastung aufzufassen und gelangte auf diesem Wege zu einem Verfahren, das zu einer sehr einfachen Berechnung der für die Zulage der Eisenkonstruktion in der Werkstatt erforderlichen genauen Ordinaten führte und eine schnelle

Digitized by Google

Vergleichung verschiedener, lediglich nach ästhetischen Gesichtspunkten gewählten Linienführungen möglich machte.*)

Es handelte sich bei jenem Entwurfe um eine über drei Öffnungen reichende symmetrische, hängende Gurtung (Fig. 415), deren äußere Teile AB den Eindruck von Rückhaltketten machen sollten und deshalb in strafferer Spannung am Portal über dem Strompfeiler

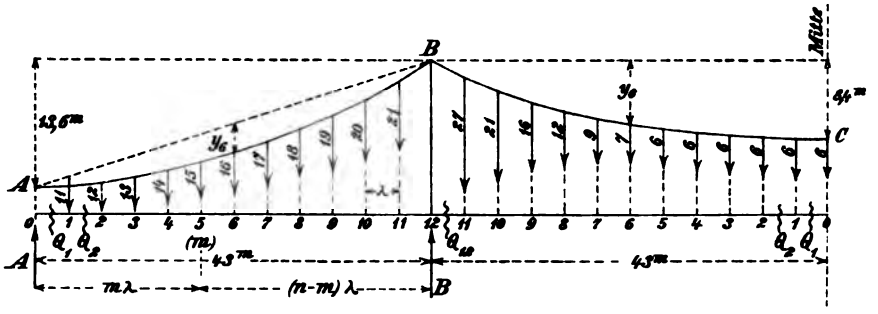


Fig. 415.

angreifen mußten, während sich für die Kette BCB eine etwas stärkere Krümmung als vorteilhaft erwies. Nach verschiedenen Proben wurde die Gurtung AB als Seileck senkrechter Lasten geformt, die sich zueinander verhalten wie die Zahlen 11, 12, 13 . . . bis 21. Die Knotenpunkte der Gurtung CB liegen im mittleren Teile in einer Parabel; hier wurde die Belastungsziffer konstant = 6 angenommen; nach dem Kämpfer hin steigt die Belastung, einer Differenzreihe zweiter Ordnung folgend, bis auf 27.

Die auf die Verbindungslinie der Aufhängepunkte bezogenen Seileckordinaten y verhalten sich zueinander wie die Biegungsmomente eines einfachen Balkens (s. Seite 406 Fig. 404). Die überall gleiche Feldweite darf bei der Berechnung der Momente gleich 1 gesetzt werden, so daß sich für die schrittweise Ermittelung der Querkräfte und Momente der Mittelöffnung die Formeln ergeben

$$Q_{m+1} = Q_m + P_m$$
$$M_m = M_{m+1} + Q_{m+1},$$

wo P_m die im m^{ten} Knotenpunkte angreifende Last bedeutet. Für das erste Feld ist $Q_1 = \frac{1}{2} P_o$**); ferner ist $M_{11} = Q_{12}$. Nach Berechnung

*) Müller-Breslau. Der Kaisersteg über die Oberspree bei Oberschöneweide. Zeitschrift für Bauwesen, 1900, Heft I.

**) Bei ungerader Felderzahl ist $Q_1 = 0$.

Digitized by Google

der Momente findet man die Ordinaten mittels der Beziehung

$$y_m = y_o \frac{M_m}{M_o} = 8{,}4 \frac{M_m}{558}.$$

Die nachstehende Tabelle enthält die vollständige Zahlenrechnung für die Mittelöffnung.

m	P_m	Q_m	M_m	y_m
0	6		558	8,400 m
1	6	3	555	8,355
2	6	9	546	8,219
3	6	15	531	7,994
4	6	21	510	7,677
5	6	27	483	7,271
6	7	33	450	6,774
7	9	40	410	6,172
8	12	49	361	5,434
9	16	61	300	4,516
10	21	77	223	3,357
11	27	98	125	1,882
12		125	0	

In ähnlicher Weise wird auch die Seitenöffnung AB behandelt. Man berechnet zuerst den linken Auflagerwiderstand des mit den Werten 11, 12, 13, ... 21 belasteten Balkens und findet

$$Q_1 = A = \frac{1}{12}(21 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 19 + \ldots\ldots + 11 \cdot 11) = \frac{946}{12} = 78{,}83$$

$Q_2 = Q_1 - P_1$,

$Q_m = Q_{m-1} - P_{m-1}$;

$M_1 = Q_1$, $M_2 = M_1 + Q_2$, u. s. w. $M_m = M_{m-1} + Q_m$.

Die Ordinaten der Gurtung sind

$$y_m = \frac{M_m}{100}.$$

Damit A den runden Wert 78 annimmt, wurde Last 21 durch 22 ersetzt, 11 durch 10, Änderungen, welche die Gestalt der Gurtung nur wenig beeinflussen. Hiernach entstand die folgende Tabelle:

Digitized by Google

m	P_m	Q_m	M_m	y_m
1	10	+ 78	78	0,78^m
2	12	+ 68	146	1,46
3	13	+ 56	202	2,02
4	14	+ 43	245	2,45
5	15	+ 29	274	2,74
6	16	+ 14	288	2,88
7	17	— 2	286	2,86
8	18	— 19	267	2,67
9	19	— 37	230	2,30
10	20	— 56	174	1,74
11	22	— 76	98	0,98
12		— 98	0	0

Folgen die Lasten dem Gesetze

$$P_m = a + a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3 + \ldots\ldots$$

wo a, a_1, a_2, ... feste Zahlenwerte sind, und ist die Anzahl der Felder $= n$, so erhält man für die Reaktionen B und A die Werte

$$B = \Sigma P_m \frac{m}{n} = \frac{1}{n}(a S_1 + a_1 S_2 + a_2 S_3 + a_3 S_4 + \ldots);$$

$$A = \Sigma P - B$$

wo $S_r = \sum_{m=1}^{m=(n-1)} m^r$.

Man findet

$$S_1 = \frac{(n-1)\,n}{2}$$

$$S_2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{2 \cdot 3}$$

$$S_3 = \left[\frac{(n-1)\,n}{2}\right]^2$$

$$S_4 = \frac{n\,(n-1)\,(6n^3 - 9n^2 + n + 1)}{30}.$$

Ist $P_m = a$, so wird $Q_1 = A = \frac{n-1}{2} a$,

„ $P_m = m$, „ „ $Q_1 = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{3}$,

„ $P_m = m^2$, „ „ $Q_1 = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{6}$,

Digitized by Google

Ist $P_m = m^3$, so wird $Q_1 = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{(n+1)(3n^2-2)}{30}$.

Wählt man also beispielsweise

$$P_m = a + 0{,}5m^2, \text{ so erhält man}$$

$$Q_1 = \frac{n-1}{2}\left(a + \frac{n(n+1)}{12}\right).$$

Wird $P_m = 10 + m$ angenommen, so ergibt sich für $n = 12$

$$Q_1 = \frac{n-1}{2}\left(10 + \frac{n+1}{3}\right) = \frac{11}{2}\left(10 + \frac{13}{2}\right) = 78{,}83.$$

201. Einhüftige Seilpolygone AB (Fig. 416a) können auch aus symmetrischen Seilpolygonen $B'A'B'$ (Fig. 416b) in der Weise abgeleitet werden, daß, nach Berechnung der auf die Gerade $B'B'$ bezogenen Ordinaten y, die lotrechten Abstände η der Knotenpunkte von der Sehne $A'B'$ bestimmt und von einer anders geneigten Sehne AB aus aufgetragen werden.

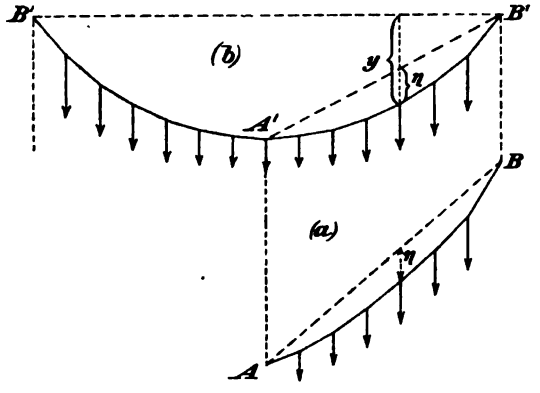


Fig. 416.

Sehr zweckmäßig ist auch bei einhüftigen Seilpolygonen die Berechnung der auf die Verlängerung der ersten oder letzten Seite bezogenen Ordinaten (Fig. 417), da man häufig über die Richtung der einen dieser beiden Seiten von vornherein verfügen wird. Die Ordinaten y_m verhalten sich hier zueinander wie die Momente M_m eines Freiträgers. Zählt man die Lasten von A aus und bezieht man das Seileck auf die an B grenzende Seite, so erhält man, wenn man die konstant angenommene Feldweite wieder gleich 1 setzt,

$$Q_m = Q_{m+1} + P_m \text{ und } M_m = M_{m+1} + Q_{m+1}.$$

Digitized by Google

Für das in Fig. 417 dargestellte Seileck, welches von dem in Fig. 415 abgebildeten nur wenig abweicht, ergeben sich die folgenden Zahlenwerte.

m	P_m	Q_m	M_m	$y_m = g_A \frac{M_m}{M_A} = \frac{12\,M_m}{1166} = \frac{6\,M_m}{583}$
11	21	21	0	0
10	20	41	21	0,216 m
9	19	60	62	0,638
8	18	78	122	1,256
7	17	95	200	2,058
6	16	111	295	3,036
5	15	126	406	4,178
4	14	140	532	5,475
3	13	153	672	6,916
2	12	165	825	8,491
1	11	176	990	10,189
			1166	12,000

Verfügt man von vornherein über die Lagen der ersten und letzten Polygonseite, so ist das Gesetz, welchem die Lasten P folgen.

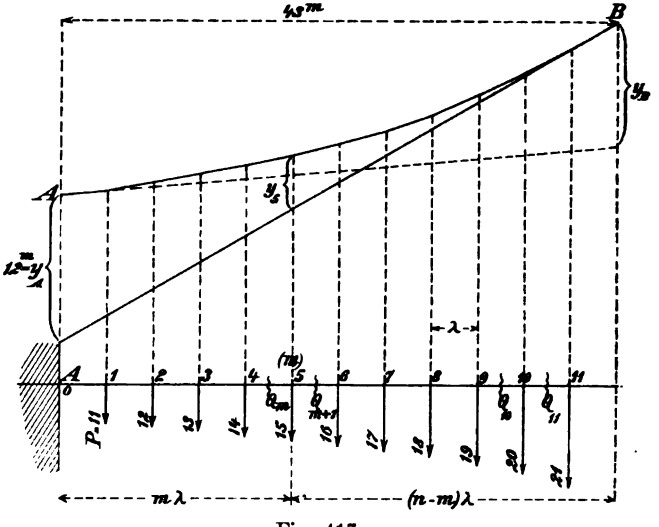


Fig. 417.

einer Einschränkung unterworfen. Es müssen sich nämlich die Strecken y_A und y_B, welche die äußersten Polygonseiten auf den Senkrechten durch die Endpunkte A und B abschneiden, zueinander verhalten wie die Biegungsmomente M_A und M_B zweier Freiträger, die bei A oder B

Digitized by Google

eingespannt und mit den Kräften P belastet sind. Zählt man die Lasten von A aus, so erhält man die Gleichung

$$\frac{y_A}{y_B} = \frac{\Sigma P_m m}{\Sigma P_m (n-m)} = \frac{\Sigma P_m m}{n \Sigma P_m - \Sigma P_m m},$$

wo (nach Seite 430)

$$\Sigma P_m m = a S_1 + a_1 S_2 + a_2 S_3 + \ldots.$$
$$\Sigma P_m = a(n-1) + a_1 S_1 + a_2 S_2 + \ldots\ldots.$$

Ist z. B.

$$P_m = a + a_1 m + a_2 m^2,$$

so wird

$$\Sigma P_m m = \frac{(n-1)\,n}{2}\left[a + \tfrac{1}{3} a_1 (2n-1) + \tfrac{1}{2} a_2 (n-1)\,n\right]$$
$$\Sigma P_m = (n-1)\left[a + \tfrac{1}{2} a_1 n + \tfrac{1}{6} a_2 n (2n-1)\right]$$

und

$$\frac{y_A}{y_B} = \frac{a + \frac{1}{3} a_1 (2n-1) + \frac{1}{2} a_2 (n-1)\,n}{a + \frac{1}{3} a_1 (n+1) + \frac{1}{6} a_2 (n+1)\,n}.$$

Wählt man $P_m = a + m$, so findet man für a den Wert

$$a = \frac{2n - 1 - \frac{y_A}{y_B}(n+1)}{3\left(\frac{y_A}{y_B} - 1\right)}.$$

202. Wir wollen noch einige Formeln für Seillinien mit stetiger Belastung herleiten und betrachten zu dem Zwecke die in Fig. 418 dargestellte Belastungsfläche. Die Belastungslinie sei eine Parabel r^{ter} Ordnung und habe die Gleichung

$$x_x = x_l \frac{x^r}{l^r},$$

wo x_l die Belastungshöhe an der Stelle $x = l$ bedeutet. Der Inhalt der Belastungsfläche ist

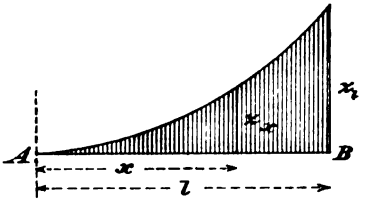


Fig. 418.

$$F = \int_0^l x_x dx = \frac{x_l l}{r+1}$$

und das statische Moment der Fläche, bezogen auf die Senkrechte durch A

$$M_A = \int_0^l x_x x dx = \frac{x_l l^2}{r+2}.$$

Digitized by Google

Die Abstände des Schwerpunktes der Fläche von den Senkrechten durch A und B sind demnach

$$\xi = l\frac{r+1}{r+2} \text{ und } \xi' = l - \xi = l\frac{1}{r+2}$$

und das Moment der Fläche in Bezug auf die Senkrechte durch B

$$M_B = \frac{z_l l^2}{(r+1)(r+2)}.$$

Wirkt die betrachtete Belastung auf einen bei B eingespannten Freiträger, so ist das Biegungsmoment an der Stelle x

$$M = \frac{z_x x^2}{(r+1)(r+2)} = \frac{z_l x^{r+2}}{(r+1)(r+2) l^r}.$$

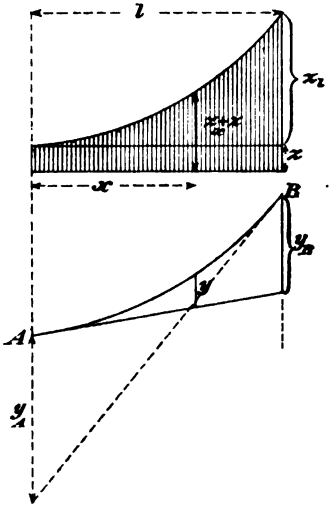


Fig. 419.

Besteht nun die Belastungsfläche einer einhüftigen Kettenlinie (Fig. 419) aus einem Rechteck von der Höhe z und einem von einer Parabel r^{ter} Ordnung begrenzten Teile, so lautet die Gleichung der Kettenlinie, bezogen auf die Tangente im Endpunkte A

$$y = y_B \frac{M}{M_B},$$

worin zu setzen

$$M = \frac{z x^2}{2} + \frac{z_l x^{r+2}}{(r+1)(r+2) l^r},$$

$$M_B = \frac{z l^2}{2} + \frac{z_l l^2}{(r+1)(r+2)}.$$

Man erhält demnach

$$y = y_B \frac{x^2}{l^2} \frac{1 + \varepsilon \frac{x^r}{l^r}}{1 + \varepsilon},$$

wo

$$\varepsilon = 2\frac{z_l}{z}\frac{1}{(r+1)(r+2)}$$

ist. Schreibt man auch der Tangente in B eine bestimmte Lage vor, so muß sein

$$\frac{y_B}{y_A} = \frac{M_B}{M_A} = \frac{\frac{z l^2}{2} + \frac{z_l l^2}{(r+1)(r+2)}}{\frac{z l^2}{2} + \frac{z_l l^2}{(r+2)}}$$

$$\frac{y_B}{y_A} = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon(r+1)}.$$

Digitized by Google

Beginnt die parabolische Belastung $\left(z_x = z_b \frac{x^r}{b^r}\right)$ erst im Abstande $a = l - b$ von A, Fig. 420, so ist für den Abschnitt a

$$M = \frac{z x^2}{2}$$

und für den Abschnitt b

$$M = \frac{z (a+x)^2}{2} + \frac{z_b x^{r+2}}{(r+1)(r+2) b^r}.$$

Ferner ist

$$M_B = \frac{z l^2}{2} + \frac{z_b b^2}{(r+1)(r+2)}$$

$$M_A = \frac{z l^2}{2} + \frac{z_b b}{r+1}\left(a + b\frac{r+1}{r+2}\right).$$

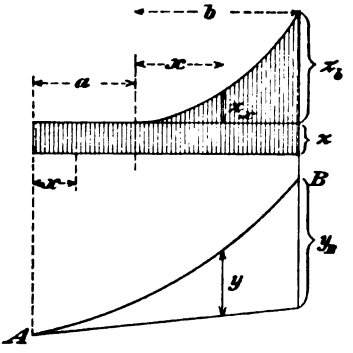


Fig. 420.

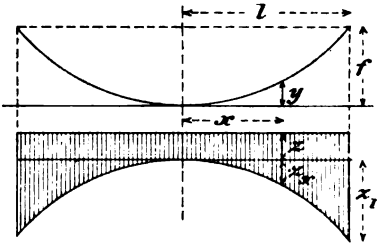


Fig. 421.

Die vorstehenden Gleichungen lassen sich auch für die symmetrische Kette verwerten; denn diese besteht aus zwei einhüftigen Ketten mit wagerechter Scheiteltangente. Für den in Fig. 421 dargestellten Fall erhält man also

$$y = f \frac{x^2}{l^2} \frac{1 + \varepsilon \frac{x^r}{l^r}}{1 + \varepsilon}.$$

Als **Beispiel** wählen wir die in Fig. 422 abgebildete Auslegerbogenbrücke. Stützweite der Seitenöffnung $6 \cdot 3 = 18^m$, der Mittelöffnung $16 \cdot 3 = 48^m$, Pfeilhöhe $6{,}0^m$. Für die Mittelöffnung setzen wir $r = 2$ und erhalten für den Knotenpunkt m (wegen $x = m\lambda$ und $l = 8\lambda$)

$$y_m = 6{,}0 \frac{m^2}{64} \frac{1 + \varepsilon \frac{m^2}{64}}{1 + \varepsilon}.$$

Digitized by Google

Die Ziffer ε wollen wir so wählen, daß $f - y_7$ ungefähr 2,0^m, also y_7 ungefähr 4,0^m wird. Aus der Gleichung

$$4{,}0 = 6{,}0 \frac{49}{64} \frac{1 + \varepsilon \frac{49}{64}}{1 + \varepsilon}$$

folgt $\varepsilon = 1{,}23$, wofür wir den durch 64 teilbaren Wert 1,28 nehmen. Dann ergibt sich

$$y_m = \frac{m^2 (1 + 0{,}02\, m^2)}{24{,}32}$$

also für $m =$	1	2	3	4	5	6	7
$y =$	0,042^m	0,178^m	0,437^m	0,869^m	1,542^m	2,546^m	3,989^m
$f - y =$	5,958^m	5,822^m	5,563^m	5,131^m	4,458^m	3,454^m	2,011^m.

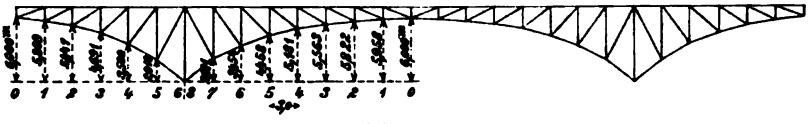


Fig. 422.

Für die Seitenöffnung nehmen wir $r = 1$ an und erhalten (wegen $x = m\lambda$, $l = 6\lambda$)

$$y_m = \frac{m^2 \left(1 + \varepsilon \frac{m}{6}\right)}{6 (1 + \varepsilon)}.$$

Die Ziffer ε möge so bestimmt werden, daß die Ordinate y_5 der Seitenöffnung ebenso groß wird, wie die Ordinate y_7 der Mittelöffnung. Aus der Gleichung

$$3{,}989 = \frac{25 \left(1 + \varepsilon \frac{5}{6}\right)}{6 (1 + \varepsilon)}$$

ergibt sich $\varepsilon = 0{,}344$, wofür der durch 6 teilbare Wert 0,342 genommen werden möge. Dann wird

$$y_m = \frac{m^2 (1 + 0{,}057\, m)}{8{,}052}$$

also für $m =$	1	2	3	4	5
$y =$	0,131^m	0,553^m	1,309^m	2,440^m	3,990^m
$f - y =$	5,869^m	5,447^m	4,691^m	3,560^m	2,010^m.

203. Bei Bogen- und Hängebrücken werden die Gurtungen öfter aus krummen Stäben gebildet. Kreisbögen oder Korbbögen erhalten dann in der Regel, wegen der größeren Einfachheit der Werkstattarbeit, den Vorzug. Die zuerst nach irgend welchen Grundsätzen gezeichnete Linie muß durch Kreis-

Digitized by Google

bögen ersetzt werden. Soll z. B. ein symmetrischer Korbbogen (Fig. 423) durch die Punkte $C_0 C_1 C_2 C_3$ gelegt werden, so berechnet man die Winkel α_1, α_2, α_3 mittels der Gleichungen

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{h_1}{e_1},\quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{h_2}{e_2},\quad \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{h_3}{e_3},$$

findet hierauf

$$\beta_1 = \alpha_1$$
$$\beta_2 = \alpha_2 - 2\beta_1$$
$$\beta_3 = \alpha_3 - 2\beta_1 - 2\beta_2$$

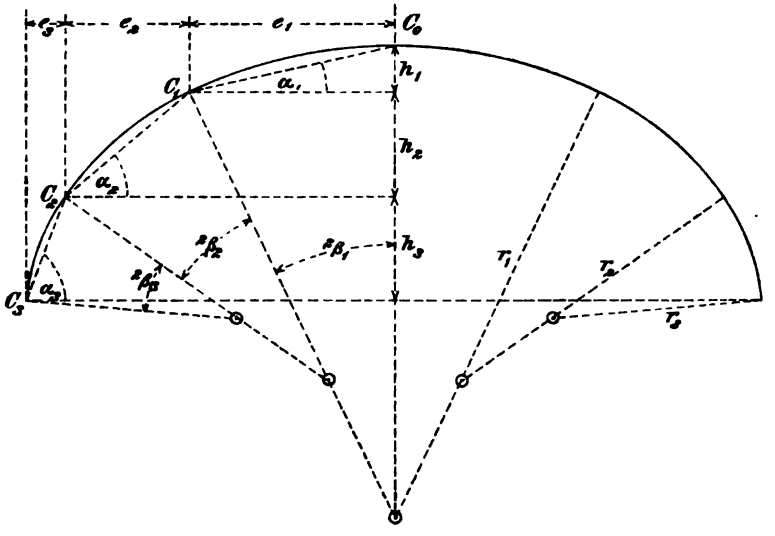


Fig. 423.

und erhält die Halbmesser

$$r_1 = \frac{e_1}{2\sin\beta_1\cos\alpha_1},\quad r_2 = \frac{e_2}{2\sin\beta_2\cos\alpha_2},\quad r_3 = \frac{e_3}{2\sin\beta_3\cos\alpha_3}.$$

Ist die Feldweite λ konstant, so achte man bei der Berechnung der Kreislinien-Ordinaten darauf, daß die Werte y^2 eine Differenzreihe zweiter Ordnung bilden und sich auf die Form

$$y_m^2 = a + bm + cm^2$$

bringen lassen. Für die in Fig. 424 angenommenen Koordinaten ist beispielsweise $a = k^2$, $b = 2c\lambda$, $c = -\lambda^2$.

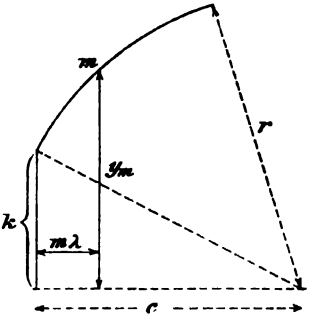


Fig. 424.

Digitized by Google

XIII. Abschnitt.

Allgemeine Theorie des statisch bestimmten ebenen Fachwerks.

§ 51.

Analytische Untersuchung.

204. Kennzeichen statisch bestimmter Fachwerke. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, das ebene Fachwerk ganz allgemein, jedoch unter Festhaltung an der bereits auf Seite 208 hervorgehobenen Voraussetzung zu untersuchen, daß es zulässig sei, die durch die Elastizität der Fachwerkstäbe und der das Fachwerk stützenden fremden Körper bedingten Formveränderungen als verschwindend klein aufzufassen und bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die Richtungen der Stäbe und die Richtungen der Widerstände, welche in den längs Führungen laufenden Stützpunkten angreifen, als unveränderlich anzusehen.

Wird dann das Fachwerk auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y) bezogen, und werden mit Q_{xm} und Q_{ym} die parallel zu den Koordinatenachsen gebildeten Seitenkräfte der im Knotenpunkte m angreifenden äußeren Kraft Q_m (welche gegebene Last oder unbekannter Stützenwiderstand sein kann) bezeichnet, ferner mit $S_1, S_2, \ldots S_p$ die Spannkräfte in den von m ausgehenden Stäben und mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ die Neigungswinkel dieser Stäbe gegen die x-Achse, so lauten die Bedingungen für das Gleichgewicht der auf den Knoten m wirkenden Kräfte:

$$(1) \quad \begin{cases} Q_{xm} + \sum_1^p S \cos \alpha = 0 \\ Q_{ym} + \sum_1^p S \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Zwei solcher Gleichungen ersten Grades lassen sich für jeden Knotenpunkt aufstellen, und ebenso groß muß auch die Anzahl der unbekannten Stützenwiderstände und Stabkräfte sein, wenn das Fachwerk ein statisch bestimmtes sein soll.

Der Widerstand eines beweglichen Auflagers ist nur der Größe nach unbekannt; seine Richtung fällt in die Normale der Bahn, längs

Digitized by Google

welcher der Stützpunkt geführt wird. Hingegen kennt man von dem Widerstande eines festen Auflagers weder Größe noch Richtung.

Bezeichnet man also:

mit n' die Anzahl der geführten Stützpunkte,
„ n'' „ „ „ festgehaltenen Stützpunkte,
„ r „ „ „ Stäbe des Fachwerks,
„ k „ „ „ Knotenpunkte,

so erhält man zur Berechnung der *notwendigen* und *hinreichenden* Stabzahl eines statisch bestimmten Fachwerks die Gleichung

$$(2) \quad r + n' + 2n'' = 2k.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen bilden ein lineares System von $i = 2k$ Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1i}x_i = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2i}x_i = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots\cdots + a_{ii}x_i = c_i \end{cases}$$

deren Koeffizienten $a_{11} \ldots a_{ii}$ endliche Werte besitzen, die nur von den Richtungen der Stäbe und der Führungen der beweglichen Auflager abhängen, während die Koeffizienten $c_1 \ldots c_i$ den am Fachwerk angreifenden Lasten proportional sind und sämtlich gleich Null werden, sobald das Fachwerk unbelastet ist. Die Auflösung des Systems (3) liefert für x_m den Wert

$$(4) \quad x_m = \frac{D_m}{D},$$

wo

$$(5) \quad D = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \cdots\cdots a_{1i} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \cdots\cdots a_{2i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}a_{i2}a_{i3} \cdots\cdots a_{ii} \end{vmatrix}$$

ist und D_m eine Determinante bezeichnet, welche sich von der Determinante D nur dadurch unterscheidet, daß an die Stelle der Spalte

$$\begin{vmatrix} a_{1m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{im} \end{vmatrix}$$ die Spalte $$\begin{vmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_i \end{vmatrix}$$ tritt.

Die Formel (4) gibt für ein von Null verschiedenes D die einzigen Werte der Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_m$ an, durch welche das System der Gleichungen (3) befriedigt wird.

Hieraus folgt: Ist $r + n' + 2n'' = 2k$ und $D \lesseqgtr 0$, so ist das

Digitized by Google

Fachwerk erstens *statisch bestimmt,* weil sich die Spannkräfte und Stützenwiderstände für jeden Belastungszustand eindeutig berechnen lassen, und zweitens ist es *unbeweglich,* weil die Gleichungen (1) und (3) ausdrücken, daß an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht besteht. Ist hingegen $D = 0$, so sind die Unbekannten $x_1 \ldots x_i$ entweder nicht alle eindeutig bestimmt oder nicht alle endlich, oder es gelingt ihre Berechnung nur für gewisse Belastungsweisen, oder es ist ein Gleichgewichtszustand nur dann möglich, wenn die Kräfte bestimmten Bedingungen genügen. Welcher dieser Fälle auch vorliegen möge, das eine steht fest: *im Falle $D = 0$ ist das Fachwerk kein statisch bestimmtes.*

Es ist nun besonders hervorzuheben, daß sich durch geschickte Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die zeitraubende Arbeit der Ausrechnung der Determinnate D von $2k$ Gleichungen stets umgehen läßt. In den meisten Fällen der Praxis ist es sogar möglich, diese Bedingungen so zu bilden, daß jede Gleichung nur eine einzige Unbekannte enthält. Alle in den früheren Abschnitten behandelten Fachwerke lassen sich auf diesem Wege berechnen; man braucht nur Momentengleichungen aufzustellen und die Drehpunkte passend zu wählen. In anderen Fällen ist es wieder möglich, zwei Gleichungen mit je zwei Unbekannten zu bilden und nach Auflösung derselben jede der übrigen Unbekannten mittels einer Gleichung zu berechnen, die nur noch eine Unbekannte enthält; die Entscheidung der Frage nach der statischen Bestimmtheit erfordert dann nur die Ausrechnung einer Determinante zweiten Grades u. s. w. Unsere Aufgabe wird also darin bestehen, den Grad der Determinante, welche über die statische Bestimmtheit Aufschluß gibt, möglichst zu erniedrigen. Bevor wir dieselbe lösen, wollen wir diejenigen Bildungsgesetze statisch bestimmter Fachwerke zusammenstellen, welche zu Stabgebilden führen, die mit Hilfe der in den früheren Abschnitten entwickelten Verfahren berechnet werden können. Schwierigere Fälle werden wir dann auf einfachere zurückführen.

Bei dieser allgemeinen Untersuchung wird es zuweilen zweckmäßig sein, die nach festen Richtungen wirkenden Seitenkräfte der Stützenwiderstände als die Spannkräfte von Stäben aufzufassen, welche die Stützpunkte mit außerhalb des Fachwerks gelegenen festen Punkten verbinden und *Auflagerstäbe* genannt werden. Zu einem festen Auflager gehören zwei, zu einem beweglichen Auflager ein Auflagerstab. Da man nun jene festen Punkte als Knotenpunkte eines die Gesamtheit aller Widerlager vorstellenden statisch bestimmten Fachwerks — z. B. eines Dreiecknetzes — ansehen darf, so erkennt man, daß man schließlich jedes irgendwie gestützte Fachwerk auf eine einzige starre Scheibe zurückführen kann, an welcher ein System im Gleichgewicht befindlicher äußerer Kräfte angreift. Bedeutet k die Anzahl

Digitized by Google

der Knotenpunkte dieser Scheibe, so stehen $2k$ Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Da nun die äußeren Kräfte nicht beliebig angenommen werden dürfen, sondern drei Gleichgewichtsbedingungen, welche in jenen $2k$ Gleichungen mit enthalten sind, genügen müssen, so beträgt die notwendige und hinreichende Anzahl der Stäbe einer Scheibe

$$(6) \quad r = 2k - 3.$$

Diese Beziehung kann auch aus der Gleichung (2) hergeleitet werden; denn zur Stützung einer starren Scheibe sind erforderlich und hinreichend: entweder ein festes und ein bewegliches Auflager ($n'' = 1$, $n' = 1$) oder drei bewegliche Auflager ($n' = 3$). Wenn wir also in der Folge bei allgemeineren Untersuchungen nur von unbekannten Stabkräften reden (wie in No. 206) oder nur von einem Fachwerk von $2k - 3$ Stäben (wie in No. 207), so liegt darin keineswegs eine Einschränkung.

205. Die einfachsten Bildungsgesetze der statisch bestimmten Fachwerke. 1) Schließt man an zwei Knotenpunkte A und B eines statisch bestimmten Fachwerks einen neuen, nicht in die Gerade AB fallenden Knotenpunkt C durch zwei Stäbe AC und BC an, so ist das neue Fachwerk ebenfalls statisch bestimmt. Die Spannkräfte der hinzugefügten Stäbe sind nur von der in C angreifenden äußeren Kraft P_c abhängig und können mit Hilfe eines Kräftedreiecks bestimmt werden. Auf diese Weise kann man beliebig viele Knotenpunkte mit zwei festgehaltenen Stützpunkten in Verbindung bringen, oder man kann, von einem Dreieck ausgehend, eine gegliederte Scheibe bilden, deren Knotenpunkte sich gegeneinander nicht bewegen können. Die Festhaltung der Scheibe in der Konstruktionsebene erfolgt schließlich mit Hilfe von drei Auflagerstäben, deren Achsen sich aber nicht in einem und demselben Punkte schneiden dürfen (vergl. S. 112).

Fällt der Knotenpunkt C in die Gerade AB, so haben die um A und B mit den Halbmessern AC und BC beschriebenen Kreise ein Bogenelement gemein, innerhalb dessen sich der Punkt C frei bewegen kann. Punkt C wird also nicht festgelegt, sondern behält eine *unendlich kleine Beweglichkeit*. Gleichgewicht ist nur dann möglich, wenn auch P_c in die Gerade BC fällt; der Gleichgewichtszustand ist aber unbestimmt, weil sich für die Stäbe AC und BC unendlich viele Spannkräfte angeben lassen, deren Differenz gleich P_c ist. Liegt aber P_c nicht in der Geraden AB, so tritt der Gleichgewichtszustand erst nach einer unendlich kleinen Verrückung des Punktes C ein, und die Zerlegung von P_c nach den beiden nur unendlich wenig voneinander abweichenden Richtungen AC und BC liefert unendlich große Spannkräfte.

Digitized by Google

In Wirklichkeit ändern sich allerdings die Längen aller von P_c beanspruchten Fachwerkstäbe schon bei der geringsten Belastung des Knotens C. Dreht sich dann AC gegen BC, so liefert die Zerlegung von P_c nach den beiden Stabrichtungen endliche Spannkräfte. Aber auch dann, wenn A, B und C in einer Geraden liegen bleiben und P_c in diese Gerade fällt, entstehen in AC und BC ganz bestimmte endliche Spannkräfte, welche sich aus der Bedingung folgern lassen, daß die Summe der Änderungen der Längen dieser beiden Stäbe gleich der Strecke ist, um die sich der Abstand AB infolge der Verschiebungen der Knotenpunkte A und B ändert. Diese einfache Betrachtung lehrt ganz deutlich, *daß beim Auftreten unendlich kleiner Beweglichkeit und dem damit stets Hand in Hand gehenden Auftreten unendlich großer Wurzeln der linearen Gleichgewichtsbedingungen die Voraussetzung verschwindend kleiner Formveränderungen unzulässig ist. Schon in der Nähe der durch den Ausnahmefall gekennzeichneten Grenzlage wird jene Voraussetzung hinfällig.*

2) Schließt man an zwei Knotenpunkte A und B eines statisch bestimmten Fachwerks einen neuen, nicht in die Gerade AB fallenden Knotenpunkt C durch zwei statisch bestimmte Scheiben AC und BC an, so ist das neue Fachwerk ebenfalls statisch bestimmt. Die Kräfte mit denen die beiden Scheiben in C aufeinander wirken, und die Kräfte, welche sie bei A und B auf das ursprüngliche Fachwerk ausüben, findet man mit Hilfe der in No. 108, Seite 176 angegebenen Verfahren; denn es liegt gewissermaßen ein Dreigelenkbogen vor, dessen Widerlager das ursprüngliche Fachwerk ist. Diese zweite Bildungsweise schließt die erste als Sonderfall ein, da biegungsfeste Stäbe nur besondere Fälle von Scheiben sind.

3) Gliedert man an drei Knotenpunkte A, B, C eines statisch bestimmten Fachwerks eine statisch bestimmte Scheibe durch drei Stäbe AA_1, BB_1, CC_1 an, so ist das neue Fachwerk ebenfalls statisch bestimmt. Die Ermittelung der Spannkräfte in den drei Stäben erfolgt mit Hilfe des Ritterschen oder des Culmannschen Verfahrens (§ 26). Zu vermeiden ist nur der Ausnahmefall, daß sich die drei Geraden AA_1, BB_1 und CC_1 in einem Punkte schneiden, weil es sonst möglich ist, das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ unendlich wenig zu verschieben. Sind die drei Stäbe parallel und gleich lang, so ist die Beweglichkeit sogar eine endliche; Gleichgewicht ist in diesem Falle nur möglich, wenn die Mittelkraft der auf die Scheibe $A_1 B_1 C_1$ wirkenden äußeren Kräfte parallel zu den Verbindungsstäben ist. An die Stelle der drei Verbindungsstäbe dürfen auch drei statisch bestimmte Scheiben treten; die an ihnen angreifenden äußeren Kräfte werden nach den im § 28 gezeigten Verfahren auf die Knotenpunkte A, A_1, B, B_1, C, C_1 verteilt.

Digitized by Google

4) Eine vierte Bildungsweise erhält man aus der zweiten, wenn man jedes der drei Gelenke A, B, C, in denen die beiden hinzugefügten Scheiben mit dem bereits vorliegenden Fachwerk und miteinander zusammenhängen, durch ein Stäbepaar ersetzt, dessen Schnittpunkt nach einer schon früher angestellten Untersuchung (No. 141, S. 233) dieselbe Rolle spielt wie ein Gelenk. An die Stelle der Verbindungsstäbe dürfen auch statisch bestimmte Scheiben treten. Liegen die drei Gelenkpunkte A, B, C in einer Geraden, so besitzt das Fachwerk unendlich kleine Beweglichkeit. Dieser Fall liegt z. B. bei dem in Fig. 426 dargestellten *Pascal*schen Sechseck vor; denn dieses Stabgebilde besteht aus drei zu Stäben zusammengeschrumpften Scheiben I, II, III, welche durch drei Stäbepaare, deren Schnittpunkte A, B, C in eine Gerade fallen, miteinander verbunden sind.

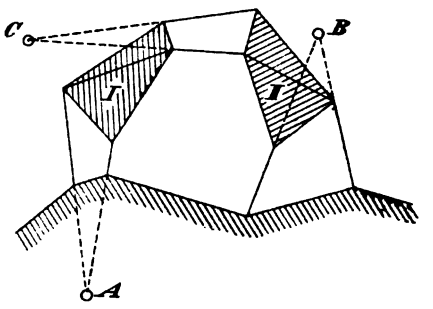


Fig. 425.

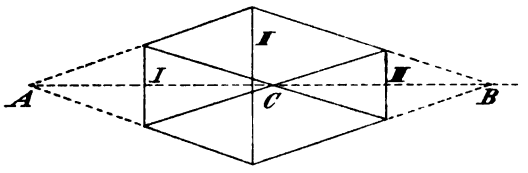


Fig. 426.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß die vierte Bildungsweise die drei anderen mit enthält. Läßt man z. B. zwei Gelenkvierecke zu einfachen Gelenken zusammenschrumpfen und eine der beiden hinzugefügten Scheiben zu einem Stabe, so erhält man die dritte Bildungsweise.

Wir haben die beschriebenen Bildungsgesetze die einfachsten genannt, weil sie Fachwerke liefern, deren statische Bestimmtheit ohne weiteres einleuchtet, und weil auch die Ausnahmefälle unendlich kleiner oder endlicher Beweglichkeit auf den ersten Blick zu erkennen sind.

206. Ein ganz allgemeines Verfahren zur Berechnung statisch bestimmter Fachwerke ist nun das folgende.

Man verwandle das Fachwerk durch Beseitigung von Stäben und Hinzufügung von ebensoviel neuen Stäben, welche kurz *Ersatzstäbe* genannt werden sollen, in ein Stabgebilde, dessen statische Bestimmt-

Digitized by Google

heit außer allem Zweifel steht, und dessen Spannkräfte sich auf möglichst einfache Weise ermitteln lassen. Die Spannkräfte der beseitigten Stäbe bringe man an dem neuen Fachwerk als äußere Kräfte an; sie mögen mit Z_a, Z_b, Z_c . . . Z_m bezeichnet werden. Hierauf stelle man die Spannkräfte des neuen Fachwerks als Funktionen der gegebenen Lasten P und der vorläufig unbekannten Kräfte Z dar. Sie erscheinen, da alle Gleichgewichtsbedingungen vom ersten Grade sind, in der linearen Form

$$(7) \quad S = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_a Z_a + \mathfrak{S}_b Z_b + \mathfrak{S}_c Z_c + \ldots\ldots \mathfrak{S}_m Z_m,$$

wobei $\mathfrak{S}_0$ denjenigen Wert bedeutet, welchen $\mathfrak{S}$ annimmt, sobald sämtliche Kräfte Z gleich Null gesetzt werden, sobald also nur die Lasten P auf das neue Fachwerk einwirken. Weiter bedeutet $\mathfrak{S}_a$ den Wert von S für den Fall, daß alle Lasten P verschwinden, desgleichen die Kräfte Z_b, Z_c, ... Z_m, während die beiden Kräfte Z_a die Größe 1 annehmen, eine Belastungsweise, welche wir kurz den Zustand $Z_a = 1$ nennen wollen; und ganz ebenso lassen sich die Ziffern $\mathfrak{S}_b$, $\mathfrak{S}_c$, . . . $\mathfrak{S}_m$ als die Spannkräfte für die Zustände $Z_b = 1$, $Z_c = 1$, . . . $Z_m = 1$ auffassen. Die Ziffern $\mathfrak{S}_a$, $\mathfrak{S}_b$, $\mathfrak{S}_c$, . . . $\mathfrak{S}_m$ sind unabhängig von den Lasten P, während die Spannkräfte $\mathfrak{S}_0$ für jeden neuen Belastungsfall von neuem ermittelt werden müssen.

Setzt man schießlich die Spannkräfte in den Ersatzstäben gleich Null, so erhält man ebensoviele Gleichungen ersten Grades, als Kräfte Z vorhanden sind, ist also im stande, die letzteren zu berechnen. Die erforderliche, aber auch ausreichende Bedingung für die eindeutige Bestimmung der Unbekannten Z ist eine von Null verschiedene Nennerdeterminante jener Gleichungen.

Werden also die Spannkräfte in den Ersatzstäben mit Y', Y'', Y''' . . . bezeichnet, so ergeben sich die Bedingungen

$$(8) \quad \begin{cases} Y' = Y_0' + Y_a' Z_a + Y_b' Z_b + Y_c' Z_c + \ldots + Y_m' Z_m = 0 \\ Y'' = Y_0'' + Y_a'' Z_a + Y_b'' Z_b + Y_c'' Z_c + \ldots + Y_m'' Z_m = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Y^m = Y_0^m + Y_a^m Z_a + Y_b^m Z_b + Y_c^m Z_c + \ldots + Y_m^m Z_m = 0. \end{cases}$$

Das Fachwerk ist statisch bestimmt, sobald

$$(9) \quad D = \begin{vmatrix} Y_a' & Y_b' & Y_c' & \ldots & Y_m' \\ Y_a'' & Y_b'' & Y_c'' & \ldots & Y_m'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_a^m & Y_b^m & Y_c^m & \ldots & Y_m^m \end{vmatrix} \gtrless 0$$

ist. Diese Determinante ist von erheblich niedrigerem Grade als die Determinante der Geichungen (1); ihre Berechnung geht stets schnell von statten. Häufig genügt schon die Beachtung der folgenden Sätze:

Digitized by Google

1) Sind sämtliche Elemente einer Zeile oder einer Spalte einer Determinante gleich Null, so ist die Determinante gleich Null.

2) Sind die Elemente zweier Zeilen oder zweier Spalten einer Determinante entsprechend gleich oder proportional, so ist die Determinante gleich Null. Z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1, & -a_1 c_1 \\ a_2, & -a_2 c_2 \\ a_3, & -a_3 c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 b_1 \lambda b_1 \\ a_2 b_2 \lambda b_2 \\ a_3 b_3 \lambda b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

In den nachstehenden Anwendungen werden wir zur Erzielung einer kurzen Ausdrucksweise die Ersatzstäbe *Y*-Stäbe nennen und die weggenommenen Stäbe: *Z-Stäbe.*

Manchem Leser dürfte die folgende kurze Anweisung zur Berechnung der Determinanten erwünscht sein. Eine Determinante vom r^{ten} Grade läßt sich in r-Unterdeterminanten vom $(r-1)^{\text{ten}}$ Grade zerlegen. Die Unterdeterminante zum Element a_k findet man, indem man die Spalte a und die k^{te} Zeile der ursprünglichen Determinante streicht; sie erhält das Vorzeichen + oder —, je nachdem der Zeiger k ungerade oder gerade ist. Hiernach ergibt sich das folgende Schema:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_3 d_3 \\ a_4 b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \end{vmatrix}.$$

Besonders wichtig ist der folgende Satz.

Addiert man die mit einer beliebigen Größe multiplizierten Elemente einer Zeile oder Spalte zu den entsprechenden Elementen einer anderen Zeile oder Spalte, so ändert sich der Wert der Determinante nicht. Z. B. ist

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1 + \lambda a_1, & c_1 + \lambda' a_1 \\ a_2, & b_2 + \lambda a_2, & c_2 + \lambda' a_2 \\ a_3, & b_3 + \lambda a_3, & c_3 + \lambda' a_3 \end{vmatrix}.$$

Wählt man nun $\lambda = -\frac{b_1}{a_1}$ und $\lambda' = -\frac{c_1}{a_1}$, so erhält man

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2, & b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2, & c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 \\ a_3, & b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3, & c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2, & c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 \\ b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3, & c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 \end{vmatrix}.$$

Damit ist gezeigt, wie man den Grad einer Determinante erniedrigen kann.

Digitized by Google

Beispiel. Figur 427 stellt ein symmetrisches Fachwerk vor, welches man ein *sechsfaches Netzwerk* zu nennen pflegt, weil jede von Gurtung zu Gurtung reichende Strebe durch die Schar der anders gerichteten Streben in *sechs* Abschnitte zerlegt wird. Die Stützweite wird durch die Knotenpunkte der einen Gurtung in zwei halbe Felder und n ganze Felder eingeteilt.

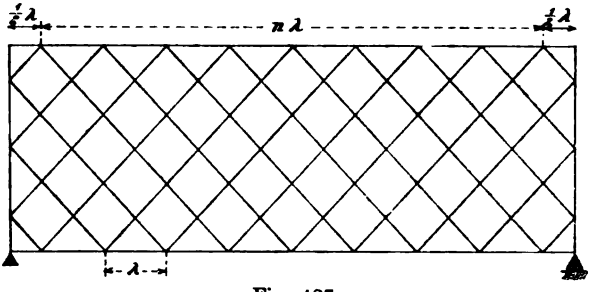


Fig. 427.

Sowohl die senkrechte als auch die wagerechte Mittellinie sind Symmetrieachsen. Die Abzählung der Stäbe und Knotenpunkte lehrt, daß das Fachwerk einen Stab zu wenig besitzt, wobei es ganz gleichgültig ist, ob die Streben an den Kreuzungsstellen miteinander verbunden sind oder nicht. Wir wollen den

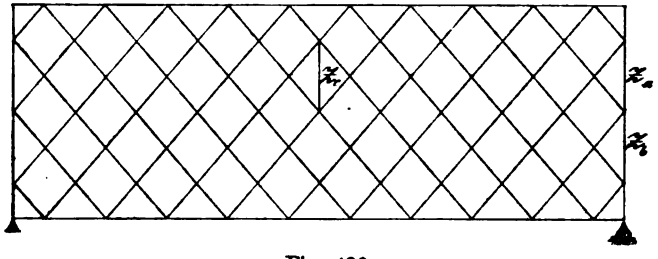


Fig. 428.

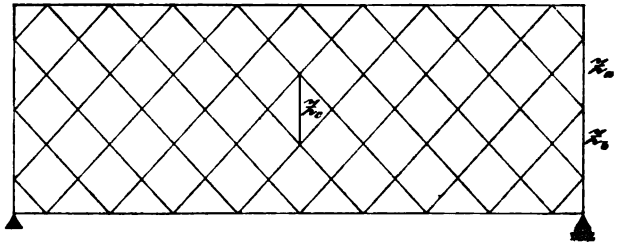


Fig. 429.

ersteren Fall voraussetzen, weil er der üblichen Ausführungsweise entspricht, und weil engmaschige Fachwerke ganz besonders für zerlegbare Brücken in Betracht kommen. Bei diesen aber sind kurze Stablängen am Platz, damit Transport und Zusammenbau leicht von statten gehen. Den fehlenden Stab fügen wir in der Weise hinzu, daß wir ein in der Mitte liegendes Viereck versteifen, wobei die in den Figuren 428 bis 430 dargestellten Anordnungen in Betracht

Digitized by Google

kommen können. Die ganze Abzählung ist übrigens überflüssig; denn ein Blick auf die Figur 431 lehrt, daß sich nach Einfügung von drei Y-Stäben und Wegnahme von drei Z-Stäben ein statisch bestimmtes Fachwerk ergibt, welches sich nach dem ersten Bildungsgesetze an eine aus aneinandergereihten Dreiecken bestehende Scheibe

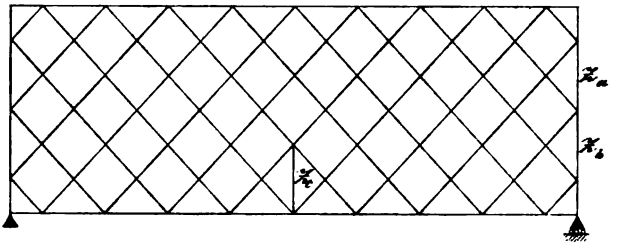


Fig. 430.

angliedern läßt. Wäre die Aussteifung des einen Vierecks durch den Stab Z_c unterblieben, so würden den drei Y-Stäben nur zwei Z-Stäbe gegenüberstehen.

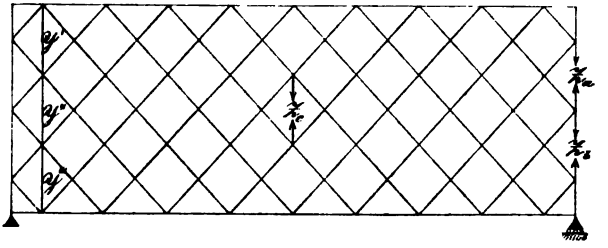


Fig. 431.

Nachdem nunmehr für die erforderliche Stabzahl gesorgt worden ist, muß zur Untersuchung der Determinante

$$(10) \quad D = \begin{vmatrix} Y_a' & Y_b' & Y_c' \\ Y_a'' & Y_b'' & Y_c'' \\ Y_a''' & Y_b''' & Y_c''' \end{vmatrix}$$

geschritten werden. Wir beginnen mit der Ermittelung der Spannkräfte für den in Fig. 432a dargestellten Zustand $Z_c = 1$. Die gedrückten Streben und gedrückten Gurtstäbe sind unterstrichen, die spannungslosen Streben fortgelassen und die spannungslosen Gurtstäbe gestrichelt worden. Die Spannkräfte in den Streben sind

$$\mu = \pm \frac{1}{2 \sin \varphi},$$

wo φ den Neigungswinkel der Streben gegen die Wagerechte bedeutet. In den Gurtungen entstehen die Spannkräfte

$$\nu = +1 \cdot \operatorname{cotg} \varphi.$$

In unserer Figur ist $n = 12$ angenommen worden; es greifen dann an der aus Dreiecken bestehenden Scheibe nur die Spannkräfte von 4 Streben an. Rückt man die Stütze um eine Feldweite nach rechts ($n = 11$), so gesellt sich zu den 4 Streben noch ein Gurtstab, dessen Spannkraft mit derjenigen der angrenzenden Strebe zu einer Mittelkraft von der Größe μ und der Neigung φ vereinigt werden kann. Es

Digitized by Google

leuchtet ein, daß es stets genügt, die Spannkräfte in den Streben zu verfolgen, weil sich die an der Scheibe angreifenden Gurtkräfte ohne weiteres aus der Bedingung ergeben, daß sich die Scheibe im Gleichgewicht befinden muß. Auf diese Weise gelangt man sehr schnell zu den sechs in Fig. 432b dargestellten möglichen Belastungsweisen der Endscheibe; sie entsprechen nicht nur den Zahlen

$$n = 12 \quad 11 \quad 10 \quad 9 \quad 8 \quad 7$$

sondern auch den Zahlen

$$n = 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$
$$n = 18 \quad 17 \quad 16 \quad 15 \quad 14 \quad 13$$

u. s. w.

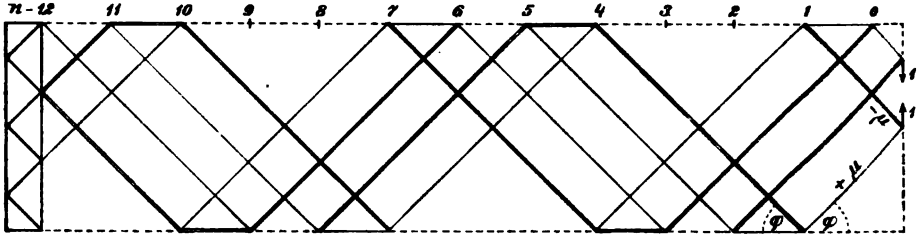


Fig. 432a.

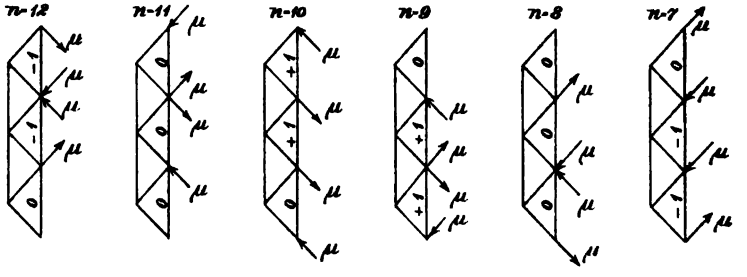


Fig. 432b.

und liefern für die Spannkräfte $Y_a' Y_a'' Y_a'''$ der Ersatzstäbe die in die Figuren eingetragenen Werte. Da nun für

$$n = 2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots\ldots$$

alle drei Werte Y_a gleich Null sind, was zur Folge hat, daß auch die Determinante D gleich Null wird, ***so erweist sich das Fachwerk als unbrauchbar, sobald die Zahl $n - 2$ den Teiler 3 besitzt.***

Der Belastungszustand $Z_b = 1$ ist das Spiegelbild des Zustandes $Z_a = 1$.

Für die weitere Untersuchung sind die drei in den Figuren 428, 429 und 430 dargestellten Fälle zu unterscheiden. Wir nehmen zunächst an, es sei ***n ungerade.*** Fig. 428.

Fig. 433 stellt den Spannungszustand $Z_a = 1$ dar. Die Spannkräfte in den Streben sind wieder

$$\mu = \pm \frac{2}{2 \sin \varphi},$$

in den Gurtstäben:

$$\nu = \pm 1 \cdot \operatorname{cotg} \varphi.$$

Digitized by Google

Die sechs verschiedenen Angriffsweisen, denen die Endscheibe ausgesetzt ist, zeigen die Figuren 434; sie entsprechen sowohl den Fällen

$$\frac{n+1}{2} = 9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4$$

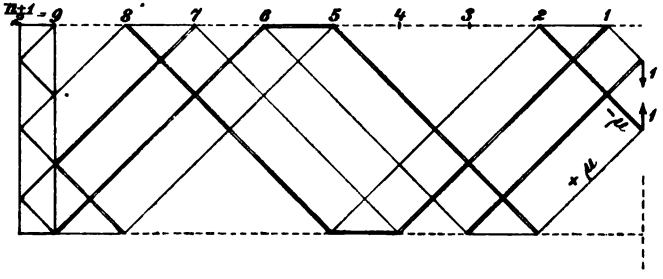
d. i. $n = \underline{17} \quad 15 \quad 13 \quad \underline{11} \quad 9 \quad 7$

als auch den Fällen

$$\frac{n+1}{2} = 15 \quad 14 \quad 13 \quad 12 \quad 11 \quad 10$$

d. i. $n = \underline{29} \quad 27 \quad 25 \quad \underline{23} \quad 21 \quad 19$ u. s. w.

Fig. 433.



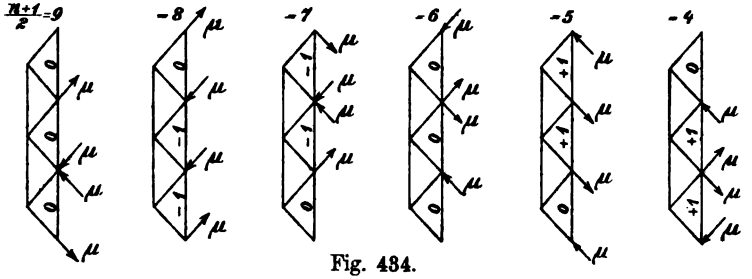


Fig. 434.

und liefern für die Spannkräfte $Y_o' Y_o'' Y_o'''$ der Ersatzstäbe die in die Figuren 434 eingetragenen Werte. Für die unterstrichenen n sind alle drei Werte Y_o gleich Null, und es wird deshalb auch die Determinante D gleich Null. Scheidet man diese Fälle und die als unbrauchbar erkannten Fälle $n = 5, 11, 17, 23, \ldots$ aus, so erhält man für alle noch übrig bleibenden die Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} 0 & +1 & 0 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{für } n = 3, 15, 27, \ldots$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \end{vmatrix} \quad \text{für } n = 7, 19, 31, \ldots$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{für } n = 9, 21, 33, \ldots$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{für } n = 13, 25, 37, \ldots:$$

Digitized by Google

dieselben sind gleich Null, weil die Elemente zweier Spalten entsprechend gleich oder proportional sind. ***Das untersuchte Fachwerk ist deshalb für jedes ungerade n unbrauchbar.***

Ist n eine *gerade* Zahl, so sind die beiden in den Figuren 429 und 430 dargestellten Fälle zu unterscheiden. Für den ersten zeigt Fig. 435 den Spannungszustand $Z_e = 1$; die Figuren 436 geben Aufschluß über die 6 Angriffsweisen, denen die Endscheibe für verschiedene n ausgesetzt ist, und über die bei diesen Angriffsweisen in den Ersatzstäben hervorgerufenen Spannkräfte. Sie entsprechen der Reihe nach den Werten

$$n = 18,\ 16,\ 14,\ 12,\ 10,\ 8\ .$$

beziehungsweise

$$n = 6,\ 4,\ 2$$

oder

$$n = 30,\ 28,\ 26,\ 24,\ 22,\ 20 \text{ u. s. w.}$$

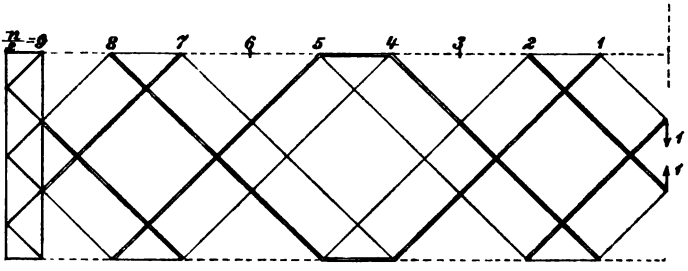


Fig. 435.

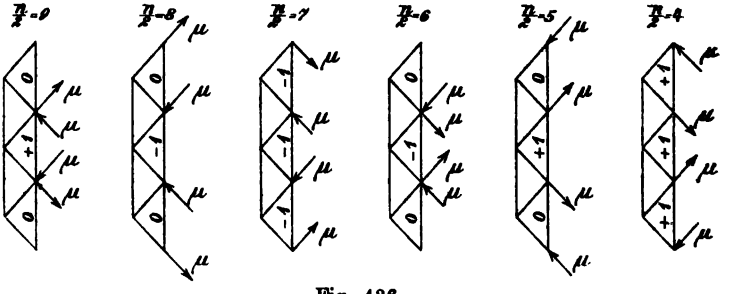


Fig. 436.

Nach Ausscheidung der bereits bei der Untersuchung des Zustandes $Z_e = 1$ als unbrauchbar erkannten Fälle

$$n = 2,\ 8,\ 14,\ 20, \ldots\ldots$$

findet man für die Determinanten D die Werte

$$D = \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \text{ für } n = 4,\ 16,\ 28, \ldots\ldots$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \text{ für } n = 6,\ 18,\ 30, \ldots\ldots$$

Digitized by Google

$$D=\begin{vmatrix}+1 & 0 & 0\\ +1 & +1 & +1\\ 0 & +1 & 0\end{vmatrix}=-1 \text{ für } n=10,\ 22,\ 34,\ \ldots.$$

$$D=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=+1 \text{ für } n=12,\ 24,\ 36,\ \ldots.$$

und erkennt, ***daß das Fachwerk in Fig. 429 statisch bestimmt ist, sobald $n-2$ nicht durch 3 teilbar ist.*** Für die brauchbaren n ist die Determinante D gleich $+1$ oder gleich -1 je nachdem $\frac{n}{2}$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Zu einem ähnlichen Ergebnis führt die Untersuchung des in Fig. 430 dargestellten Falles der Aussteifung eines an einer Gurtung liegenden Vierecks. Die Belastung $Z_o=1$, Fig. 437, erzeugt in den durch eine eingeklammerte 2 gekennzeichneten Streben doppelt so große Spannkräfte $\left(\frac{\pm 1}{\sin\varphi}\right)$ wie in den übrigen. [Die

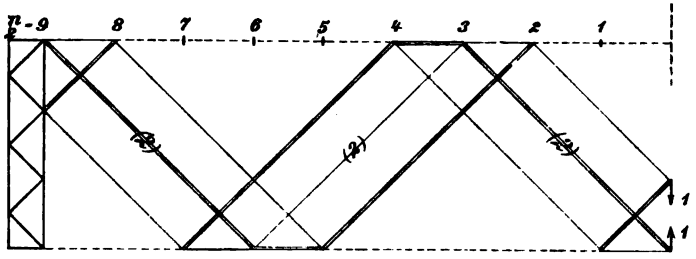


Fig. 437.

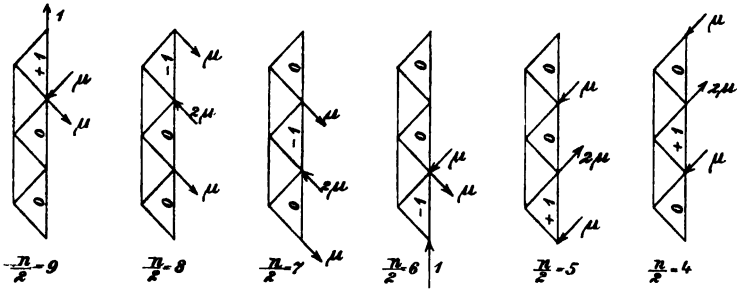


Fig. 438.

Spannkräfte in den Gurtungen sind wieder gleich $\pm 1\cdot\operatorname{cotg}\varphi$. In den Figuren 438 sind die 6 verschiedenen Belastungsfälle für die Endscheibe angegeben. Man findet

$$D=\begin{vmatrix}+1 & 0 & -1\\ +1 & +1 & 0\\ 0 & +1 & 0\end{vmatrix}=-1 \text{ für } n=\ 4,\ 16,\ 28,\ \ldots.$$

$$D=\begin{vmatrix}-1 & 0 & +1\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=+1 \text{ für } n=\ 6,\ 18,\ 30,\ \ldots.$$

Digitized by Google

$$D = \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \end{vmatrix} = +1 \text{ für } n = 10,\ 22,\ 34,\ \ldots.$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \text{ für } n = 12,\ 24,\ 36,\ \ldots.$$

Das Fachwerk in Fig. 430 ist also statisch bestimmt, sobald $n - 2$ nicht durch 3 teilbar ist. Für die brauchbaren n ist die Determinante D gleich -1 oder gleich $+1$, je nachdem $\frac{n}{2}$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Weitere Übungsbeispiele liefern die Figuren 439 bis 442.

In den Figuren 439 und 440 bilden die Streben einen einzigen zusammenhängenden Stabzug 0 1 2 3 4 . . . . ., der von einem Eckknoten ausgeht und in einem anderen Eckknoten endigt. Derartige mehrfache Strebenfachwerke sind stets statisch bestimmt. In jedem der beiden vorgeführten Beispiele sind zwei Y-Stäbe und zwei Z-Stäbe einzuführen. Die mit (a) und (b) bezeichneten Figuren zeigen die Belastungszustände der Endscheibe für $Z_a = 1$ und $Z_b = 1$. Für das Fachwerk in Fig. 439 ist der Zustand $Z_b = 1$ das Spiegelbild des Zustandes $Z_a = 1$. Man findet

für Fig. 439 $\quad D = \begin{vmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

„ „ 440 $\quad D = \begin{vmatrix} +1 & +1 \\ 0 & +1 \end{vmatrix} = +1.$

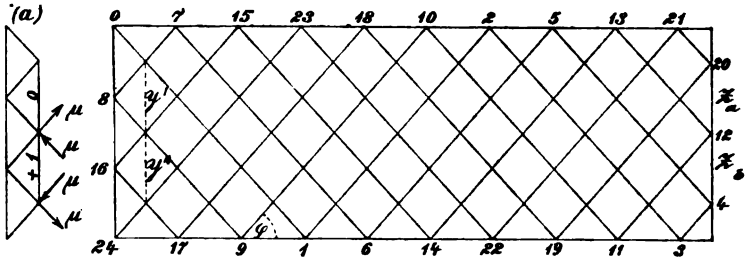


Fig. 439.

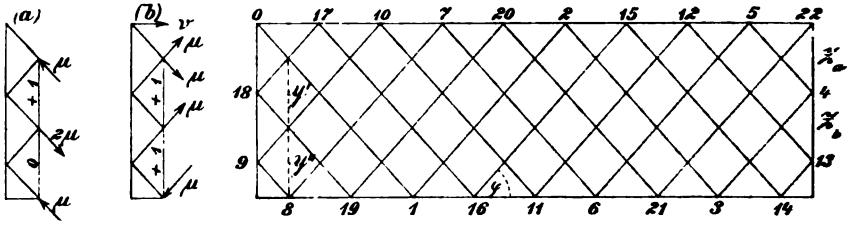


Fig. 440.

Fas Fachwerk in Fig. 441 ist statisch unbestimmt, weil die Anzahl der Z-Stäbe um 1 größer ist, als die Anzahl der Y-Stäbe. Dieser Fall liegt immer

Digitized by Google

vor, wenn ein Strebenzug vorkommt, der mit den Gurtungen und Endständern zusammen ein Dreiecknetz bildet (wie *I II III IV*); daneben treten dann stets *geschlossene* Strebenzüge auf, z. B. 0, 1, 2, 3, . . . 8. Bei der Berechnung von D ist ein Z-Stab (gleichgültig, welcher) fortzulassen. Man findet stets $D = 0$. Um dies für Fig. 441 nachzuweisen, genügt es, den Zustand $Z_a = 1$ zu untersuchen; man findet $Y_a' = 0$, $Y_a'' = 0$. Das Fachwerk ist also beweglich, trotzdem es einen überzähligen Stab besitzt.

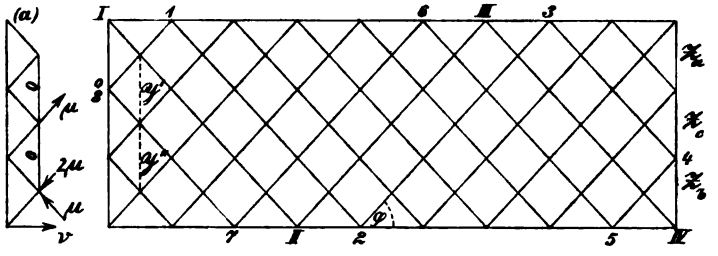


Fig. 441.

Das in Fig. 442 dargestellte Fachwerk ist ebenfalls statisch unbestimmt, weil zwei Y-Stäben drei Z-Stäbe gegenüberstehen. Es ist unbeweglich. Läßt man nämlich den Stab Z_a fort, so findet man

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Läßt man Z_b fort, so ergibt sich

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Das Fachwerk besitzt zwei Strebenzüge. Der eine beginnt im Knotenpunkte A_1 und endigt in E_1, der andere führt von A_2 bis E_2.

Beispiele für die graphische Behandlung mehrteiliger Strebenfachwerke finden sich in No. 210 und § 53. In § 53 wird auch die Ermittelung der Einflußlinien erläutert werden.

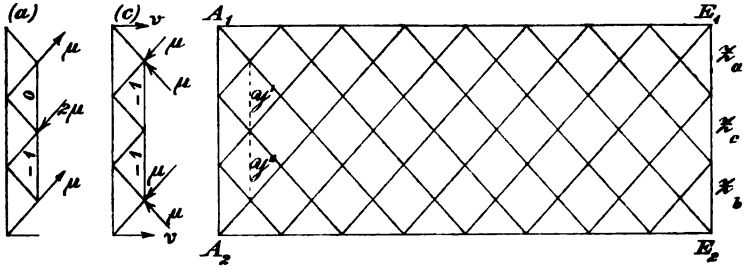


Fig. 442.

207. Das Verfahren von Henneberg. Aus einem statisch bestimmten Fachwerke von k Knotenpunkten und $2k - 3$ Stäben, bei welchem zwei Knotenpunkte A und B durch einen Stab verbunden

Digitized by Google

sind, kann man im allgemeinen ein solches von $k+1$ Knotenpunkten in der Weise herleiten, daß man einen neuen Knotenpunkt D mit den Punkten A und B und einem dritten Knotenpunkte C durch Stäbe verbindet und den Stab AB wegnimmt. Das neue Fachwerk besitzt dann $2k-3+2=2(k+1)-3$ Stäbe, und diese Anzahl ist notwendig und hinreichend. Ist man nun im stande, die Spannkräfte in dem Fachwerk von k Knotenpunkten zu ermitteln, so kann man auch die Spannkräfte in dem neuen Fachwerke von $k+1$ Knotenpunkten finden. Man hat nur nötig, dem Stabe CD die Rolle eines Z-Stabes und dem Stabe AB die Rolle eines Y-Stabes zuzuweisen und die Spannkraft Y als lineare Funktion der in D angreifenden äußeren Kraft P_D und der Spannkraft Z darzustellen. Indem man dann die Spannkraft Y gleich Null setzt, erhält man zur Berechnung von Z die Gleichung

$$(11) \quad 0 = Y_0 + Y'Z.$$

Hat man aber Z gefunden, so kann man die Spannkräfte in den Stäben DA und DB ermitteln und kennt nunmehr alle am Fachwerk von k Knotenpunkten angreifenden Kräfte. Ist $Y'=0$, so ist das Fachwerk unbrauchbar; es kann von unendlich kleiner oder endlicher Beweglichkeit sein.

Ein Beispiel für den Fall unendlich kleiner Beweglichkeit ist das bereits in No. 205 behandelte Pascalsche Sechseck (Fig. 443); hier tritt das Gleichgewicht erst nach einer unendlich kleinen Bewegung ein und erfordert bei vollkommen starren Stäben unendlich große Spannkräfte. Ein Beispiel für endliche Beweglichkeit zeigt Fig. 444; hier liegen zwei durch gleichlange parallele Stäbe verbundene Dreiecke vor. Gleichgewicht ist bei diesem Fachwerk überhaupt nur dann möglich, wenn auch $Y_0=0$ ist; dann aber ist der Gleichgewichtszustand kein bestimmter. Der Nachweis, daß in beiden Fällen $Y'=0$ ist, ist leicht zu führen.

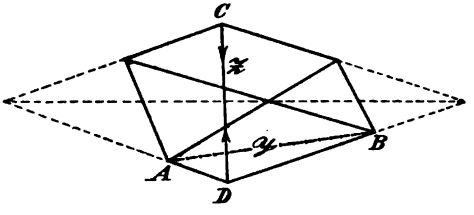


Fig. 443.

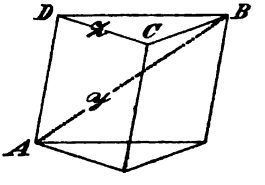


Fig. 444.

Da nun ein statisch bestimmtes Fachwerk von k Knotenpunkten und $2k-3$ Stäben mindestens einen Knotenpunkt besitzt, in welchem

Digitized by Google

höchstens drei Stäbe zusammenkommen (denn liefen in allen Knotenpunkten mindestens vier Stäbe zusammen, so müßten wenigstens $\frac{4k}{2} = 2k$ Stäbe vorhanden sein), so setzt uns das Hennebergsche Bildungsgesetz in Verbindung mit dem auf Seite 441 unter (1) beschriebenen einfachsten Bildungsgesetze in den Stand, jedes Fachwerk von k Knotenpunkten aus dem einfachsten statisch bestimmten Fachwerke, dem Dreieck, durch schrittweise Angliederung neuer Knotenpunkte herzuleiten. Indem man diesen Aufbau verfolgt, findet man stets einen rechnerischen oder zeichnerischen Weg zur Ermittelung der Spannkräfte; derselbe kann allerdings, wenn mehrere Knotenpunkte durch drei Stäbe angeschlossen werden müssen, recht langwierig und deshalb für die Praxis unbrauchbar werden; denn die Schwäche des ganzen Verfahrens liegt darin, daß immer erst die Berechnung des Fachwerks von $k-1$ Knotenpunkten erledigt werden muß, bevor die Gleichung 11 aufgestellt werden kann. Den Unterschied zwischen der Methode von Henneberg und dem in No. 206 mitgeteilten ganz allgemeinen Verfahren der Stabvertauschung wird man sofort deutlich erkennen, wenn man versucht, die vorhin gelösten Aufgaben nach der Vorschrift von Henneberg zu behandeln.

§ 52.

Die kinematische Theorie des Fachwerks.

Zu weiteren Eigenschaften statisch bestimmter Fachwerke werden uns einige einfache Sätze der Bewegungslehre führen, die wir zunächst ableiten wollen.

208. Der Satz vom augenblicklichen Drehpunkte. Eine irgendwie begrenzte ebene Scheibe ABC bewege sich in ihrer Ebene aus einer Lage $A_1B_1C_1$ in die Lage $A_2B_2C_2$, Fig. 445. Werden in den Mittelpunkten der Verbindungsgeraden A_1A_2 und B_1B_2 gleichliegender Punkte Lote errichtet und wird deren Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ bestimmt, so sind die Dreiecke $A_1\mathfrak{P}B_1$ und $A_2\mathfrak{P}B_2$ gleichartig kongruent, und es kann deshalb die Scheibe aus der Lage $A_1B_1C_1$ durch eine Drehung um den Punkt $\mathfrak{P}$ in die Lage $A_2B_2C_2$ gebracht werden. Ist die Zeitdauer der Bewegung unendlich klein, so dürfen bei endlichen Geschwindigkeiten die Geraden A_1A_2 und B_1B_2 als die augenblicklichen Bewegungsrichtungen der Punkte A_1 und B_1 betrachtet werden, und hieraus folgt, *daß sich die Bewegung der Scheibe in jedem Augenblicke auf eine Drehbewegung um einen festen Punkt $\mathfrak{P}$ zurückführen läßt.*

Digitized by Google

Man nennt diesen Punkt den *augenblicklichen Drehpunkt* oder auch den *augenblicklichen Pol;* seine Lage ist bestimmt, sobald die augenblicklichen Bewegungsrichtungen von irgend zwei Punkten der Scheibe gegeben sind. Man errichtet in jenen Punkten auf deren Bewegungsrichtungen Lote und findet den Pol als den Durchschnittspunkt dieser Lote. Fig. 446.

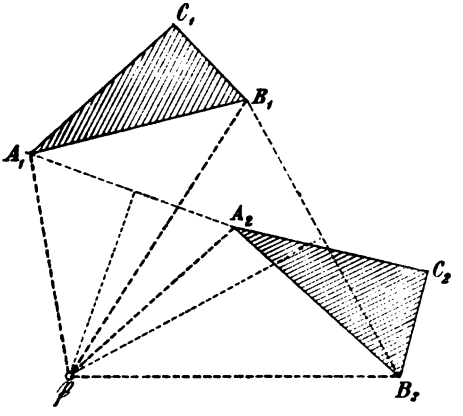


Fig. 445.

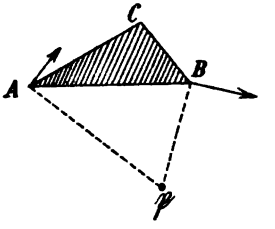


Fig. 446.

Werden z. B. zwei Scheiben *I* und *II* durch zwei Stäbe *AC* und *BD* miteinander verbunden, Fig. 447, und wird *II* festgehalten, so kann sich der Punkt *A* nur auf einem Kreisbogen bewegen, der mit der Stablänge *AC* um *C* beschrieben wird. Die Geschwindigkeit v_A des Punktes *A* ist also rechtwinklig zu *AC*. Ganz ebenso findet man, daß die Geschwindigkeit v_B des Punktes *B* rechtwinklig zu *BD* ist. Im Schnittpunkte *G* der beiden Stabachsen liegt mithin der augenblickliche Drehpunkt der Scheibe *I*. In diesem Punkte sind die Scheiben gewissermaßen durch ein Gelenk miteinander befestigt, und man darf deshalb, so lange es sich nur um unendlich kleine Bewegungen handelt, den Punkt *G* als den gemeinschaftlichen Punkt der beiden Scheiben ansehen. Wir werden *G* auch den Pol von *I* gegen *II* oder, was dasselbe ist, von *II* gegen *I* nennen und mit (*I II*) bezeichnen.

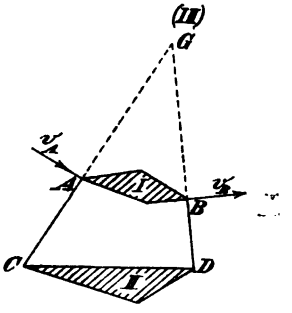


Fig. 447.

Digitized by Google

209. Darstellung der Geschwindigkeiten. Bedeutet ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung um $\mathfrak{P}$, so ist die Geschwindigkeit irgend eines Punktes A der Scheibe $v_A = \omega \overline{\mathfrak{P}A}$. Das gegenseitige Verhältnis der Geschwindigkeiten verschiedener Punkte A, B, C (Fig. 448) ist durch die Gleichung bestimmt

$$(1) \quad v_A : v_B : v_C = \overline{\mathfrak{P}A} : \overline{\mathfrak{P}B} : \overline{\mathfrak{P}C}.$$

Denkt man sämtliche Geschwindigkeiten in gleichem Sinne um einen rechten Winkel gedreht, so daß also

$$AA' = v_A; \quad BB' = v_B; \quad CC' = v_C$$

ist, so folgt unmittelbar aus der Gleichung (1), daß

$$A'B' \parallel AB \text{ ist, } B'C' \parallel BC \text{ und } C'A' \parallel CA.$$

Die Strecken AA', BB', CC' nennt man die *lotrechten Geschwindigkeiten der Punkte A, B, C* und erhält den Satz:

Die Endpunkte $A'B'C'$ . . . . der lotrechten Geschwindigkeiten der Punkte ABC . . . . bilden eine Figur, welche ähnlich und ähnlich liegend zu der sich bewegenden Figur ABC . . . . ist. Der Pol $\mathfrak{P}$ ist der Ähnlichkeitspunkt beider Figuren.

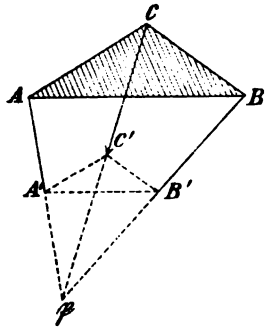


Fig. 448.

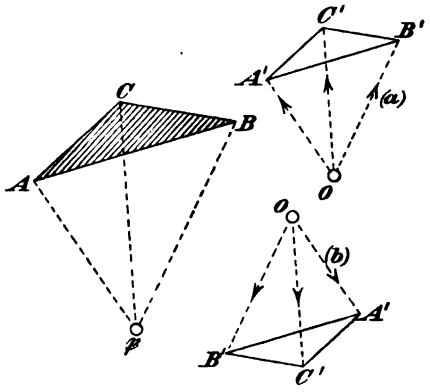


Fig. 449.

Die Figuren ABC . . . und $A'B'C'$ . . . werden wir kurz mit $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ bezeichnen und $\mathfrak{F}'$ den Geschwindigkeitsplan von $\mathfrak{F}$ nennen. Zuweilen wird es sich auch als nützlich erweisen, die lotrechten Geschwindigkeiten zu einem Strahlenbüschel zu vereinigen. Die Figuren 449 (a) und (b) veranschaulichen diese Darstellungsweise; die von irgend einem Nullpunkte O aus aufgetragenen Strecken OA', OB', OC' geben nach Größe und Richtung die um 90° gedrehten Geschwindig-

Digitized by Google

keiten v_A, v_B, v_C der Punkte A, B, C an. Die Figuren $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}$ sind wieder ähnlich, sie brauchen aber nicht mehr ähnlich zu liegen.

210. Geometrisches Kennzeichen eines beweglichen Fachwerks. Wir betrachten jetzt eine ebene Stabverbindung $\mathfrak{F}$ mit den Knotenpunkten 1, 2, 3, ... k und denken uns irgend eine Figur $\mathfrak{F}'$ gezeichnet, bestehend aus geraden Linien, durch welche die den Fachwerkknoten entsprechenden Punkte $1'$, $2'$, $3'$ ..... k' miteinander verbunden werden, so zwar, daß jedem Stabe ik eine zu ik parallele Gerade $i'k'$ entspricht. Werden dann die Strecken ii' und kk' als die augenblicklichen lotrechten Geschwindigkeiten der Knotenpunkte i und k aufgefaßt, so ist der Schnittpunkt $\mathfrak{P}_{ik}$ der Geraden ii' und kk' der augenblickliche Pol des Stabes ik. Gelingt es nun, zu der Fachwerkfigur $\mathfrak{F}$ eine Figur $\mathfrak{F}'$ zu zeichnen, welche der Figur $\mathfrak{F}$ nicht ähnlich ist (wie bei dem unversteiften Viereck 1 2 3 4 in Fig. 450),

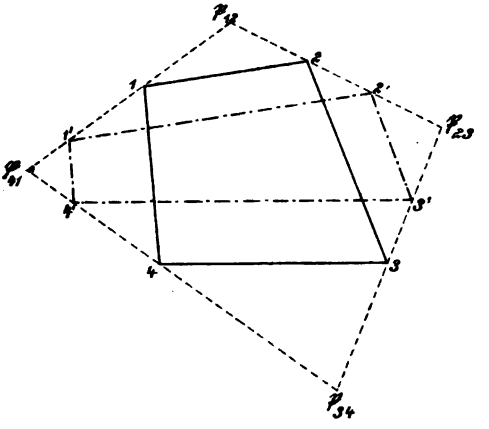


Fig. 450.

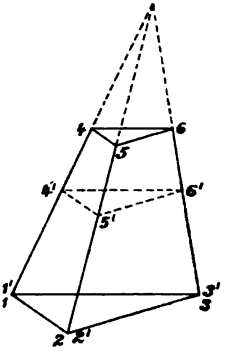


Fig. 451.

so ergeben sich verschiedene augenblickliche Drehpunkte, und hieraus folgt die Möglichkeit, die gegenseitige Lage der Stäbe durch unendlich kleine Drehungen der Stäbe um jene verschiedenen Pole zu ändern. Es folgt hieraus der Satz:

> *Ist es möglich, zu der Fachwerkfigur $\mathfrak{F}$ eine Figur $\mathfrak{F}'$ zu zeichnen, welche der Figur $\mathfrak{F}$ nicht ähnlich ist, so ist das Fachwerk kein starres.*

In diesem Satze besitzen wir ein in der Regel sehr leicht zu handhabendes Hilfsmittel, diejenigen Fachwerke zu erkennen, welche mindestens von unendlich kleiner Beweglichkeit sind, trotzdem sie die notwendige Stabzahl oder sogar noch mehr Stäbe, als erforderlich sind,

Digitized by Google

besitzen. Zur Erläuterung des Verfahrens mögen folgende Beispiele dienen.

1) Ein Blick auf Fig. 451 lehrt, daß zwei miteinander durch drei Stäbe verbundene starre Scheiben ein bewegliches Fachwerk bilden, sobald sich die drei Verbindungsstäbe in einem Punkte treffen.

2) Um die Beweglichkeit des in Fig. 452 dargestellten Fachwerks zu beweisen, genügt es, zu dem Sechsecke 1 2 3 4 5 6, an welches sich die übrigen Knotenpunkte durch je zwei Stäbe angliedern lassen, eine unähnliche Figur $1'2'3'4'5'6'$ zu zeichnen, deren Punkte $1'$, $3'$, $4'$, $6'$ wir mit den entsprechenden Fachwerksknoten zusammenfallen ließen.

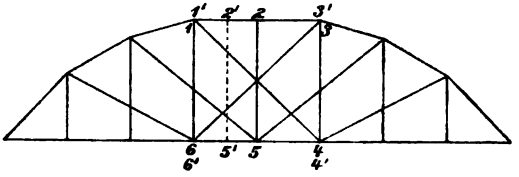


Fig. 452.

3) Das sechsteilige Netzwerk in Fig. 453 ist bereits in No. 206 analytisch untersucht und als beweglich erkannt worden, weil die Anzahl der ganzen Felder 8 ist, und weil $8-2$ den Teiler 3 besitzt (Seite 448). Man erkennt, daß sich die mit kleinen Kreisen bezeichneten Punkte, welche einem geschlossenen, keinen Teil des versteiften Vierecks $ABCD$ enthaltenden Strebenzuge 1 2 3 4 5 6 7 8 1 angehören, bewegen lassen, während alle übrigen Punkte festliegen.

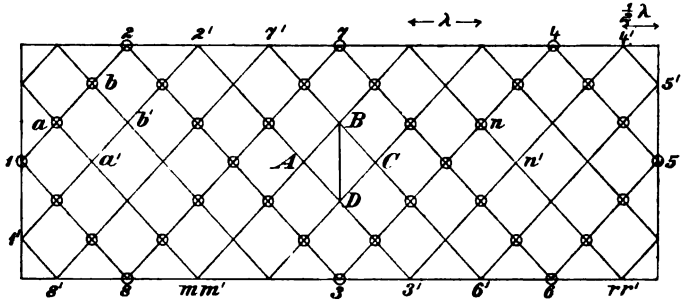


Fig. 453.

In Fig. 453 ist ein System möglicher Geschwindigkeiten $11'$, $22'$ ... der auf dem Rande liegenden Punkte 1, 2, ... angegeben worden; außerdem sind noch die Geschwindigkeiten von drei Zwischenpunkten

Digitized by Google

a, b, n eingetragen worden. Der Geschwindigkeitsplan läßt sich danach leicht vervollständigen.

4) Das unsymmetrische sechsteilige Netzwerk in Fig. 454 ist ebenfalls schon in No. 206 untersucht und als beweglich erkannt worden. Der nur für die rechte Trägerhälfte durch Ziffern beschriebene Geschwindigkeitsplan dürfte einer besonderen Erläuterung nicht bedürfen.

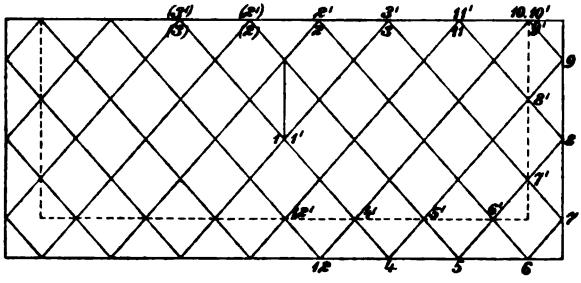


Fig. 454.

5) Soll das Sechseck in Fig. 455 untersucht werden, so zeichnet man zu dem Viereck 1 2 3 4 die unähnliche Figur 1′2′3′4′, bestimmt 5′ mittels 2′5′ ∥ 2 5 und 4′5′ ∥ 4 5, schließlich 6′ mittels 3′6′ ∥ 3 6 und 1′6′ ∥ 1 6. Ist dann 5′6′ ∥ 5 6, so ist das Sechseck beweglich. Daß

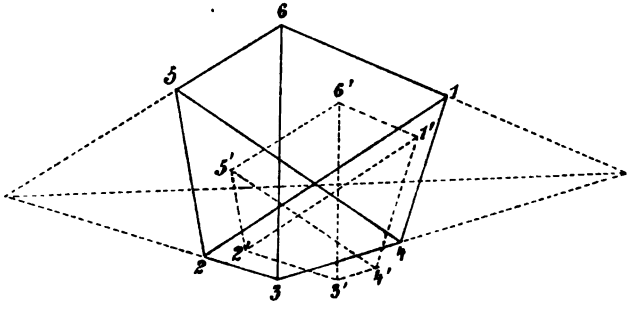


Fig. 455.

dies nur dann der Fall ist, wenn das Sechseck ein *Pascal*sches ist, wurde auf Seite 443 gezeigt, ließe sich aber auch leicht geometrisch nachweisen.

Digitized by Google

6) Figur 426 zeigt ein Fachwerk mit drei festen Auflagergelenken 1, 2, 8 und genügend viel Stäben. Man weise dem Knotenpunkte 3 des Gelenkvierecks 1 2 3 4 den in der Geraden 1 3 liegenden Punkt 3′ zu und bestimme nun schrittweise die Punkte 4′5′6′ und 7′. Fällt 7′ in die Gerade 7 8, so ist das Fachwerk beweglich.

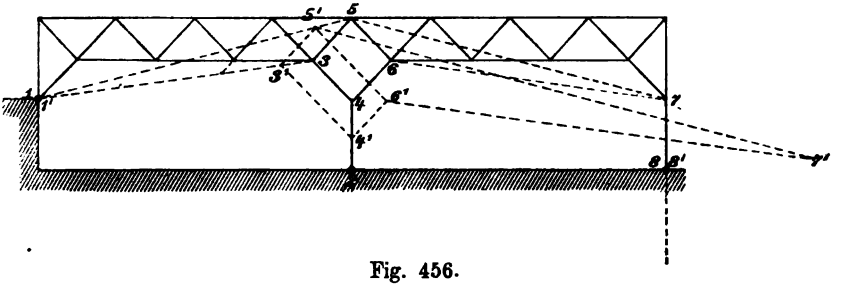


Fig. 456.

211. Die zwangläufige kinematische Kette. An das letzte Beispiel wollen wir noch eine Betrachtung knüpfen, die uns zu weiteren Anwendungen hinüberleiten wird. Beseitigen wir den Stab 7 8 (Fig. 456), so wird das Fachwerk auf jeden Fall beweglich; es besitzt aber nur *eine* Bewegungsfreiheit, weil durch Wegnahme des einen Stabes nur *eine* Starrheitsbedingung fortgefallen ist. Alle Punkte des Fachwerks sind gezwungen, sich nach *bestimmten Richtungen* zu bewegen, und nur über die *Größe* der Geschwindigkeit *eines einzigen Punktes* darf frei verfügt werden. Ändert sich diese *freie Geschwindigkeit,* so beschreiben die Endpunkte der lotrechten Geschwindigkeiten gerade ähnliche Punktreihen; das gegenseitige Verhältnis der Geschwindigkeiten bleibt also ungeändert. Wird die freie Geschwindigkeit gleich Null gesetzt, so werden auch die Geschwindigkeiten aller übrigen Punkte gleich Null.

Wir nennen nun ein bewegliches Gebilde, dessen Glieder derart miteinander *verkettet* sind, daß sie nach Feststellung *eines* Gliedes (des *Gestells* oder *Widerlagers*) *gezwungen* sind, bestimmte Bewegungen zu vollziehen, (nach *Reuleaux*) eine *zwangläufige kinematische Kette* oder auch kurz eine zwangläufige Kette und sagen: *der Punkt 7 in Fig. 456 wird mittels einer zwangläufigen Kette geführt.* Zwingen wir nun diesen Punkt, sich auf einer zweiten, die erste Bahn kreuzenden Bahn zu bewegen, indem wir ihn durch einen Stab mit einem festen Punkte verbinden, oder, allgemeiner, indem wir ihn mit Hilfe einer zweiten zwangläufigen Kette führen, so halten wir ihn offenbar in der Ebene fest und rauben damit zugleich allen Gliedern der beiden Ketten die Fähigkeit, sich zu bewegen. Aus den beiden zwangläufigen Ketten wird ein starres Fachwerk.

Digitized by Google

Besitzen jedoch die beiden Bahnen eine gemeinsame Tangente, so bleibt innerhalb eines beiden Bahnen gemeinsamen Bogenelements eine unendlich kleine Beweglichkeit bestehen. Haben die beiden Bahnen ein endliches Stück gemein, so ist die Beweglichkeit sogar eine endliche. Ob unendlich kleine oder endliche Beweglichkeit vorliegt, darüber gibt die Figur $\mathfrak{F}'$ natürlich keinen Aufschluß, da sie nur einen augenblicklichen Bewegungszustand beschreibt und nur die Bahntangenten liefert. Für unsere Zwecke genügt aber diese Beschreibung vollständig, weil wir das Fachwerk bereits für unbrauchbar erklären, wenn unendlich kleine Bewegungen möglich sind. Wir

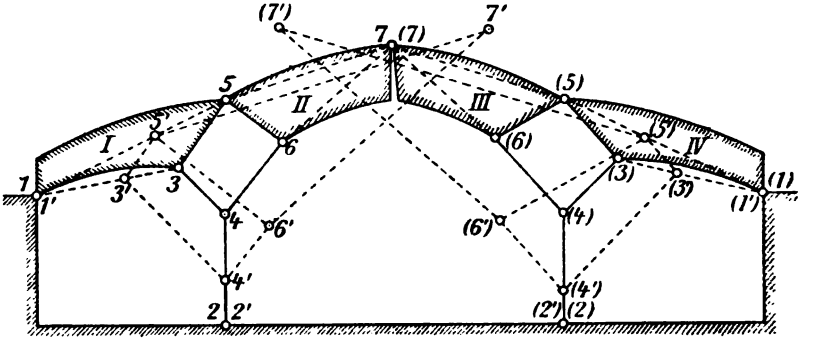


Fig. 457.

empfehlen sogar, noch einen Schritt weiter zu gehen und dafür zu sorgen, daß sich die beiden Bahnen nicht unter zu spitzen Winkeln schneiden, damit die von der Elastizität der Stäbe und Widerlager herrührenden Verschiebungen der Knotenpunkte (deren Ermittelung zu den Aufgaben des zweiten Bandes dieses Buches gehört) nicht zu groß ausfallen.

Ein übersichtliches Beispiel zu den vorstehenden Ausführungen ist der in Fig. 457 dargestellte, über drei Öffnungen gespannte, aus vier starren Scheiben und sechs Stäben bestehende Bogenträger, dessen Scheitelgelenk durch zwei zwangläufige Ketten geführt wird, deren Gliederung mit der Gliederung der in Fig. 456 zur Führung des Punktes 7 benutzten Kette übereinstimmt. Fallen die Geraden 7 7′ und (7) (7′) zusammen, so ist das Fachwerk kein starres.

Ein anderes Verfahren, eine zwangläufige Kette in ein starres Gebilde zu verwandeln, besteht darin, zwei Punkte i und k durch einen Stab oder eine starre Scheibe miteinander zu verbinden. Allerdings darf die durch die Punkte i' und k' des Geschwindigkeitsplanes der Kette bestimmte Gerade $i'k'$ nicht parallel zu ik sein; sonst bleibt auch nach Einfügung der starren Verbindung ik mindestens eine unendlich kleine Beweglichkeit bestehen. In Fig. 458 mögen die Strecken i (i) und k (k) nach Größe und Richtung die wirklichen Geschwindigkeiten

Digitized by Google

der Punkte i und k darstellen; die Punkte i und k nähern sich dann einander mit der Geschwindigkeit $c = v_{ik} + v_{ki}$, wo v_{ik} und v_{ki} die Längen der von i' und k' auf ik gefällten Lote bedeuten. Die Einfügung einer starren Verbindung bewirkt nun, daß $c = 0$ wird. Dies erfordert aber entweder $v_{ki} = -v_{ik}$, woraus dann $i'k' \parallel ik$ folgt, oder es bedingt: $v_{ki} = 0$ und $v_{ik} = 0$; dann werden aber die Geschwindigkeiten aller Punkte der Kette gleich Null.

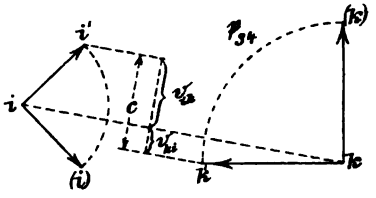


Fig. 458.

Die auf die beschriebene Weise aus zwangläufigen Ketten gewonnenen Fachwerke besitzen keinen überzähligen Stab, weil die eine Bewegungsfreiheit der Kette durch eine einzige Starrheitsbedingung vernichtet wurde. Dabei muß allerdings vorausgesetzt werden, daß die aus starren Scheiben bestehenden Glieder nicht mehr Stäbe enthalten, als erforderlich sind.

Die Herleitung starrer Fachwerke aus zwangläufigen Ketten gibt meistens einen besonders klaren Einblick in das Wesen der bei gewissen ausgezeichneten Lagen ihrer Glieder auftretenden Ausnahmefälle, und schon aus diesem Grunde halten wir es für nützlich, uns etwas eingehender mit den zwangläufigen Ketten zu beschäftigen.

212. Bildungsgesetze und Geschwindigkeitspläne zwangläufiger Ketten. 1) Das einfachste, schon in den beiden vorhin behandelten Beispielen (Fig. 456 und Fig. 457) benutzte Bildungsgesetz besteht darin, an zwei Knotenpunkte A und B einer zwangläufigen Kette, die kurz mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet werden möge, einen neuen Knoten C durch zwei starre Scheiben AC und BC anzuschließen. Aus den lotrechten Geschwindigkeiten AA' und BB' der Punkte A und B findet man diejenige von C, indem man $A'C' \parallel AC$ und $B'C' \parallel BC$ zieht, Fig. 459. Durch die Punkte A' und C' ist die Bewegung der Scheibe AC vollständig bestimmt, ebenso durch B' und C' die Bewegung der Scheibe BC. Den zum Punkte D der Scheibe AC gehörigen Punkt D' findet man z. B. durch Ziehen der Geraden $A'D' \parallel AD$ und $C'D' \parallel CD$.

Dieses einfachste Bildungsgesetz setzt uns in den Stand, von einem Gelenkviereck ausgehend, leicht zu überschauende Ketten zu bilden; es birgt zwei Ausnahmefälle.

Liegt nämlich C in der Geraden AB und ist die Gerade $A'B'$ parallel zu AB, so darf man den Punkt C' nach Belieben in der Geraden $A'B'$ wählen. Die neue Kette ist also nicht zwangläufig, sondern besitzt zwei Bewegungsfreiheiten.

Digitized by Google

Fällt dagegen C in die Gerade AB und liegen A' und B' nicht in einer Parallelen zu AB, so führt unsere Konstruktion des Punktes C' zu einer unendlich großen Geschwindigkeit $\overline{CC'}$. Damit nun diese Strecke endlich werde, müssen die Geschwindigkeiten der Punkte A und B gleich Null sein; es muß also die freie Geschwindigkeit der Kette $\mathfrak{K}$ den Wert Null annehmen. Dann ruht die Kette $\mathfrak{K}$, und die Bewegung des Punktes C ist zwangläufig.

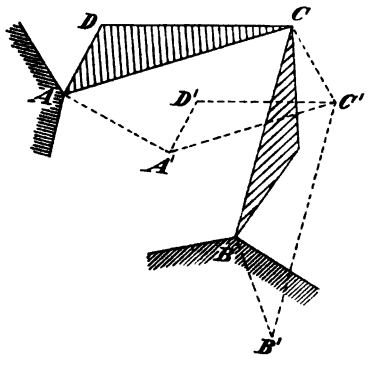


Fig. 459.

Dieses Ergebnis darf uns nicht überraschen. Würden wir nämlich die Knotenpunkte A und B der Kette $\mathfrak{K}$ durch einen Stab verbinden, so würden wir ein starres Fachwerk erhalten; Kräfte, die an den Gliedern desselben angreifen, sind nicht im stande, eine Bewegung hervorzubringen. Dieser Gleichgewichtszustand bleibt aber auch dann bestehen, wenn wir den Stab AB durch ein in die Gerade AB fallendes Gelenk in zwei gegeneinander drehbare Teile zerlegen, wenn wir nur dafür sorgen, daß an den Teilen AC und CB keine äußeren Kräfte angreifen. Ruft die Belastung der übrigen Glieder der Kette $\mathfrak{K}$ in AB einen Zug hervor, so besteht sogar sicheres Gleichgewicht; wird Stab AB gedrückt, so ist das Gleichgewicht zwar unsicher, es bleibt aber ungestört, so lange die drei Punkte A, C und B in einer Geraden liegen; und nur dieser augenblickliche Zustand steht hier zur Beurteilung. Dagegen kann man C in Bewegung setzen, indem man das Glied AC oder das Glied BC oder irgend eines der mit C durch weitere Angliederung zwangläufig in Verbindung gebrachten Teile der aus $\mathfrak{K}$ abgeleiteten neuen Kette $\mathfrak{K}'$ durch eine äußere Kraft antreibt. Sämtliche Glieder der Kette $\mathfrak{K}$ bleiben hierbei in Ruhe, A' fällt mit A zusammen, B' mit B; C' wird in der Geraden AB angenommen.

Von einer Kette, die sich den Belastungen gewisser Glieder gegenüber wie ein starres Gebilde verhält, sagt man, sie befindet sich gegenüber den an jenen Gliedern angreifenden Kräften in einer *Todlage*. Sie verliert diese Eigenschaft im allgemeinen, sobald das festgestellte Glied freigegeben und dafür ein anderes Glied zum Widerlager gemacht wird.

So befindet sich ein Gelenkviereck 1 2 3 4, dessen Knotenpunkte 1 2 3 in einer Geraden liegen, in einer Todlage, sobald das Glied 1 4

Digitized by Google

festliegt und die antreibende Kraft am Gliede 3 4 angreift. Wird aber eines der beiden Glieder 1 2 oder 2 3 zum Gestell gemacht, so kann die Kette mit Hilfe eines jeden der drei übrigen Glieder bewegt werden. Liegen alle vier Punkte in einer Geraden, so besitzt die Kette zwei Bewegungsfreiheiten. Man kann, wenn man das Glied 1 4 festhält, den Punkten 2 und 3 beliebig große, voneinander unabhängige endliche Geschwindigkeiten erteilen.

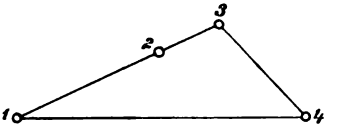


Fig. 460.

2) Zu einer wesentlichen Erweiterung des ersten Bildungsgesetzes gelangt man, wenn man jedes der drei Gelenke A, B und C auf die in Fig. 461 veranschaulichte Weise durch zwei Stäbe (an deren Stelle auch zwei Scheiben treten dürfen) ersetzt. Die Knotenpunkte 1, 2, 5, 6 mögen einer zwangläufigen Kette $\mathfrak{K}$ angehören, ihre lotrechten Geschwindigkeiten 1 1′, 2 2′, 5 5′, 6 6′ seien bekannt.

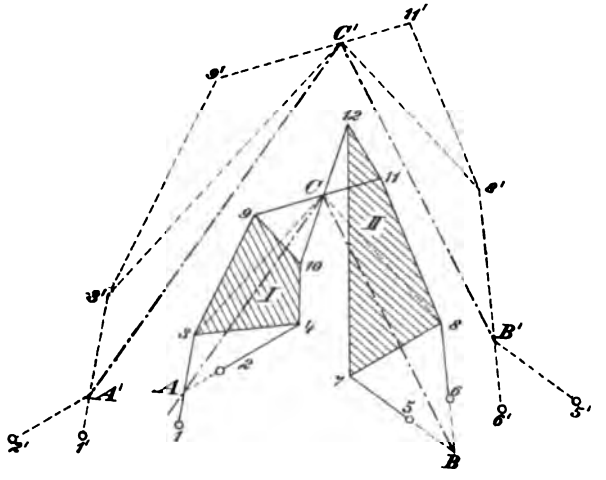


Fig. 461.

Die Schnittpunkte A, B, C der drei Stäbepaare

$$1—3,\ 2—4\ |\ 5—7,\ 6—8\ |\ 9—11,\ 10—12$$

spielen dieselbe Rolle wie vorhin die Gelenke A, B, C. Man bestimmt also

A' mit Hilfe von $1'A' \parallel 1A$ und $2'A \parallel 2A$,
B' „ „ „ $5'B' \parallel 5B$ „ $6'B' \parallel 6B$,
C' „ „ „ $A'C' \parallel AC$ „ $B'C' \parallel BC$,

Digitized by Google

betrachtet nun C als gemeinschaftlichen Punkt der beiden Scheiben I und II und findet dann

$$\begin{array}{llllll} 3' & \text{mit Hilfe von} & 1'3' & \| \, 1\,3 & \text{und} & C'3' \; \| \; C3, \\ 9' & \text{„ „ „} & 3'9' & \| \, 3\,9 & \text{„} & C'9' \; \| \; C9, \\ 8' & \text{„ „ „} & 8'C' & \| \, 8\,C & \text{„} & 6'8' \; \| \; 6\,8, \\ 11' & \text{„ „ „} & 8'11' & \| \, 8\,11 & \text{„} & C'11' \; \| \; C11. \end{array}$$

Jetzt sind für jede Scheibe die Geschwindigkeiten zweier Punkte gegeben, und damit sind die Bewegungszustände der beiden Scheiben vollständig bestimmt. Man kann auch nach Aufsuchung der Punkte $A'B'C'$ die Geschwindigkeiten der anderen Punkte in einer anderen Reihenfolge ermitteln, z. B. erst $4'$ mit Hilfe von $2'4' \| 2\,4$ und $C'4' \| C4$, sodann $7'$ und $12'$ und gewinnt so verschiedene Proben für die Schärfe der Zeichnung.

Ein anderes Verfahren, welches voraussetzt, daß sich die Punkte ABC in unbequemer Lage befinden und deshalb nicht benutzt werden können, ist das folgende.

Man ziehe durch $1'$ eine Parallele zu $1\,3$, weise in dieser dem vorläufig unbekannten Punkte $3'$ probeweise verschiedene Lagen zu, z. B. die Lagen $3_1'$ und $3_2'$ und bestimme die zugehörigen Lagen des Punktes $4'$ mit Hilfe von $3'4' \| 3\,4$ und $2'4' \| 2\,4$, sodann die zugehörigen Lagen

$$\begin{array}{llllll} \text{von } 9' & \text{mit Hilfe von} & 3'\;\;9' & \| \, 3\;\;9 & \text{und} & 4'\;\;9' \; \| \; 4\;\;9 \\ \text{„ } 10' & \text{„ „ „} & 9'\,10' & \| \, 9\;10 & \text{„} & 4'\,10' \; \| \; 4\;10. \end{array}$$

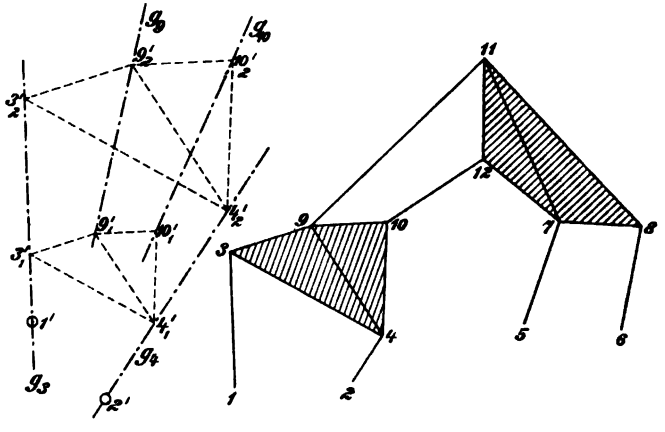


Fig. 462.

Da sich nun die Punkte $3'$ und $4'$ in Geraden g_3 und g_4 bewegen, so müssen auch die Punkte $9'$ und $10'$ gerade Linien g_9 und g_{10} be-

Digitized by Google

schreiben.*) In derselben Weise lassen sich auch die Geraden g_{11} und g_{12} finden, in denen die Punkte 11′ und 12′ liegen müssen, und es bleibt jetzt nur noch die auf Seite 230 erledigte Aufgabe zu lösen, ein Viereck zu zeichnen, dessen Ecken in gegebenen Geraden liegen und dessen Seiten gegebene Richtungen haben.

Besonders wichtig ist der in Fig. 463 dargestellte Sonderfall einer Scheibe, die mit den Punkten 1 2 und B einer zwangläufigen Kette $\mathfrak{K}$ durch drei Stäbe 1 3, 2 4 und BC verbunden ist. Wir haben schon durch die ganze Bezeichnung hervorgehoben, daß zwei der vorhin angenommenen Stäbepaare zu Gelenken B und C zusammengeschrumpft sind.

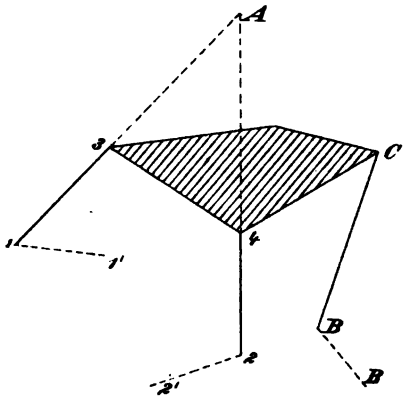


Fig 463.

3) Verbindet man einen Stab 3 4 (Fig. 464) durch zwei Stäbe 1 3 und 2 4 mit Punkten 1 und 2 einer zwangläufigen Kette $\mathfrak{K}$, so erhält man ein bewegliches Gebilde, das zwei Bewegungsfreiheiten besitzt, da man den Punkten 3 und 4 Geschwindigkeiten erteilen kann, die unabhängig von dem durch die Angabe einer Geschwindigkeit vollständig beschriebenen Bewegungszustande der Kette $\mathfrak{K}$ sind. Bedingung ist nur, daß 3′ in der durch 1′ parallel zu 1 3 gezogenen Geraden g_3 liegen muß und 4′ in der durch 2′ parallel zu 2 4 gezogenen Geraden g_4. Nimmt man 3′ willkürlich an, so ist 4′ bestimmt durch $3'4' \parallel 34$. Schließt man nun einen neuen Knoten 5 durch zwei Stäbe an den Punkt 3 und einen der Kette $\mathfrak{K}$ angehörigen Punkt 6 an, sodann 7 an 4 und 5 und fährt in dieser Weise fort, so kann man die zum Geschwindigkeitspunkte 3′ gehörigen Geschwindigkeitspunkte 5′, 7′, ... mittels Ziehen von Parallelen festlegen. Weist man 3′ die beiden Lagen $3_1'$ und $3_2'$ zu, so erhält man für jeden auf die beschriebene Weise angeschlossenen Knotenpunkt n zwei Punkte n_1' und n_2', und diese bestimmen eine Gerade g_n, in der sich n' bewegt, sobald 3′ die Gerade g_3 beschreibt.

Die Lage der Geraden g_n hängt von der Größe der freien Geschwindigkeit der Kette $\mathfrak{K}$ ab. Da aber g_3, g_4, g_6 eine feste

*) Die zu den Punkten einer starren Scheibe gehörigen Geraden g schneiden sich in einem Punkte.

Digitized by Google

Richtung besitzen, weil sie der Reihe nach parallel zu den Stabachsen 1 3, 2 4 und 6 5 sind, *so behalten auch alle übrigen Geraden g_n ihre Richtungen unverändert bei, wenn sich die Größe der Geschwindigkeiten der Punkte 1, 2, 6 ändert.* Ruht die Kette $\mathfrak{K}$, so fällt $1'$ mit 1 zusammen, $2'$ mit 2, $6'$ mit 6; es geht dann g_3 durch 3, g_4 durch 4 und allgemein g_n durch n.

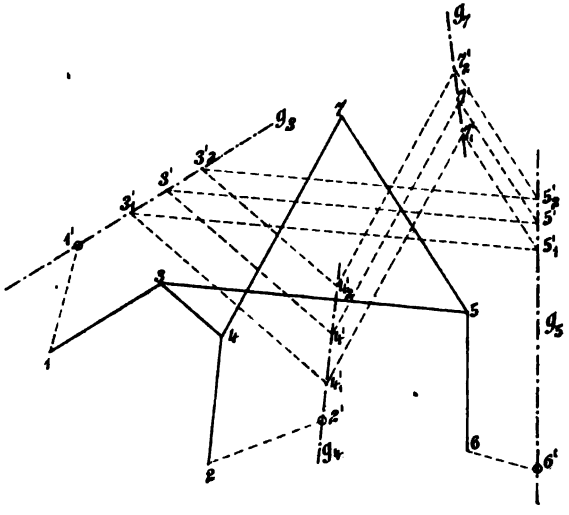


Fig. 464.

Soll nun die neue Kette zwangläufig werden, so muß die zweite Bewegungsfreiheit verschwinden. Dies kann man dadurch erreichen, daß man irgend einen der an $\mathfrak{K}$ angeschlossenen Knotenpunkte n durch eine andere zwangläufige Kette führt, beispielsweise durch einen Stab nf, welcher n mit einem Punkte f des Widerlagers verbindet. Der Punkt n' muß dann in der Geraden nf liegen; er fällt also in den Schnittpunkt der Geraden g_n und nf. Durch diese Angabe sind aber die Geschwindigkeiten sämtlicher Punkte der an die Kette $\mathfrak{K}$ und den Punkt f angeschlossenen Glieder eindeutig bestimmt.

Wir wollen die auf diesem Wege schließlich erhaltene Kette mit $\mathfrak{K}'$ bezeichnen, und die an die Kette $\mathfrak{K}$ und den Punkt f angeschlossenen Glieder unter der kurzen Bezeichnung $\mathfrak{K}' - \mathfrak{K}$ zusammenfassen.

Es sind zwei Ausnahmefälle zu beachten. Geht nämlich die Gerade g_n durch die beiden Punkte n und f, so darf n' nach Belieben in der Geraden nf angenommen werden; die Kette $\mathfrak{K}'$ ist also nicht zwangläufig, sondern behält zwei Bewegungsfreiheiten. Ist zweitens fn parallel zu der nicht durch n gehenden Geraden g_n, so rückt n' zu-

Digitized by Google

nächst ins Unendliche. Es müssen dann die Geschwindigkeiten der Punkte 1, 2, 6 gleich Null gesetzt werden. Die Kette $\mathfrak{K}$ ruht nunmehr, die Gerade g_n fällt mit der Achse des Stabes fn zusammen und es ist möglich, dem Punkte n und allen Gliedern der Gruppe $\mathfrak{K}' - \mathfrak{K}$ eine beliebige Geschwindigkeit nn' zu erteilen. Die Kette $\mathfrak{K}'$ ist also zwangläufig, sie befindet sich aber gegenüber allen an Gliedern der Kette $\mathfrak{K}$ angreifenden Kräften in einer Todlage und kann nur durch Antreiben von Gliedern der Gruppe $\mathfrak{K}' - \mathfrak{K}$ bewegt werden. Die Glieder der Kette $\mathfrak{K}$ bleiben bei jeder auf diese Weise eingeleiteten Bewegung in Ruhe.

Wir dürfen natürlich nicht vergessen, daß wir uns auf die Beschreibung einer unendlich kleinen Bewegung beschränkt haben, und daß die Kette durch die geringsten elastischen Formänderungen aus der durch $fn \parallel g_n$ gekennzeichneten besonderen Lage gebracht werden kann. Es gibt aber auch Fälle, in denen bei Belastung der Kette $\mathfrak{K}$ *sicheres* Gleichgewicht vorhanden ist.

Ein anderes Verfahren, die zweite Bewegungsfreiheit aufzuheben, besteht darin, zwei Knotenpunkte m und n, von denen aber wenigstens einer ein Knotenpunkt der an $\mathfrak{K}$ angeschlossenen Gliedergruppe sein möge, durch einen Stab zu verbinden. Gehört nun m der Kette $\mathfrak{K}$ an, so ist n' ohne weiteres als Schnittpunkt der Geraden g_n und der durch m' parallel zu mn gezogenen Geraden g bestimmt, vorausgesetzt, daß g und g_n nicht zusammenfallen oder nicht parallel sind. Fällt g mit g_n zusammen, so darf n' beliebig in g_n angenommen werden; die neue Kette $\mathfrak{K}'$ ist trotz Einfügung des Stabes mn nicht zwangläufig, sondern behält zwei Bewegungsfreiheiten. Ist $g_n \parallel g$, so befindet sich die Kette nach Einfügung des Stabes mn gegenüber den an $\mathfrak{K}$ angreifenden Kräften in einer Todlage, sie ist aber zwangläufig.

Gehören beide Punkte m und n dem Teile $\mathfrak{K}' - \mathfrak{K}$ an, so läuft die Aufgabe, die Punkte m' und n' in den Geraden g_m und g_n so zu bestimmen, daß $m'n' \parallel mn$ ist und jedem Stabe ik des Teiles $\mathfrak{K}' - \mathfrak{K}$ eine zu ik parallele Gerade $i'k'$ entspricht, wieder darauf hinaus, ein Polygon $3'4'5' \ldots m' \ldots n'$ zu zeichnen, dessen Ecken in gegebenen Geraden $g_3, g_4, g_5, \ldots g_m \ldots g_n$ liegen und dessen Seiten gegebene Richtungen haben. Man erhält dann (s. Seite 230) für n' noch einen zweiten Ort g'_n. Fallen die Geraden g'_n und g_n zusammen, so bleibt die zweite Bewegungsfreiheit bestehen. Ist $g'_n \parallel g_n$, so besitzt die Kette $\mathfrak{K}'$ wieder eine Todlage und kann durch Glieder der Kette $\mathfrak{K}$ nicht angetrieben werden; sie ist aber zwangläufig.

Eine zweite Lösung der vorliegenden Aufgabe stützt sich darauf, daß die Strecke nn' nicht nur als die um 90° gedrehte *endliche Geschwindigkeit* des Punktes n aufgefaßt werden darf, sondern auch als die in unendlich großem Maßstabe aufgetragene, um 90° gedrehte

Digitized by Google

verschwindend kleine Verschiebung dieses Punktes. Die Strecke λ_{mn}, um welche sich der Abstand l_{mn} der Punkte m und n ändert, wird durch den Abstand der durch m' und n' zu mn gezogenen beiden Parallelen dargestellt, Fig. 465 (vergl. auch Seite 463 Fig. 458); ihr Vorzeichen sei durch die Bestimmung gegeben, daß die lotrechten Verschiebungen mm' und nn' der Knotenpunkte durch Rechtsdrehung in ihre wirklichen Lagen $m(m)$ und $n(n)$ gebracht werden. Daraus folgt z. B. daß λ_{mn} in Fig. 465 positiv ist, weil sich m von n entfernt.

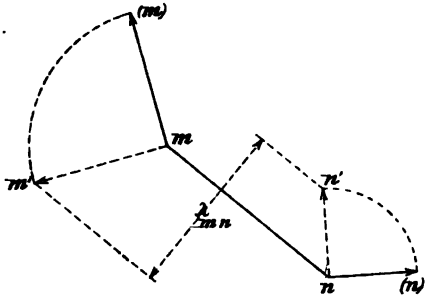


Fig. 465.

Nehmen wir nun an, es sei die lotrechte Verschiebung 3 3′ des Knotenpunktes 3 der vorhin untersuchten Kette (Fig. 464) die Folge der Längenänderung λ_{23} eines dehnbaren Stabes, der 3 mit 2 verbindet, so können wir die Änderung λ_{mn} der Strecke mn *als Funktion ersten Grades* der Größe λ_{23} und der die Bewegung der Kette $\mathfrak{K}$ bestimmenden freien Geschwindigkeit darstellen. Es geht dies ohne weiteres daraus hervor, daß die Punkte $3'm'n'$ ähnliche, gerade Punktreihen beschreiben, welche durch Angabe der Größe der Geschwindigkeit eines Punktes der Kette $\mathfrak{K}$ bestimmt sind.

Wir erhalten einen Ausdruck von der Form

$$(2) \quad \lambda_{mn} = \lambda'_{mn} + \lambda''_{mn} \cdot \lambda_{23}.$$

Hierin bedeutet λ'_{mn} die Änderung, welche der Abstand mn für den Fall erfährt, daß $\lambda_{23} = 0$ ist, daß also der Stabzug 1 3 4 2 durch Einfügung eines starren Stabes 2 3 zwangläufig an die Kette $\mathfrak{K}$ angeschlossen ist, und λ''_{mn} bezeichnet den Einfluß der *Ursache* $\lambda_{23} = 1$ auf λ_{mn}, das ist die Änderung, welche der Abstand mn erleidet, wenn $\lambda'_{mn} = 0$ gesetzt und der Stab 2 3 um λ_{23} verlängert wird. Die Kette $\mathfrak{K}$ bleibt bei der Ermittelung von λ''_{mn} in Ruhe, und der Punk 3′ wird in der Geraden 1 3 so angenommen, daß die Länge des von 3′ auf die Gerade 2 3 gefällten Lotes gleich $+\lambda_{23}$ ist.

Digitized by Google

Werden nun die Punkte m und n durch einen starren Stab verbunden, so ergibt sich die Starrheitsbedingung $\lambda_{mn} = 0$, und aus dieser folgt dann für die dem Stabe 2 3 zuzuschreibende Längenänderung der Wert

$$(3) \quad \lambda_{23} = -1 \frac{\lambda'_{mn}}{\lambda''_{mn}}.$$

Ist $\lambda''_{mn} = 0$ und zugleich auch $\lambda'_{mn} = 0$, so bleibt λ_{23} unbestimmt; die Kette behält die zweite Bewegungsfreiheit. Verschwindet aber nur λ''_{mn}, während λ'_{mn} endlich ist, so muß, damit $\lambda'_{mn} = 0$ werde, die Kette $\mathfrak{K}$ in Ruhe bleiben, und es tritt dann die mit Zwangläufigkeit verbundene Todlage ein.

Durch die vorstehende Untersuchung sind wir nun zu dem folgenden ganz allgemeinen Verfahren geführt worden.

Hat man eine Kette $\mathfrak{K}'$ durch Beseitigung von Stäben (deren Längen gleich $x_a, x_b, \ldots . x_r$ seien) und Einfügung von ebensoviel dehnbaren Ersatzstäben (welche die Längen $y_a, y_b, \ldots y_r$ haben) in eine zwangläufige Kette $\mathfrak{K}$ verwandelt, für welche die Konstruktion des Verschiebungsplanes bekannt ist, so ist man im stande, die Längenänderungen $\zeta_a, \zeta_b \ldots \zeta_r$ der Strecken $x_a, x_b, \ldots . x_r$ als Funktionen ersten Grades der Längenänderungen $\eta_a, \eta_b, \ldots \eta_r$ der dehnbaren Ersatzstäbe und der freien Geschwindigkeit der Kette $\mathfrak{K}$ darzustellen. Man findet

$$(4) \quad \begin{cases} \zeta_a = \zeta_{ao} + \zeta_{aa}\eta_a + \zeta_{ab}\eta_b + \ldots\ldots + \zeta_{ar}\eta_r \\ \zeta_b = \zeta_{bo} + \zeta_{ba}\eta_a + \zeta_{bb}\eta_b + \ldots\ldots + \zeta_{br}\eta_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_r = \zeta_{ro} + \zeta_{ra}\eta_a + \zeta_{rb}\eta_b + \ldots\ldots + \zeta_{rr}\eta_r, \end{cases}$$

wo

$$\zeta_{ao}, \zeta_{bo}, \ldots . \zeta_{ro}$$

die Änderungen der Längen $x_a, x_b, \ldots x_r$ für den Fall bedeuten, daß alle η gleich Null sind, daß also die Ersatzstäbe starr angenommen werden, während

$$\zeta_{aa}, \zeta_{ba}, \ldots \zeta_{ra}$$

die Längenänderungen der Strecken $x_a, x_b, \ldots x_r$ infolge der Ursache $\eta_a = 1$ sind, ebenso

$$\zeta_{ab}, \zeta_{bb}, \ldots \zeta_{rb}$$

die Änderungen der x infolge von $\eta_b = 1$, u. s. w.

Setzt man schließlich sämtliche Werte $\zeta_a, \zeta_b, \ldots \zeta_r$ gleich Null, so erhält man ein System linearer Gleichungen, deren Wurzeln

Digitized by Google

η_a, η_b, . . . η_r diejenigen Längenänderungen angeben, welche die Ersatzstäbe erfahren müssen, wenn es möglich sein soll, die beseitigten Stäbe wieder einzusetzen, ohne die Bewegung der Kette aufzuheben. Verschwindet die Determinante jener r Gleichungen, so ist die Kette $\mathfrak{K}'$ nicht zwangläufig, trotzdem sie die erforderliche Gliederzahl besitzt, oder sie ist zwar zwangläufig, läßt sich aber nicht mit Hilfe eines jeden Gliedes antreiben.

Ersetzt man z. B. den in Fig. 464 an die Knoten 1 und 2 einer zwangläufigen Kette $\mathfrak{K}$ angeschlossenen Stabzug 1 3 4 2 durch einen aus vier Stäben bestehenden Zug 1 3 4 5 2 und schließt man, genau wie vorhin, weitere Knotenpunkte zweistäbig an, so erhält man zunächst eine Kette, welche drei freie Geschwindigkeiten besitzt. Die Zwangläufigkeit kann dann im allgemeinen durch Hinzufügung von zwei Stäben x_a, x_b erreicht werden, denen zwei vom Knotenpunkte 2 nach den Knotenpunkten 3 und 4 gehende, eingefügte dehnbare Stäbe y_a', y_b gegenüberstehen. Zur Berechnung von η_a und η_b dienen die Gleichungen

$$(5)\quad \begin{cases} 0 = \zeta_{ao} + \zeta_{aa}\eta_a + \zeta_{ab}\eta_b \\ 0 = \zeta_{bo} + \zeta_{ba}\eta_a + \zeta_{bb}\eta_b, \end{cases}$$

sie liefern die Werte

$$(6)\quad \eta_a = -\frac{D_a}{D},\quad \eta_b = -\frac{D_b}{D}$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} \zeta_{aa} & \zeta_{ab} \\ \zeta_{ba} & \zeta_{bb} \end{vmatrix} = \zeta_{aa}\zeta_{bb} - \zeta_{ba}\zeta_{ab}$$

$$D_a = \begin{vmatrix} \zeta_{ao} & \zeta_{ab} \\ \zeta_{bo} & \zeta_{bb} \end{vmatrix} = \zeta_{ao}\zeta_{bb} - \zeta_{bo}\zeta_{ab}$$

$$D_b = \begin{vmatrix} \zeta_{aa} & \zeta_{ao} \\ \zeta_{ba} & \zeta_{bo} \end{vmatrix} = \zeta_{aa}\zeta_{bo} - \zeta_{ba}\zeta_{ao}.$$

Ist $D \gtrless 0$, so sind η_a und η_b eindeutig bestimmt, und die Kette $\mathfrak{K}$ ist zwangläufig.

Ist $D = 0$ und $D_a \gtrless 0$, so ist $D_b \gtrless 0$, und man erhält $\eta_a = \mp\infty$, $\eta_b = \pm\infty$. Sollen aber diese Strecken endlich werden, so müssen ζ_{ao} und ζ_{bo} gleich Null sein. Die Kette $\mathfrak{K}$ muß also ruhen, und die Kette $\mathfrak{K}'$ befindet sich gegenüber den an $\mathfrak{K}$ angreifenden Kräften in einer Todlage; sie ist aber zwangläufig, denn zwischen η_a und η_b besteht die Beziehung

$$\eta_a : \eta_b = -\zeta_{ab} : \zeta_{aa} = -\zeta_{bb} : \zeta_{ba},$$

welche für die Verhältniszahl $\eta_a : \eta_b$ einen endlichen Wert liefert.

Digitized by Google

In allen anderen Fällen ist die Kette $\mathfrak{K}'$ nicht zwangläufig, sondern besitzt zwei oder drei Bewegungsfreiheiten.

Das Verfahren, die Darstellung der Geschwindigkeiten einer kinematischen Kette auf die wiederholte Lösung einer einfachen geometrischen Aufgabe und die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen zurückzuführen, entspricht dem in No. 206 zur Berechnung der Spannkräfte in den Stäben eines Fachwerks benutzten allgemeinen Verfahren der Stabvertauschung. Auch im zweiten Bande werden wir bei der Ermittelung der von den elastischen Längenänderungen der Fachwerkstäbe herrührenden Verschiebungen der Knotenpunkte in schwierigen Fällen mit einfachen geometrischen Konstruktionen und linearen Gleichungen, deren Wurzeln die Längenänderungen gewisser eingefügter Ersatzstäbe sind, arbeiten, so daß wir es hier mit einem sehr fruchtbaren allgemeinen Verfahren zu tun haben.*)

Wir heben schon an dieser Stelle unseres Buches hervor, daß die Aufgabe: die Verschiebungen der Knotenpunkte infolge der Änderungen *sämtlicher* Stablängen zu finden, die vorhin gelöste Aufgabe als Sonderfall einschließt, weil es sich bei dieser Untersuchung nur um den Einfluß der Längenänderungen *einzelner* Stäbe — der y-Stäbe — gehandelt hatte.

213. Abänderung der Auflagerbedingungen einer zwangläufigen Kette. Es ist häufig zweckmäßig, den Geschwindigkeitsplan einer zwangläufigen Kette zunächst unter der Voraussetzung zu zeichnen, daß nicht das wirkliche Widerlager (w) sondern irgend ein anderes Glied der Kette festgestellt wird. Ist dann $\mathfrak{P}$ der augenblickliche Drehpunkt des Widerlagers w und nn' die Geschwindigkeit irgend eines Punktes von w, so kann man die wirklichen Auflagerbedingungen nachträglich in der Weise leicht erfüllen, daß man die ganze Kette, die man nunmehr als starr ansieht, so um den Pol $\mathfrak{P}$ dreht, daß sich der Punkt n mit einer Geschwindigkeit $n''n$ bewegt, die gleich und entgegengesetzt der Geschwindigkeit nn' ist. Es ergeben sich dann für alle Punkte i der Kette Geschwindigkeiten $i''i$, welche nach Seite 457 durch die Bedingung bestimmt sind, daß die Punkte i'' eine Figur $\mathfrak{F}''$ bilden müssen, welche ähnlich und ähnlich liegend zu der Figur $\mathfrak{F}$ der Kette ist, so zwar, daß der Pol $\mathfrak{P}$ der Ähnlichkeitspunkt beider Figuren

*) Besonders brauchbar ist dieses Verfahren für das räumliche Fachwerk, dessen allgemeine Untersuchung der Verfasser in einer Reihe von Abhandlungen im Zentralblatt der Bauverwaltung 1891, 1892, 1902, 1903 durchgeführt hat. Eine Zusammenfassung dieser Arbeiten findet der Leser im letzten Abschnitte der 1904 erschienenen dritten Auflage von Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen.

Digitized by Google

ist. Die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten $i''i$ und ii' liefert schließlich die Geschwindigkeiten $i''i'$. Die Ermittelung des Poles $\mathfrak{P}$ ist übrigens nicht unbedingt erforderlich; es genügt, die Figur $\mathfrak{F}''$ durch Angabe zweier Punkte zu bestimmen.

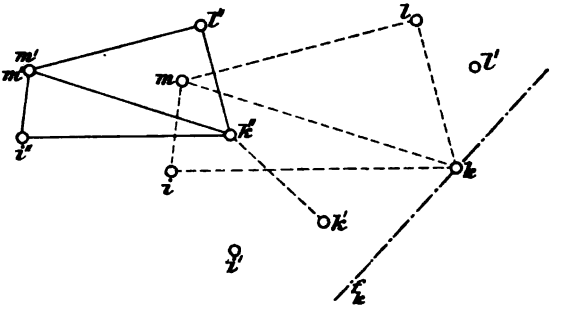


Fig. 466.

Es seien z. B. m, l, i, k (Fig. 466) Knotenpunkte einer zwangläufigen Kette, und m', l', i', k', die Punkte eines für irgend eine Stützung gezeichneten Geschwindigkeitsplanes $\mathfrak{F}'$. Die in Fig. 466 die Punkte m, l, i, k verbindenden Linien sollen keine Stäbe vorstellen, es sei vielmehr über die Gliederung der Kette nichts festgesetzt. Nun sollen die Auflagerbedingungen wie folgt geändert werden: Punkt m soll ruhen, Punkt k soll in einer Geraden f_k geführt werden. Die erste Änderung verlangt, daß der Punkt m'' mit dem Punkte m' zusammenfällt, da ja die Strecke $m''m'$ gleich Null sein soll; die zweite fordert für den Punkt k eine zur Geraden f_k rechtwinklige Strecke $k''k'$. Da nun die Figuren $\mathfrak{F}''$ und $\mathfrak{F}'$ ähnlich sein sollen, so muß $m''k'' \parallel mk$ sein. Damit ist aber der Punkt k'' und auch die Figur $\mathfrak{F}''$ vollständig bestimmt; man findet z. B. i'' mit Hilfe von $m''i'' \parallel mi$ und $k''i'' \parallel ki$, ist also im stande, die Geschwindigkeiten $i''i'$ aller Punkte der Kette für die abgeänderte Stützung anzugeben.

Vereinigt man nach Fig. 449 die Geschwindigkeiten ii' und $i''i$ zu einem Strahlenbüschel, so sind die Figuren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}''$ ebenfalls ähnlich, sie brauchen aber nicht mehr ähnlich zu liegen.

214. Die Ermittelung der augenblicklichen Drehpole der Glieder einer zwangläufigen Kette läßt sich häufig auch ohne die Konstruktion eines Geschwindigkeitsplanes mit Hilfe eines Satzes durchführen, der sich auf die gegenseitige Bewegung dreier in derselben Ebene befindlichen Scheiben bezieht.

Digitized by Google

Bewegt sich eine ebene Scheibe *I* gegen eine ruhende Scheibe *II*, so dreht sich *I* augenblicklich um einen festen Pol, der mit (*I II*) bezeichnet werden möge; in ihm sind die beiden Scheiben *I* und *II* gewissermaßen gelenkartig miteinander verbunden. Wird nun beiden Scheiben gleichzeitig noch eine Bewegung gegen eine dritte Scheibe *III* erteilt, so dreht sich *I* um einen augenblicklichen Pol (*I III*) und *II* um einen augenblicklichen Pol (*II III*). Der vorhin ruhende Pol (*I II*) bewegt sich; ein in ihm auf seiner augenblicklichen Bewegungsrichtung errichtetes Lot muß sowohl durch den Pol (*I III*) als auch durch den Pol (*II III*) gehen, weil (*I II*) als gemeinschaftlicher Punkt der beiden Scheiben *I* und *II* betrachtet werden darf. Hieraus folgt, *daß die drei Pole* (*I II*), (*I III*), (*II III*) *in einer Geraden liegen.*

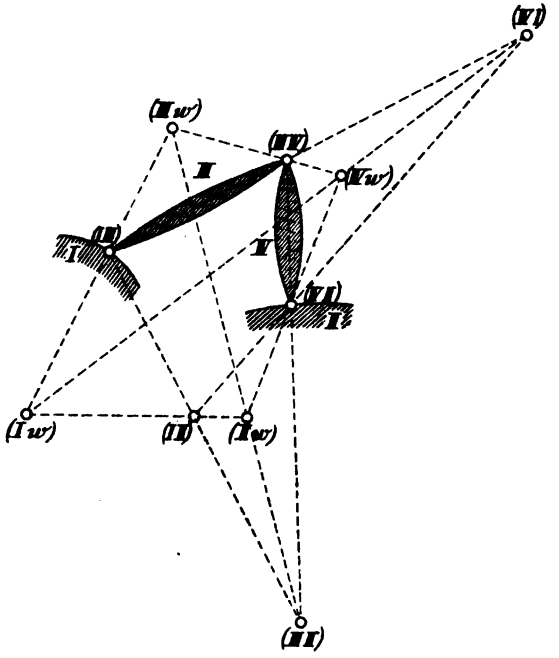


Fig. 467.

Folgt eine zwangläufige Kette einem der in No. 213 unter 1) und 2) beschriebenen Bildungsgesetze, so beruht die Ermittelung ihrer Pole auf der Lösung der *Grundaufgabe:* Seien (Fig. 467) *I* und *II* Glieder einer zwangläufigen Kette, (*Iw*) und (*IIw*) ihre Pole gegen das Widerlager *w*, (*I II*) der Pol von *I* gegen *II*; seien ferner *III*

Digitized by Google

und *IV* zwei Scheiben, die in der Weise an *I* und *II* zwangläufig angeschlossen sind, daß sich *III* gegen *I* um den Pol (*I III*) dreht, *IV* gegen *II* um (*IV II*) und *III* gegen *IV* um (*III IV*); gesucht seien die Pole, um welche sich *III* und *IV* gegen *w* drehen.*)

Man findet mit Hilfe des oben bewiesenen Satzes der Reihe nach

(*III II*) als Schnittpunkt der Geraden (*III IV*) (*IV II*) und (*III I*) (*I II*)
(*IV I*) „ „ „ „ (*IV II*) (*II I*) „ (*IV III*) (*III I*)
(*III w*) „ „ „ „ (*III I*) (*I w*) „ (*III II*) (*II w*)
(*IV w*) „ „ „ „ (*IV II*) (*II w*) „ (*IV I*) (*I w*)
oder „ „ (*III IV*) (*III w*) „ (*IV I*) (*I w*).

Nach diesem Schema ist z. B. die Polkonfiguration der in Fig. 468 dargestellten zwangläufigen Kette gezeichnet worden. Zuerst wurden die Pole des Gelenkvierecks *w I II III* und hierauf der Pol der Scheibe *IV* gegen das Widerlager *w* bestimmt.

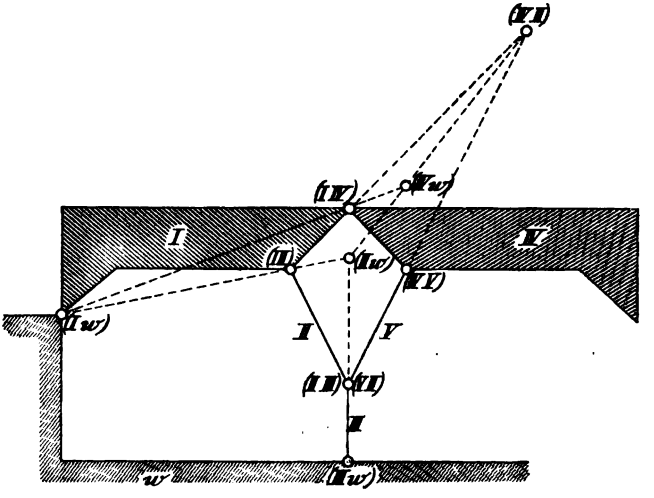


Fig. 468.

Die Ermittelung der Pole ohne Zuhilfenahme eines Geschwindigkeitsplanes läßt sich auch bei den zwangläufigen Ketten leicht durchführen, die aus Gebilden mit zwei Bewegungsfreiheiten durch Hinzufügung einer Starrheitsbedingung gewonnen werden. Sie stützt sich

*) Es ist nicht notwendig, daß die Scheiben *I*, *III*, *IV*, *II* in Gelenken (*I III*), (*III IV*), (*IV II*) aneinanderhängen, wie dies in Fig. 467 vorausgesetzt ist.

Digitized by Google

darauf, dass, solange die zweite Bewegungsfreiheit besteht, für jeden Pol mindestens ein geometrischer Ort angegeben werden kann. Da dieses Verfahren aber meistens weniger einfach ist als die Polbestimmung mit Hilfe eines Geschwindigkeitsplanes (dessen Konstruktion ebenfalls auf der Ermittelung der Örter g_n der Punkte n' beruht) so gehen wir hier nicht weiter darauf ein. Ein Beispiel findet sich in No. 216, Fig. 487.

215. Berechnung der innern Kräfte und Stützenwiderstände eines Fachwerks mit Hilfe der Figur $\mathfrak{F}'$. Auf eine starre Scheibe mögen beliebige äußere Kräfte Q_1, Q_2, .. Q_m wirken, welche miteinander im Gleichgewicht sind. Ihre Hebelarme in Bezug auf irgend einen Drehpunkt $\mathfrak{P}$ seien h_1, h_2, ... h_m (Fig. 469). Dann besteht die Gleichgewichtsbedingung

$$(8) \quad \Sigma Qh = 0,$$

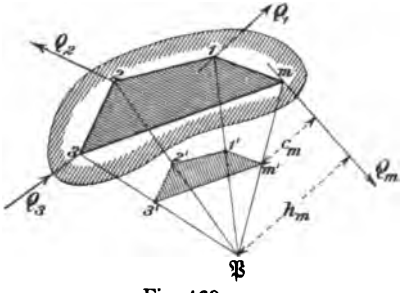


Fig. 469.

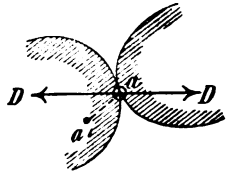


Fig. 470.

in welcher sich das Zeichen Σ über sämtliche Kräfte Q erstreckt. Betrachtet man $\mathfrak{P}$ als den augenblicklichen Pol einer unendlich kleinen Drehbewegung und stellt man die lotrechten Geschwindigkeiten der in den Richtungen der Kräfte Q_1, Q_2 .. Q_m beliebig angenommenen Angriffspunkte 1, 2, ... m mit Hilfe einer Figur $\mathfrak{F}'$ dar, so besteht zwischen den von den Punkten 1', 2', .. m' auf die Kräfte Q_1, Q_2 .. Q_m gefällten Loten c_1, c_2 .. c_m und den entsprechenden Hebelarmen h die Beziehung

$$\frac{c_1}{h_1} = \frac{c_2}{h_2} = \ldots = \frac{c_m}{h_m} = \text{Konstante},$$

denn es ist ja

$$\frac{1'1}{1\mathfrak{P}} = \frac{2'2}{2\mathfrak{P}} = \ldots = \frac{m'm}{m\mathfrak{P}} = \text{Konstante}.$$

Die Gleichung 8 geht also über in

$$(9) \quad \Sigma Qc = 0.$$

Digitized by Google

Es liege nun ein aus mehreren Scheiben zusammengesetztes Gebilde vor, an welchem sich äußere Kräfte Q das Gleichgewicht halten. Das Gebilde sei kein starres; es sei vielmehr möglich, die einzelnen, in reibungslosen Gelenken aneinander hängenden Scheiben um verschiedene Pole zu drehen. Für irgend einen augenblicklichen Bewegungszustand sei eine Figur $\mathfrak{F}'$ gezeichnet, und für jede Scheibe sei die Gleichgewichtsbedingung (9) aufgestellt. Dann werden in diesen Gleichungen neben den äußeren Kräften auch die Kräfte D vorkommen, mit denen die Scheiben in den Gelenken aufeinander wirken, Fig. 470. Werden aber schließlich alle jene Gleichungen addiert, so heben sich die von den Kräften D herrührenden Glieder paarweise auf, und daraus folgt, daß die Gleichung (9) nicht nur für eine einzelne Scheibe, sondern auch für ein Scheibengebilde gilt, u. a. auch für ein Fachwerk, denn Stäbe sind besondere Fälle von Scheiben. Beachtet man schließlich noch, daß c_m die Projektion der Geschwindigkeit des Angriffspunktes m der Kraft Q_m auf die Richtung von Q_m darstellt, so erkennt man auch, daß die Gleichung $\Sigma Qc = 0$ das bekannte Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ausspricht.

Die Gleichgewichtsbedingung ΣQc gestattet häufig eine außerordentlich schnelle und übersichtliche Berechnung der Spannkräfte und Stützenwiderstände statisch bestimmter Fachwerke.

Soll die Spannkraft S_{ik} in einem zwei Knoten i und k verbindenden Stabe berechnet werden, so verwandle man das Fachwerk durch Wegnahme jenes Stabes in eine zwangläufige kinematische Kette, lasse an dieser in i und k die Spannkräfte S_{ik} als äußere Kräfte angreifen, zeichne einen Geschwindigkeitsplan $\mathfrak{F}'$, wobei die Größe der Geschwindigkeit irgend eines Punktes beliebig groß angenommen werden darf, und stelle für alle an der beweglichen Stabverbindung angreifenden Kräfte die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma Qc = 0$ auf. Werden bei der gedachten unendlich kleinen Bewegung die Auflagerbedingungen erfüllt, so entspricht sämtlichen Stützenwiderständen der Wert $c = 0$, und die Gleichgewichtsbedingung enthält nur die eine Unbekannte S_{ik}.

Sind die Stützenwiderstände bereits bekannt, so darf irgend ein Glied der Kette als ruhend angenommen werden.

Wird eine nach bestimmter Richtung wirkende Seitenkraft eines Stützenwiderstandes gesucht, so wird die Beweglichkeit des Fachwerks durch Beseitigung der jenem Widerstande gleichwertigen Auflagerbedingung erreicht.

Beispiel. An dem in Fig. 471a dargestellten Fachwerk von 6 Knotenpunkten mögen sich die äußeren Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_6$ das Gleichgewicht halten. Gesucht ist die Spannkraft S im Stabe 16.

Digitized by Google

Der Stab 16 wird weggenommen; in den Knotenpunkten 1 und 6 werden die gesuchten Spannkräfte S als äußere Kräfte angebracht. Sodann wird ein Geschwindigkeitsplan $\mathfrak{F}'$ gezeichnet, am einfachsten in der Weise, daß die Punkte 1 und 2 festgelegt werden und dem Punkte 3 die beliebig große lotrechte Geschwindigkeit 33′ erteilt wird. Bedeutet c das Lot vom Punkte 6′ auf S, so nimmt die Gleichung $\Sigma Qc = 0$ die Form an

$$P_3c_3 - P_4c_4 - P_5c_5 - P_6c_6 - Sc = 0;$$

sie liefert für S einen endlichen Wert, solange c endlich ist. Wird $c = 0$, so ergibt sich der unbrauchbare Wert $S = \infty$. Das Fachwerk ist dann mindestens von unendlich kleiner Beweglichkeit.

Eine zweite Anordnung zeigt die Figur 471b; in derselben sind die lotrechten Geschwindigkeiten von einem Nullpunkte O aus aufgetragen worden.*) Die Punkte 1′ und 2′ fallen mit O zusammen. Die zu 23 parallele Strecke 2′3′ wurde beliebig groß gewählt. Sodann wurde

4′ bestimmt mittels 1′4′ ∥ 14 und 3′4′ ∥ 34,
5′ „ „ 2′5′ ∥ 25 „ 4′5′ ∥ 45,
6′ „ „ 3′6′ ∥ 36 „ 5′6′ ∥ 56.

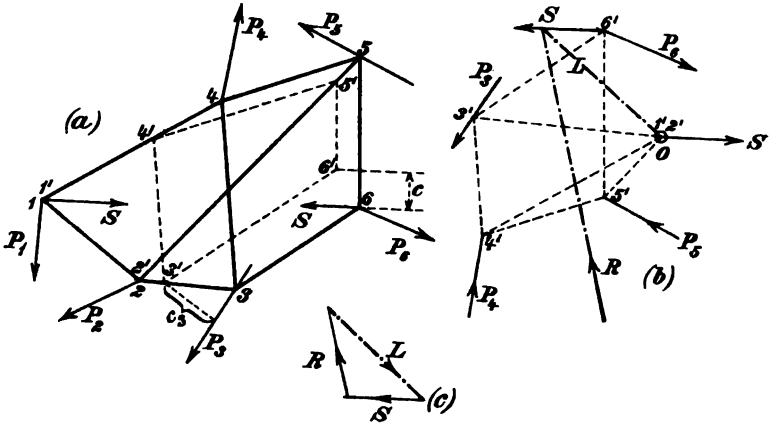


Fig. 471.

Die Gleichung $\Sigma Qc = 0$, ausgedehnt über alle Kräfte P und über die Spannkräfte S drückt jetzt die Bedingung aus, daß die Summe der Momente der in den entsprechenden Punkten der Figur $\mathfrak{F}'$ (b) angreifenden Kräfte P und S in Bezug auf den Drehpunkt O gleich Null sein muß.

*) Vergl. auch Fig. 449 a u. b auf Seite 457.

Digitized by Google

Bildet man also die Mittelkraft R der Kräfte P_3, P_4, P_5 und P_6, so muß das Moment von S in Bezug auf den Drehpunkt O dem Momente von R entgegengesetzt gleich sein. Bei bequemer Lage des Schnittpunktes der Kraft R und der in 6′ angreifenden Kraft S, verbinde man diesen Schnittpunkt mit dem Nullpunkte O durch eine Gerade L und zerlege R, nach den Richtungen von L und S. Das Kräftedreieck in Fig. 471c liefert die gesuchte Spannkraft S, weil L durch den Drehpunkt O geht, mithin keinen Einfluß auf das Moment der Kraft R hat.

Schneiden sich R und S außerhalb des Zeichenblattes, so ersetze man R durch zwei Seitenkräfte R' und R'', von denen R'' durch den Punkt O geht. R'' ist ohne Einfluß auf S; R' wird so angenommen, daß es S in einem bequem gelegenen Punkte schneidet; dann wird es genau wie vorhin nach den Richtungen S und L zerlegt.

Wäre die Geschwindigkeit des Angriffspunktes 1 der zweiten Kraft S nicht gleich Null, so müßte man das in der Fig. 471b auftretende aus zwei Kräften S bestehende Kräftepaar erst so verschieben, daß die eine der beiden Kräfte S durch den Nullpunkt O geht.

Nach Ermittelung von S kann man die Spannkräfte in den übrigen Stäben des Fachwerks der Reihe nach mit Hilfe der Kraftpolygone für die Knotenpunkte 5, 4, 3, 2 bestimmen.

Noch eine kurze Bemerkung knüpfen wir an die Figur 471b. Da nämlich die vom Nullpunkte O ausgehenden Strecken $O3'$, $O4'$, ... die um 90° gedrehten Geschwindigkeiten oder Verschiebungen der Knotenpunkte 3, 4, ... darstellen, so erhält man die wirklichen Geschwindigkeits- oder Verschiebungsrichtungen, wenn man die Figur 471b um 90° dreht; es entspricht dann jedem Stabe ik eine Gerade $i'k'$, die rechtwinklig zu ik ist. Eine wichtige Anwendung dieser Darstellungsweise enthält No. 217.

216. Einflußlinien. Das kinematische Verfahren liefert bei Annahme eines die Auflagerbedingungen befriedigenden Bewegungszustandes für die gesuchte Unbekannte S stets eine Gleichung $S = \frac{\Sigma Pc}{c'}$, welche den Einfluß jeder einzelnen Last angibt und deshalb ohne weiteres Schlüsse auf die ungünstigste Belastungsweise gestattet; es wird sich daher auch ganz besonders zur Ermittelung der Einflußlinien eignen. Hier handelt es sich um den Sonderfall paralleler Lasten. Wählt man $c' = 1$, so ist die Ordinate der Einflußlinien gleich der Projektion c der Geschwindigkeit des Angriffspunktes der Kraft P auf die Richtung von P, oder, etwas kürzer ausgedrückt, gleich der Geschwindigkeit des Angriffspunktes von P in der Richtung von P.

Digitized by Google

Dreht sich nun irgend eine der starren Scheiben, aus denen die zu untersuchende zwangläufige Kette besteht, mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihren augenblicklichen Pol (Fig. 472), so bewegt sich der Angriffspunkt einer im Abstande x von jenem Pole an der Scheibe angreifenden Kraft P in der Richtung von P mit der Geschwindigkeit $c = x\omega$; und aus dieser linearen Beziehung folgt der wichtige Satz: *Zu jeder starren Scheibe gehört eine gerade Einflußlinie, deren Nullpunkt dem augenblicklichen Pole der Scheibe entspricht.*

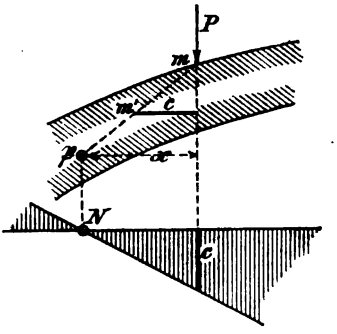


Fig. 472.

Besteht also die zwangläufige Kette, in welche das Fachwerk durch Beseitigung eines Stabes übergeht, aus den Scheiben .... *I*, *II*, *III*, ... so setzt sich die Einflußlinie für S aus ebensoviel geraden Linien .... *I'*, *II'*, *III'* .... zusammen, deren Nullpunkte ... N_1, N_2, N_3, ... den Polen ... (*I*), (*II*), (*III*) ... entsprechen, um welche sich die Scheiben gegen das Widerlager drehen.*) Sind die Scheiben so an-

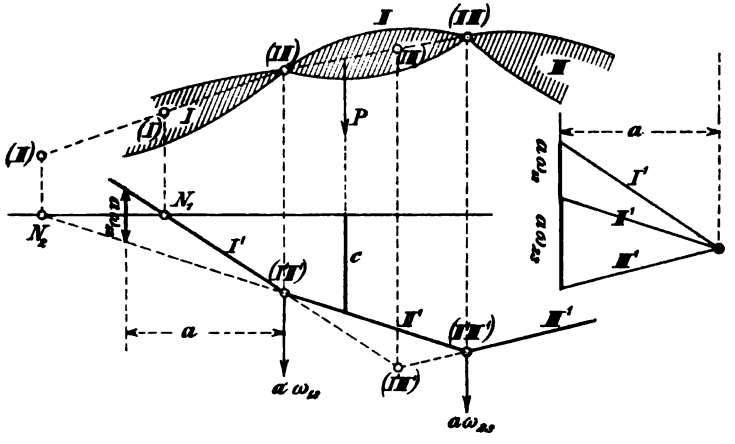


Fig. 473.

einander gereiht, daß jede Scheibe mit der vorhergehenden und der nachfolgenden durch ein Gelenk verbunden ist, Fig. 473, so fassen wir

*) Es sind also ... (*I*) (*II*) (*III*) ... die kurzen Bezeichnungen für die früher gebrauchten .. (*Iw*), (*IIw*), (*IIIw*) ...., wo *w* das Widerlager bedeutet. Der Satz: es liegen die drei Pole (*Iw*) (*IIw*) (*I II*) in einer Geraden, nimmt dann die ebenso übersichtliche Form an: es liegen (*I*) (*I II*) (*II*) in einer Geraden.

Digitized by Google

sie unter dem Namen *Scheibenzug* zusammen. Den Gelenken .... (*I II*), (*II III*) .... als den gemeinschaftlichen Punkten zweier Scheiben entsprechen die Schnittpunkte .... (*I' II'*), (*II' III'*) .... der Geraden *I'*, *II'*, *III'*, ... Aber auch dann, wenn zwei Scheiben nicht unmittelbar aneinanderhängen, z. B. *I* und *III*, darf ihr gegenseitiger Pol (*I III*) als gemeinschaftlicher Punkt beider Scheiben angesehen werden; ihm wird daher ebenfalls der Schnittpunkt der zu jenen Scheiben gehörigen Geraden *I'* und *III'* entsprechen. Es ist deshalb keineswegs erforderlich, behufs Auftragung der Einflußlinie .. *I'*, *II'*, *III'* .... sämtliche Pole .. (*I*) (*II*) (*III*) .... zu bestimmen; es können vielmehr auch andere Pole, nämlich die gegenseitigen Drehpunkte einzelner Scheiben, die sich oft viel leichter finden lassen, benutzt werden. Sind genügend viele Pole ermittelt worden, so erfordert die Aufzeichnung der Einflußlinie nur die Angabe einer einzigen Ordinate c oder, allgemeiner, die Angabe der Strecke, welche irgend zwei dem Linienzuge .... *I' II' III'* ... angehörige Gerade auf irgend einer, zur Richtung der Kraft P parallelen Geraden abschneiden. Diese letztere Bestimmungsweise wird uns häufig durch den *Satz* ermöglicht werden:

> *Drehen sich zwei Scheiben I und II (die nicht unmittelbar aneinander zu hängen brauchen) mit den Winkelgeschwindigkeiten* ω_1 *und* ω_2 *um ihre Pole (I) und (II), so ist die relative Winkelgeschwindigkeit von I gegen II*
>
> $$\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2,$$
>
> *und es schneiden deshalb die Geraden I' und II' auf einer im beliebigen Abstande a vom Punkte (I' II') parallel zu P gezogenen Geraden die Strecke* $a\omega_{12}$ *ab.*

Aus diesem Satze folgt zunächst, *daß man die Einflußlinie ... I' II' III' .... auch als ein mit der Polweite a gezeichnetes Seilpolygon auffassen darf, welches die in den Punkten ... (I' II'), (II' III') .... angreifenden, zu den Lasten P parallelen Gewichte ...* $a\omega_{12}$, $a\omega_{23}$, ... *verbindet.* Durch den Punkt (*I' III'*) geht das Gewicht $a\omega_{13} = a\omega_{12} + a\omega_{23}$.

Bedeuten die Strecken c nicht endliche Geschwindigkeiten, sondern unendlich kleine Verschiebungen, die in unendlich großem Maßstabe aufgetragen worden sind, so sind ... ω_1, ω_2, ω_3 .... die unendlich kleinen Winkel, um welche sich die Scheiben ... *I*, *II*, *III*, ... drehen, und ω_{12} ist der Drehungswinkel der Scheibe *I* gegen die Scheibe *II*.

In Fig. 474 haben wir die Scheiben durch gerade Linien dargestellt und die unteren Winkel des Polygons .... *I II III* .... mit ... ϑ_1, ϑ_2, ... bezeichnet. Wählen wir dann die Richtung der

Digitized by Google

Schwerkraft zur *positiven* P-Richtung, so dürfen wir die Einflußlinie $\ldots I' II' III' \ldots$ als *Kettenlinie* der Gewichte $\ldots \Delta\vartheta_1, \Delta\vartheta_2 \ldots$ betrachten. Einem positiven $\Delta\vartheta_1$ enspricht eine Rechtsdrehung der Scheibe I gegen die Scheibe II und infolgedessen ein nach unten zeigender Knick der Kettenlinie. Die Polweite ist gleich 1. Zwischen den Änderungen der unteren und oberen Polygonwinkel ϑ und α besteht die Beziehung $\Delta\vartheta = -\Delta\alpha$.

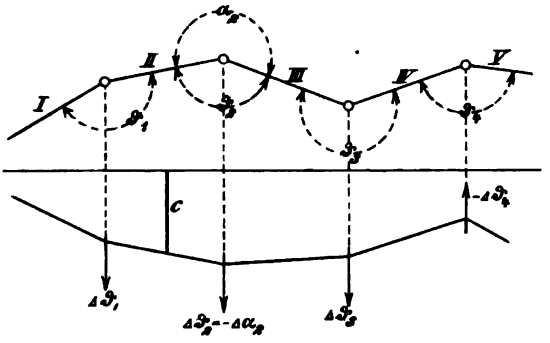


Fig. 474.

Treibt man nun die zwangläufige Kette, in welche das Fachwerk durch Beseitigung eines Stabes von der Länge s übergeht, dadurch an, daß man s um die verschwindend kleine Strecke Δs vergrößert, so leisten die beiden an der Kette angreifenden Kräfte S (Fig. 475) die virtuelle Arbeit $-S\Delta s$, und es nimmt die Gleichung $\Sigma Qc = 0$ bei Erfüllung der Auflagerbedingungen die Form

$$-S\Delta s + \Sigma Pc = 0$$

an; sie liefert, wenn $\Delta s = 1$ (gleich der in unendlich großem Maßstabe aufzutragenden unendlich kleinen Einheit der verschwindend kleinen Verschiebungen) angenommen wird, für S den Wert

$$S = \Sigma Pc.$$

Verbindet der Stab, dessen Spannkraft S gesucht wird, zwei Scheiben I und II, Fig. 475, und bezeichnet r das Lot vom Pole $(I\,II)$ auf die Stabachse und $\Delta\vartheta$ den Winkel, um den sich I gegen II um den Pol $(I\,II)$ dreht, so ist offenbar

$$\Delta s = r\Delta\vartheta,$$

folglich

$$\Delta\vartheta = \frac{\Delta s}{r} = \frac{1}{r},$$

und es schneiden daher die Geraden I' und II' auf einer im Abstande a

Digitized by Google

vom Pole ($I\,II$) parallel zu P gezogenen Geraden (v) die Strecken $v = a\Delta\vartheta = 1\,\frac{a}{r}$ ab. Nimmt v die durch die Pole (I) und (II) bestimmten besonderen Lagen (v_1) und (v_2) an, so erhält man die Strecken

$$v_1 = 1\,\frac{a_1}{r} \text{ und } v_2 = 1\,\frac{a_2}{r},$$

von denen bereits eine zur Festlegung der Linien I' und II' genügt. Verbindet man die Punkte, in denen die Achse des Stabes S die Ge-

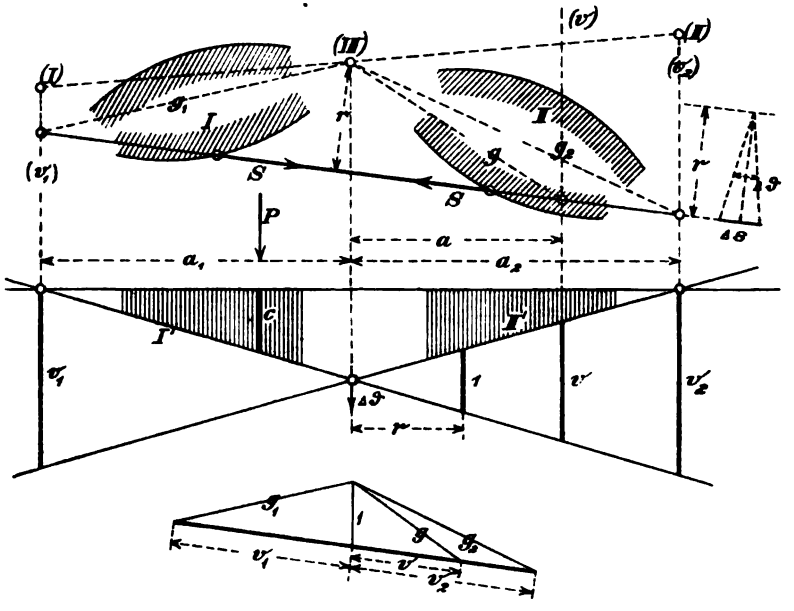


Fig. 475.

raden (v), (v_1), (v_2) schneidet, mit dem Pole ($I\,II$) durch die Geraden g, g_1, g_2 und zerlegt man die zur Kraft P parallele Strecke 1 nach der Richtung S und, der Reihe nach, nach den Richtungen der Geraden g, g_1, g_2, so sind die zu S parallelen Seitenwerte der Reihe nach gleich den Strecken v, v_1, v_2. Im Abstande r vom Pole ($I\,II$) ist die senkrechte Entfernung der Geraden I' und II' gleich 1. Wählt man diese Strecke als Maß für die Lasteinheit, so gibt die Strecke c die von der Last $P = 1$ herrührende Spannkraft S an.

Stellt nun Fig. 476 einen Teil einer durch die Beseitigung eines Gurtstabes U gewonnenen zwangläufigen Kette dar, so findet man zu der beliebig gezogenen Geraden I' nach Auftragung der Strecke 1 sofort die zugehörige Gerade II' und mit Hilfe der den Polen (I) und

Digitized by Google

(*II*) entsprechenden Nullpunkte N_1 und N_2 die Nullachse AB und kennt somit die zu den Scheiben *I* und *II* gehörigen Teile der Einflußlinie für *U*. Zu beachten ist, daß einer Dehnung des Gurtstabes *U* ein positives $\Delta\vartheta$, mithin ein nach unten zeigender Knick der Kettenlinie *I′ II′* entspricht.

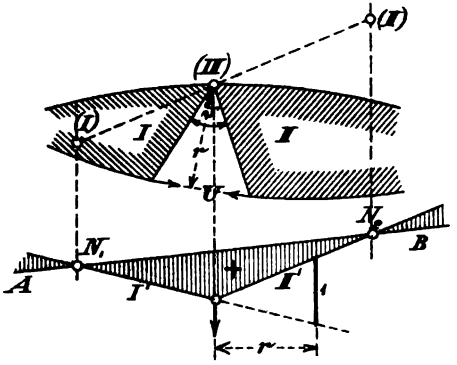


Fig. 476.

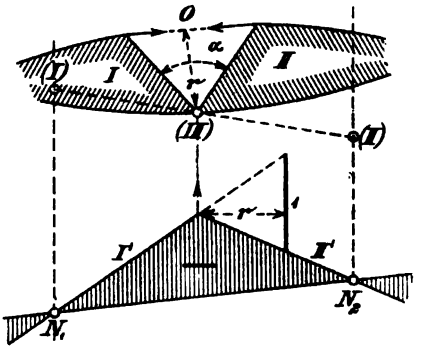


Fig. 477.

Handelt es sich um einen Stab *O* der oberen Gurtung, Fig. 477, so ist α der infolge einer Dehnung des Stabes zunehmende Winkel; es zeigt dann der Knick der Kettenlinie *I′ II′* nach oben.

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den auf Seite 241 für den einfachen Fachwerkbalken gewonnenen, so erkennt man, daß die zwischen den Polen (*I*) und (*II*) liegenden Teile der *U*-Linie und *O*-Linie übereinstimmen mit der *U*-Linie und *O*-Linie eines einfachen Balkens, dessen Stützweite gleich der wagerechten Projektion der Strecke $N_1 N_2$ ist.

Eine andere wichtige Anwendung der in der Fig. 475 dargestellten allgemeinen Gesetze zeigt Fig. 478. Dieselbe veranschaulicht einen Teil einer kinematischen Kette, die aus einem Fachwerke durch Beseitigung einer Diagonale *D* entstanden ist. Die Lasten sind an der unteren Gurtung angreifend gedacht. Zu den Gliedern *I*, *II*, *III* gehören die drei Geraden *I′ II′ III′*. *I′* und *III′* treffen sich in der Senkrechten durch den Schnittpunkt (*I III*) der die Scheiben *I* und *III* verbindenden Gurtstäbe. *I′* und *II′* bilden, da α infolge einer Dehnung der Diagonale *D* zunimmt, einen nach oben zeigenden Knick, sie schneiden auf der Senkrechten durch den Knotenpunkt (*II III*) die Strecke $v = 1\frac{\lambda}{r}$ ab, wo λ die Feldweite bedeutet. Da die zu dieser Senkrechten gehörige Gerade *g* mit dem Gurtstabe *U* zusammenfällt, kann *v* durch Zerlegung der senkrechten Strecke 1 nach den Richtungen der Stäbe *U*

Digitized by Google

und D gewonnen werden, und man erkennt, daß die D-Linie zwischen den Nullpunkten N_1 und N_3 mit der D-Linie für einen einfachen Balken von der Stützweite $N_1 N_3$ übereinstimmt. (Vergl. Seite 240, Fig. 226). Aber noch andere wichtige Eigenschaften der D-Linie lassen sich aus den vorstehenden Betrachtungen folgern.

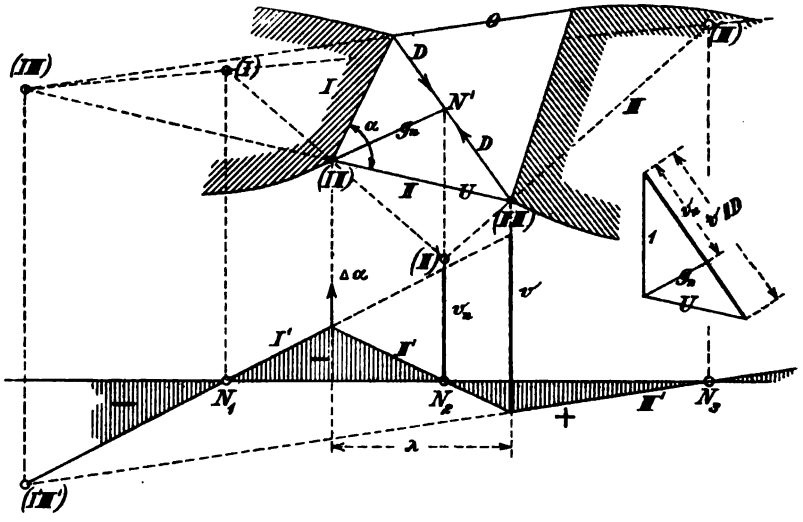


Fig. 478.

Da nämlich die drei Pole (I) $(I\,II)$ und (II) in einer Geraden liegen müssen und ebenso die drei Pole (III) $(III\,II)$ (II), so ergibt sich (II) als der Schnittpunkt der von den Polen (I) und (III) durch die Endpunkte des Stabes II gelegten Geraden, und damit ist der Nullpunkt N_2 bestimmt. Verbindet man den Schnittpunkt N' der Geraden N_2 (II) und der Diagonalen mit dem Gelenk $(I\,II)$ durch die Gerade g_n, und zerlegt die Strecke 1 nach den Richtungen von D und g_n, so gibt der zu D parallele Seitenwert den Abstand v_n der Geraden I' und II' an der Stelle N_2 und damit eine Ordinate der Geraden I' an.

Für die Änderung des Winkels α infolge einer Dehnung der Diagonale um die Strecke 1 fanden wir den einfachen Ausdruck $\Delta\alpha = \frac{1}{r}$ und folgerten hieraus, daß die Geraden I' und II' in der Entfernung r vom Punkte $(I'\,II')$ den senkrechten Abstand 1 besitzen, Fig. 479. Es ist nun die Frage, ob sich nicht auch für die Änderung des Winkels α', den II mit III bildet, ein ebenso einfacher Ausdruck nachweisen läßt. Wir bezeichnen das Viereck, dem die Diagonale angehört mit 1 2 3 4, denken die Seite 1 2 festgehalten und schreiben dem

Digitized by Google

Punkte 3 eine lotrechte Verschiebung $2'3' \parallel 2\,3$ zu, deren Projektion auf die Normale zu D gleich 1 ist. Sodann ermitteln wir die lotrechte

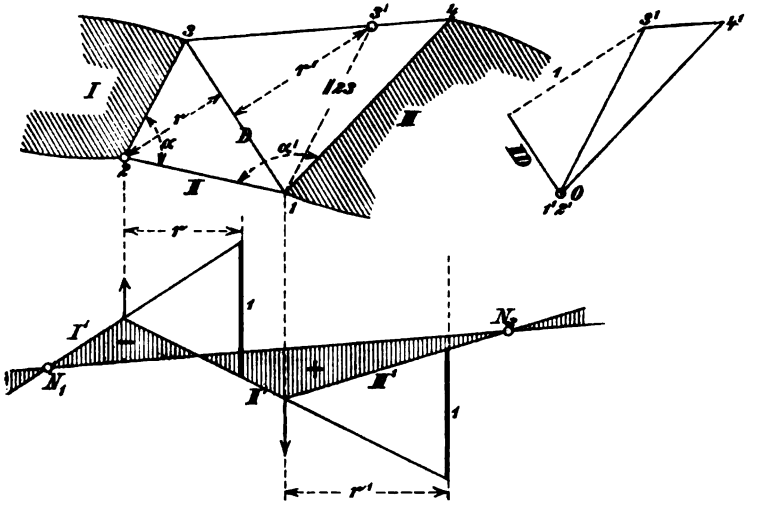


Fig. 479.

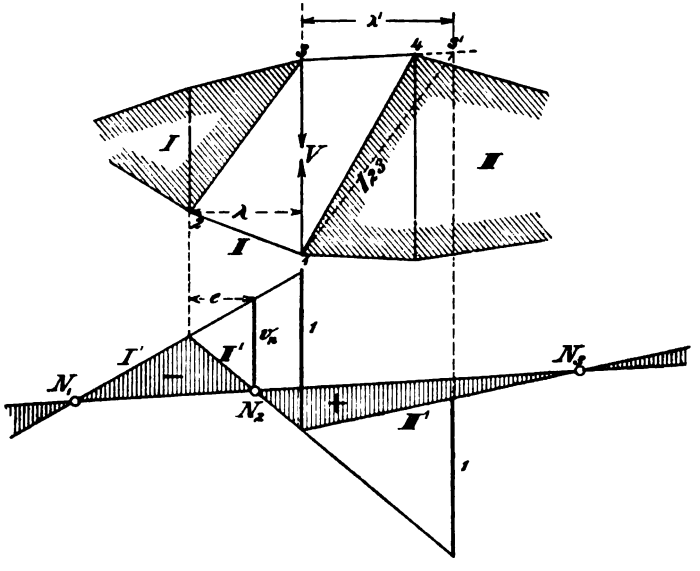


Fig. 480.

Verschiebung $1'4'$ mit Hilfe von $1'4' \parallel 1\,4$ und $3'4' \parallel 3\,4$ und erhalten den Winkel $\Delta\alpha'$, um den sich *III* gegen *II* dreht: $\Delta\alpha' = -\frac{1'4'}{1\,4}$.

Digitized by Google

Bestimmen wir nun auf dem Stabe 3 4 einen Punkt 3′ so, daß 1 3′ ‖ 2 3 ‖ 2′3′ ist und bezeichnen das Lot von 3′ auf D mit r', so ergibt sich $\overline{1'4'} : \overline{1\,4} = 1 : r'$, und wir erhalten daher $\Delta\alpha' = -\frac{1}{r'}$. In der Entfernung r' vom Punkte $II'\,III'$ ist also der senkrechte Abstand der Geraden II' und III' gleich 1. Durch die Strecken r, r' und 1 und die beiden Nullpunkte N_1 und N_3 ist die Einflußlinie $I'\,II'\,III'$ vollständig bestimmt.

Fig. 480 stellt den Sonderfall eines senkrecht stehenden Füllungsstabes V dar. Hier ist $r = \lambda$. Im Nullpunkte N_2 besitzt I' die Ordinate $v_n = 1\,\frac{e}{\lambda}$.

Die Möglichkeit, die Ordinate v_n durch Zerlegung der Lasteinheit nach den Richtungen von D und g_n zu gewinnen, führt zu einer sehr übersichtlichen Ermittelung der in den Füllungsstäben eines einfachen Balkens durch eine gleichmäßige Verkehrslast hervorgerufenen Spannkräfte. Fig. 481 zeigt die Einfluß-

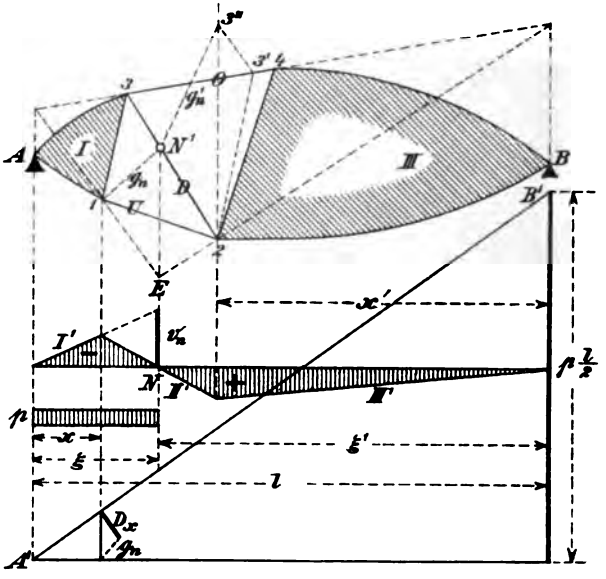


Fig. 481.

fläche der Spannkraft D in einer linkssteigenden Diagonale für den Fall untenliegender Fahrbahn. Die Belastungsscheide E ist nach dem auf Seite 237 beschriebenen Verfahren bestimmt worden. $_{min}D_p$ entsteht infolge Belastung der Strecke ξ. Die negative Einflußfläche ist ein Dreieck von der Höhe $v_n\frac{x}{\xi}$ und dem Inhalte

Digitized by Google

$$\underline{F} = v_n \frac{x}{\xi} \cdot \frac{\xi}{2} = \frac{v_n x}{2}$$

und es ergibt sich deshalb

$$_{min}D_p = -pF = -\frac{px}{2} v_n.$$

Man erhält also $_{min}D_p$, wenn man (an Stelle der Last 1) die Last $\frac{px}{2}$ nach den Richtungen von g_n und D zerlegt. Wir haben $\frac{px}{2}$ als Ordinate einer Geraden $A'B'$, die bei B die Ordinate $\frac{pl}{2}$ besitzt, dargestellt und den Seitenwert von $\frac{px}{2}$ nach der Richtung von D mit D_x (absolut genommen) bezeichnet; wir erhalten also

$$_{min}D_p = -D_x.$$

Erzeugt nun eine gleichmäßige, über die ganze Trägerlänge sich erstreckende Belastung von der Größe 1 für die Längeneinheit, die Spannkraft D_o, so ist der Einfluß der an der unteren Gurtung angreifend gedachten ständigen Belastung (g f. d. Längeneinheit)

$$D_g = g D_o,$$

und es ergibt sich mithin

$$_{min}D = g D_o - D_x.$$

Die Belastung der Strecke ξ' erzeugt

$$_{max}D_p = p D_o + D_x,$$

weil $_{max}D_p + _{min}D_p$ den der gänzlichen Belastung mit p entsprechenden Wert pD_o liefern muß, und es folgt also, wenn $g + p = q$ gesetzt wird,

$$_{max}D = q D_o + D_x.$$

Die Spannkräfte D_o findet man am schnellsten mit Hilfe eines Cremonaschen Kräfteplanes.

Man könnte auch, wie leicht einzusehen ist, $_{max}D_p$ in der Form

$$_{max}D_p = + D_{x'}$$

darstellen, wobei $D_{x'}$ der zu D parallele Seitenwert einer nach den Richtungen von D und g'_n zerlegten Last $\frac{px'}{2}$ ist und g'_n wie folgt erhalten wird. Man bestimme in der Geraden 8 4 den Punkt 3′ mit Hilfe von 2 3′ ‖ 1 8, ziehe 3′ 3″ ‖ D bis zur Senkrechten durch 2 und verbinde 3″ mit N' durch g'_n. Die erste Bestimmungsweise ist jedoch vorzuziehen.

Handelt es sich um den senkrechten Stab V des in Fig. 482 abgebildeten Fachwerks, dessen Belastung wieder an der unteren Gurtung angreifen möge, so ist $v_n = \frac{e}{\lambda} 1$ und

$$\underline{F} = v_n \frac{x'}{2} = \frac{x'}{2} \frac{e}{\lambda}.$$

Es ist also

$$_{min}V_p = -p\underline{F} = -\frac{px'}{2} \frac{e}{\lambda} = -V_{x'},$$

wo $V_{x'}$ gedeutet werden kann als der auf den Knotenpunkt 1 entfallende Teil einer

Digitized by Google

im Punkte N_2 des Zwischenträgers 1 2 angreifenden Last $\frac{p x'}{2}$. Nach Ermittelung von $V_{x'}$ auf dem in Fig. 482 angegebenen Wege findet man

$$_{min}V = g V_o - V_{x'}$$
$$_{max}V = q V_o + V_{x'}.$$

V_o entsteht bei derselben Belastung wie D_o.*)

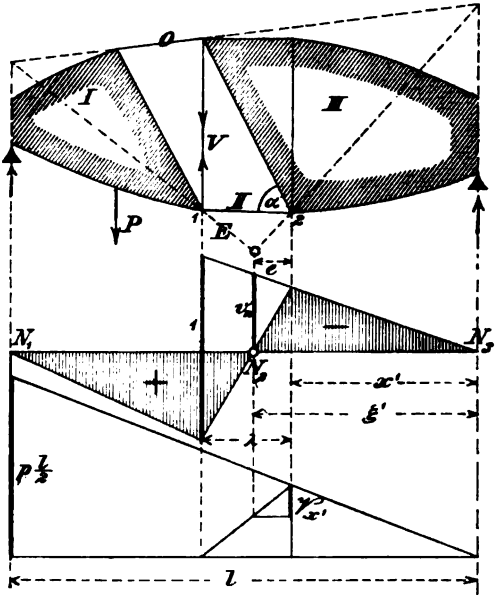


Fig. 482.

Wir lassen nun eine Reihe von Beispielen folgen, die nach den vorstehenden ausführlichen Erörterungen nur noch einer kurzen Erläuterung bedürfen werden.

1. Beispiel. Bogenträger mit einem festen Auflagergelenk B und einem auf schräger Bahn geführten Auflagergelenk A, Fig. 483. Gesucht ist die Einflußlinie für U. Der Pol (I) liegt in der Normalen zur Auflagerbahn und in der Geraden (II) $(I\,II)$. Durch die Nullpunkte N_1 und N_2 und die Strecke v_1 ist die U-Linie bestimmt.

2. Beispiel. Bogenträger mit festem Auflager B und schrägem Gleitlager A, Fig. 484. Die Einflußlinie für D wurde mit Hilfe der

*) Für den Sonderfall eines Fachwerks mit Vertikalen ist die Ermittelung der Werte $_{min}D_p = -D_x$, $_{max}D_p = +D_{x'}$ und $_{min}V_p = -V_{x'}$, bereits von Prof. Herzog (Zürich) gezeigt worden. Vergl. Schweiz. Bauzeitung, Bd. XV, No. 8.

Digitized by Google

Pole (*I*) und (*II*) und der Strecke v_n bestimmt. (*I*) ist der Schnittpunkt der Normalen zur Bahn des Auflagers *A* und der Geraden (*III*) (*I III*).

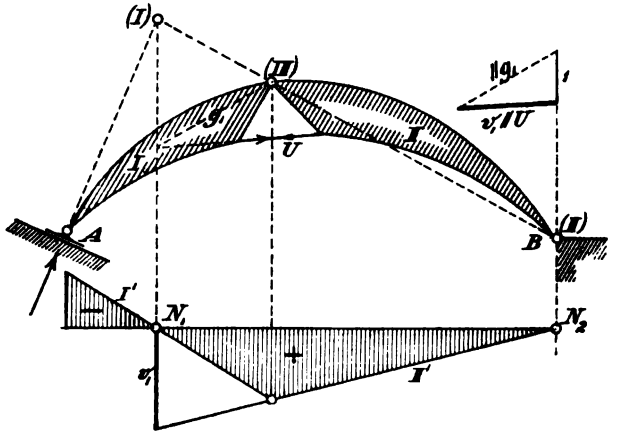


Fig. 483.

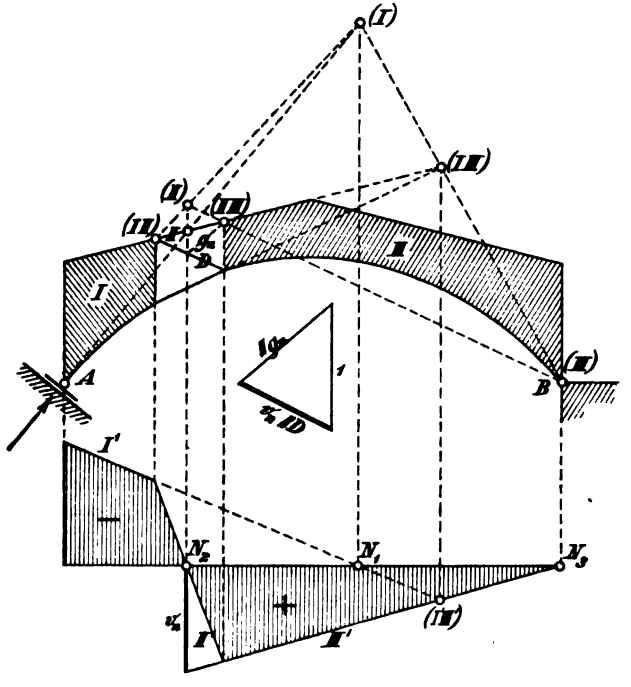


Fig. 484.

3. Beispiel. Dreigelenkbogen. Gesucht ist die Einflußlinie für *D*, Fig. 485. Es wurde der Pol (*III*) als Schnittpunkt der Geraden

Digitized by Google

(*I*) (*III*) und (*III IV*) (*IV*) ermittelt, hierauf der Pol (*II*) und die Strecke v_n bestimmt. Wir empfehlen dem Leser noch zur Übung den Pol (*I IV*) als Schnittpunkt der Geraden (*I*) (*IV*) und (*I III*) (*III IV*) und den Pol (*II IV*) als Schnittpunkt der Geraden (*II*) (*IV*) und (*II III*) (*III IV*) einzutragen. Senkrecht unter diesen beiden Polen müssen die Schnittpunkte (*I' IV'*) und (*II' IV'*) liegen.

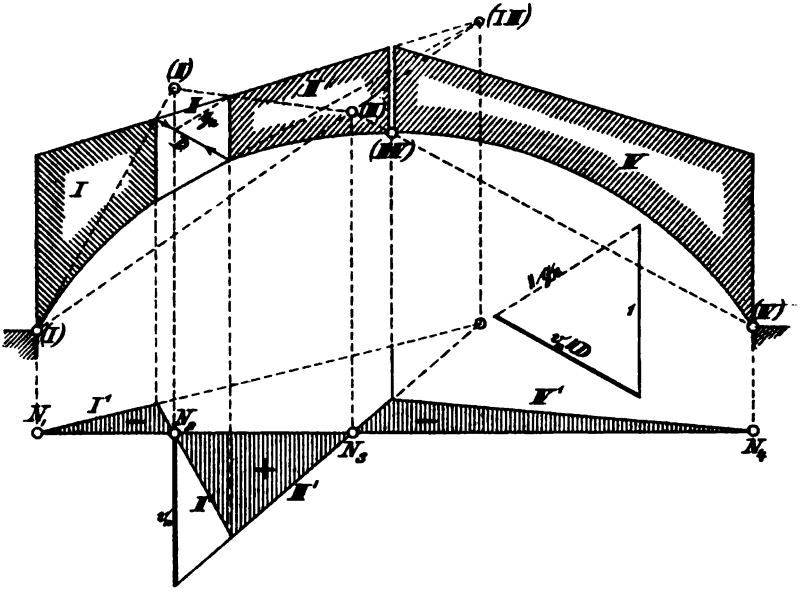


Fig. 485.

4. Beispiel. Gesucht ist die *D*-Linie für den in Fig. 486 dargestellten durchgehenden Balken. Die Belastung greift an der oberen Gurtung an. Der Pol (*II*) der Scheibe *II* wurde in der bereits auf Seite 476 (Fig. 468) beschriebenen Weise ermittelt, wobei zu beachten war, daß der Pol von *II* gegen den Stab *IV* im Unendlichen liegt. Sodann wurde die Ordinate $N_3 A'$ der Geraden *II'* gleich der Spannkraft *D'* gemacht, welche in der Diagonale *D* durch eine Auflagerkraft $A = 1$ erzeugt wird, und schließlich wurde die Gerade *III'* mit Hilfe der Strecke *v* festgelegt. Der unbequem gelegene Punkt (*II III*) wurde nicht benutzt. In Fig. 486 b ist noch die Einflußlinie für den Stützenwiderstand *A* gezeichnet worden.

5. Beispiel. Der in Fig. 487 dargestellte Träger besitzt bei *B* ein festes, bei *A* ein auf schräger Bahn geführtes Auflagergelenk und wird außerdem durch zwei Pendelsäulen, die wagerechten Gleit-

Digitized by Google

lagern als gleichwertig zu erachten sind, gestützt. Gesucht ist die Einflußlinie für O. Der Pol (II) wurde in derselben Weise ermittelt wie im Beispiel 4. Wäre die Lage von (IV) bekannt, so könnte man auf die Lage von (III) in derselben Weise schließen wie von (I) auf (II). Geben wir nun (IV) in der Normalen zur Bahn des Auflagers A die Lagen $(IV)_1$ und $(IV)_2$, so finden wir den zu (II) symmetrisch liegenden Pol $(III)_1$ und den mit $(IV)_2$ zusammenfallenden $(III)_2$. Diese beiden Punkte bestimmen die Gerade, welche (III) durchläuft, während IV die Bahnnormale beschreibt. Da nun aber (III) auch in

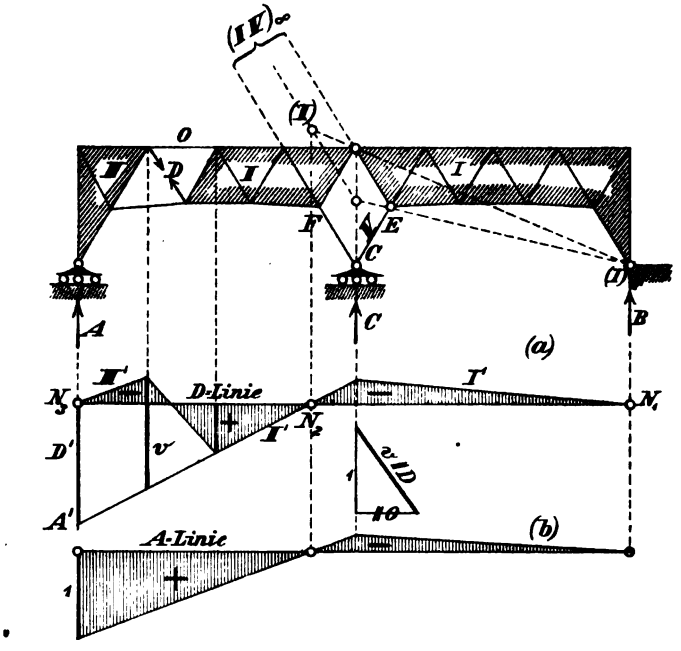


Fig. 486.

der Geraden (II) $(III\,II)$ liegen muß, so ist sowohl die Lage von (III) als auch die von (IV) eindeutig bestimmt, und man kennt jetzt die Nullpunkte $N_1 N_2 N_3 N_4$ der O-Linie. Die Gerade II' besitzt an der Stelle N_3 die Ordinate $1\,\frac{x_m}{h}$.

Wird die Einflußlinie für die Spannkraft D gesucht, so ist das starre Fachwerk durch Beseitigung der Diagonale in eine kinematische Kette zu verwandeln. Der Pol von III gegen II fällt dann mit dem unendlich fernen Schnittpunkte der wagerechten Gurtstäbe O und U zusammen, und es muß daher (III) in der Wagerechten durch (II)

Digitized by Google

liegen. Es fällt also (III) mit $(III)_1$ und (IV) mit $(IV)_1$ zusammen. Der zwischen N_3 und N_2 gelegene Teil der D-Linie stimmt mit der D-Linie eines einfachen Balkens von der Stützweite $N_3 N_2$ überein. Die Gerade II' besitzt an der Stelle N_3 die Ordinate $\frac{1}{\sin \varphi}$, wo φ den Neigungswinkel der Diagonale gegen die Wagerechte bedeutet.

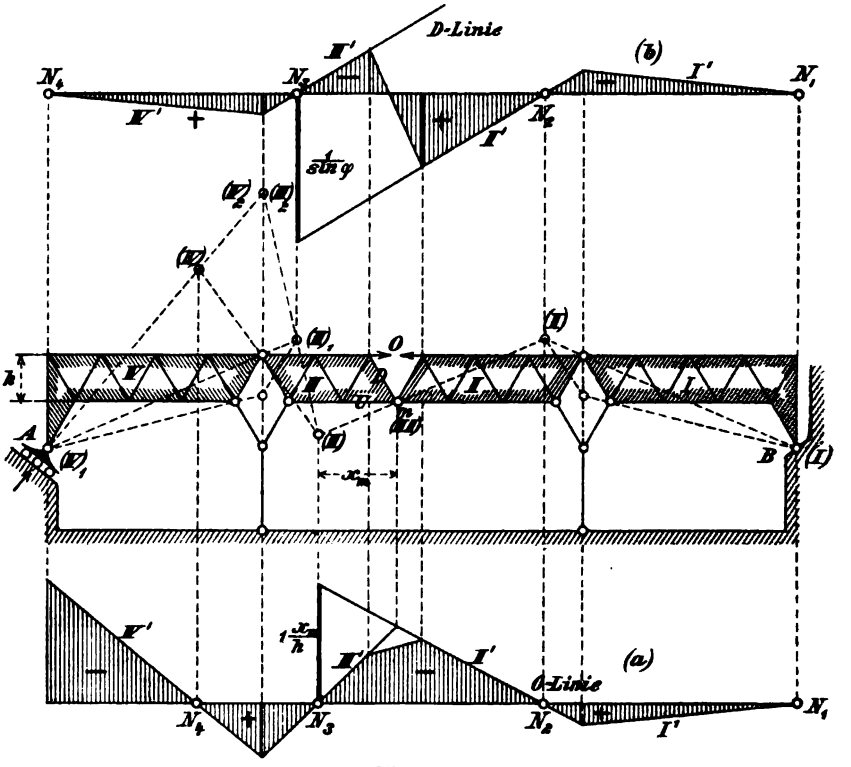


Fig. 487.

Wird das Auflager A in einer Wagerechten geführt, so rückt der Punkt $(IV)_2$ $(III)_2$ ins Unendliche, und die Gerade $(III)_1$ $(III)_2$ wird senkrecht. Die Höhenlage des Punktes IV ist, solange nur senkrechte Lasten in Frage kommen, gleichgültig; denn die Nullpunkte N_3 für alle Spannkräfte O, U und D der Mittelöffnung liegen in der durch den Punkt $(III)_1$ bestimmten Senkrechten. Es ist in diesem Falle einerlei, ob das feste Auflager in B oder in A liegt.

6. Beispiel. Fig. 488 zeigt einen aus drei Scheiben und vier Stäben bestehenden Träger, der bei D ein festes, und bei A, B, C

Digitized by Google

bewegliche Auflagergelenke besitzt. Gesucht ist die Einflußlinie für den Stützenwiderstand C. Die Lasten mögen an der oberen Gurtung angreifen. Wir denken uns die Führung des Punktes C beseitigt und bestimmen die Pole der Scheiben *I*, *II* und *III*.

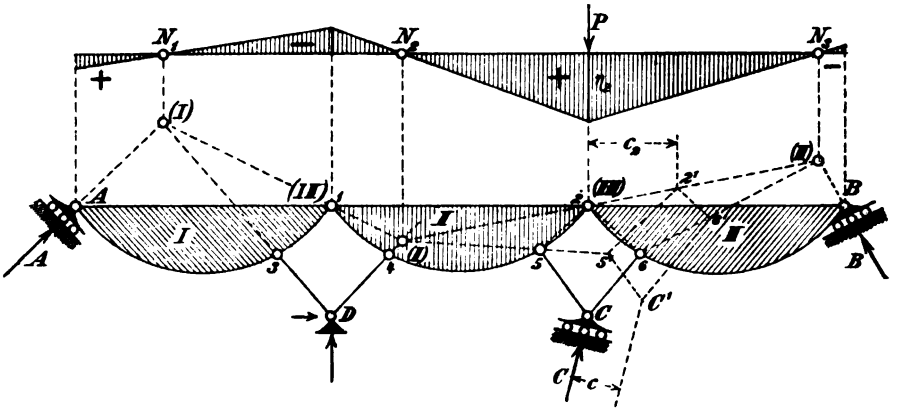


Fig. 488.

Da Punkt A in einer Geraden, die wir kurz mit l_a bezeichnen wollen, und Punkt 3 in einem Kreisbogen, dessen Mittelpunkt D ist, geführt wird, so schneidet der Stab $D3$ die Normale zu l_a im Pole (I). Eine durch die Punkte (I) und $(I\,II)$ gelegte Gerade trifft die Achse des Stabes $D4$ im Pole (II) und eine durch (II) und $(II\,III)$ gelegte Gerade trifft die Normale zur Führung l_b des Stützpunktes B im Pole (III). Damit sind die Nullpunkte N_1, N_2, N_3 bestimmt. Die Ermittelung der dem Punkte 2 entsprechenden Ordinate η_2 der C-Linie soll nun mit Hilfe eines Geschwindigkeitsplanes erfolgen. Wir nehmen für das Gelenk 2 die mit der Geraden 2 (III) zusammenfallende lotrechte Geschwindigkeit $2\,2'$ beliebig an, legen durch $2'$ Parallelen zu den Geraden 2 5 und 2 6, welche die Geraden 5 (II) und 6 (II) beziehungsweise in $5'$ und $6'$ schneiden und ziehen $5'C' \parallel 5C$ sowie $6'C' \parallel 6C$. Bezeichnet c den Abstand des Widerstandes C vom Punkte C' und c_2 den Abstand der in 2 angreifenden Last P vom Punkte $2'$, so besteht die Gleichung $Cc - Pc_2 = 0$; sie liefert für η_2 den Wert

$$\eta_2 = 1\,\frac{c_2}{c}.$$

Die Figuren 489, 490 und 491 zeigen verschiedenartig geformte, über mehrere Öffnungen gespannte Balkenbrücken, die sich zu Übungsaufgaben eignen. In Fig. 492 sind die von den Mittelstützen ausgehenden schrägen Stäbe durch gleichwertige Gleitlager ersetzt worden. Treten nur senkrechte Lasten auf, so

Digitized by Google

ist es gleichgültig, welches Auflagergelenk das feste ist, und es empfiehlt sich daher, in jedem einzelnen Falle eine zu möglichst einfachen Polbestimmungen führende Annahme zu machen. Würde man z. B. in Fig. 486 das Gelenk C als

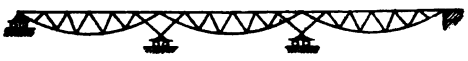


Fig. 489.

Fig. 491.

Fig. 490.

Fig. 492.

festliegend betrachten und dafür B wagerecht geführt ansehen, so würde sich der Pol (I), den wir jetzt mit $(I)'$ bezeichnen wollen, als Schnittpunkt der Stabachse CE mit der Senkrechten durch B ergeben und $(II)'$ als Schnittpunkt der Geraden $(I)'$ (III) und CF und dieser Punkt würde in der Senkrechten durch (II) liegen, mithin denselben Nullpunkt N_2 liefern, so daß sich aus dieser Zulässigkeit der

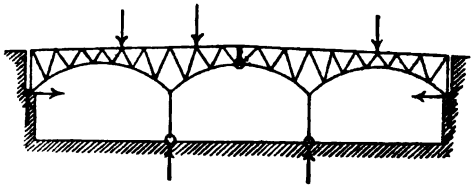


Fig. 493.

Auflagervertauschung eine ganze Reihe von Zeichnungsproben herleiten lassen. — Auch die Untersuchung des in Fig. 493 abgebildeten Bogenträgers ist als lehrreiche Übungsaufgabe zu bezeichnen.

7. Beispiel. Es soll der bereits im § 43, Fig. 370 auf anderem Wege untersuchte *Gerbersche Balken mit Hängegurtung* nunmehr kinematisch behandelt werden.

Fig. 494 zeigt den Ausleger und den Koppelträger. Gesucht seien die Einflußlinien für die Spannkraft U der unteren Gurtung und die wagerechte Seitenkraft $O\cos\beta$ der unter β geneigten Spannkraft O des Auslegers. Handelt es sich um U, so ist der obere Knotenpunkt m der Pol von *III* gegen *II*. Die Pole $(a\,III)$ und $(b\,III)$ der Kettenglieder a und b gegen die Scheibe *III* fallen wegen der parallelen Hängestangen ins Unendliche; es liegen daher die Pole (a) und (b) der Glieder a und b gegen das Widerlager in der Senkrechten durch (III). Da nun der Knotenpunkt C mit dem über die Seitenöffnung gestreckten,

Digitized by Google

das Widerlager des Auslegers bildenden Trägers AB (Fig. 495) fest verbunden ist, so fällt (a) mit C zusammen und es muß auch (b) mit C zusammenfallen, weil (a), (ab), (b) in einer Geraden liegen. Hätte die Scheibe III drei oder noch mehr Felder, so würden auch die Pole (c) (d) ... der übrigen mit (III) durch parallele Hängestangen verbundenen

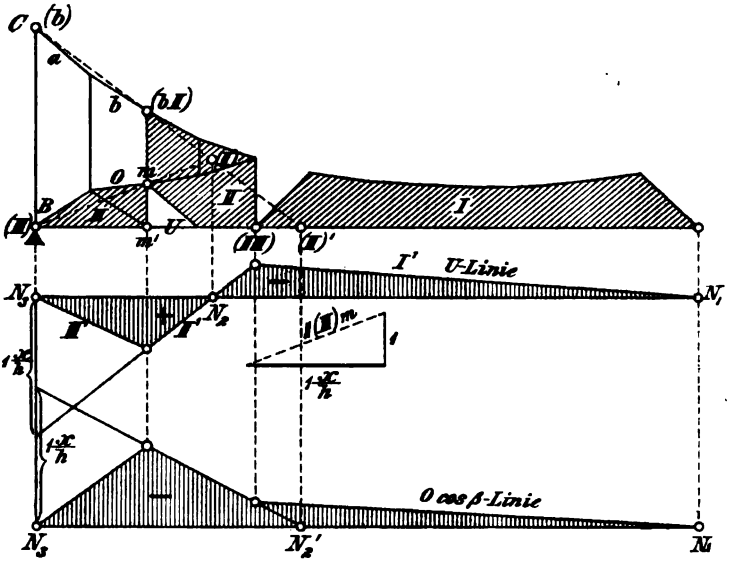


Fig. 494.

Kettenglieder c, d, ... mit C zusammenfallen, weil (b), (bc), (c) in einer Geraden liegen, desgleichen (c) (cd) (d) u. s. w. Durch die beiden Geraden (b) (bII) und (III) m ist jetzt der Pol (II) und damit auch der Nullpunkt N_2 bestimmt. Wird O gesucht, so hängen die Scheiben III und II in m' zusammen, und die Scheibe II dreht sich um den in den Geraden (b) (bII) und $(III)\,m'$ liegenden Pol $(II)'$. Nach Ermittelung der Nullpunkte wurden die Einflußlinien für U und $O\cos\beta$ mit Hilfe der Strecke $1\,\frac{x}{h}$ bestimmt, wo h die Länge der Vertikale mm' bedeutet. Wie man aus den U-Linien und $O\cos\beta$-Linien sehr schnell die Einflußlinien für $D\cos\varphi$ und $-V\operatorname{cotg}\varphi$ finden kann, ist im § 43 beschrieben worden.

Fig. 495 zeigt die Einflußlinien für die Spannkräfte U und $O\cos\beta$ in zwei Gurtstäben der Seitenöffnung AB. So lange die über den Träger wandernde Last zwischen A und B liegt, ist die Kettengurtung spannungslos, und das Trägerstück AB verhält sich wie ein einfacher Balken. Die $O\cos\beta$-Linie unterscheidet sich von der U-Linie nur durch

Digitized by Google

das Vorzeichen; beide Linien sind durch ein und dieselbe Strecke $v = 1\frac{x}{h}$ bestimmt. Um den Einfluß der Belastung des Auslegers und des Koppelträgers zu ermitteln, braucht man nur den Pol (*I III*) von *I* gegen *III* anzugeben. Da nun der Punkt *C* jetzt zur Scheibe *III* gehört, so fällt der Pol von *b* gegen *III* mit *C* zusammen, und man gewinnt den Pol (*I III*) als Schnittpunkt der Geraden (*b III*) (*b I*) und (*II III*) (*II I*). Je nachdem es sich nun um *U* oder *O* handelt, fällt (*II I*) mit dem oberen Knotenpunkte *m* oder dem unteren Knotenpunkte *m'* zusammen; man erhält für den gesuchten Pol von *I* gegen *III* die beiden Lagen (*I III*) und (*I III*)'.

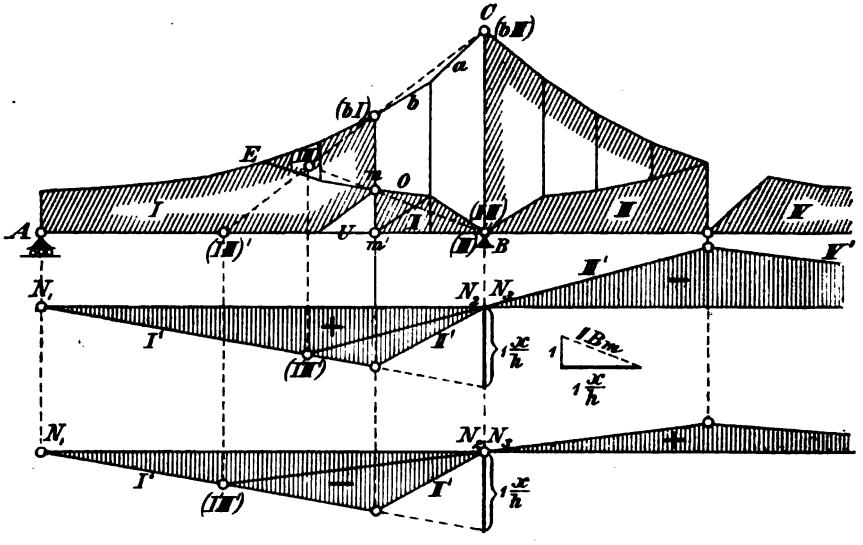


Fig. 495.

Wir empfehlen dem Leser, eine ähnliche Untersuchung über die *D*-Linie anzustellen und auch die (besonders einfache) Bestimmung des Poles (*I III*) für den Fall vorzunehmen, daß die fraglichen Stäbe links vom Endpunkte *E* der Hängegurtung liegen.

217. Herleitung der Einflußfiguren für schräge Lasten aus den Einflußlinien für senkrechte Lasten. Es seien 0, 1, 2, 3 . . . . . *n* die Knotenpunkte eines Stabzuges oder Scheibenzuges einer zwangläufigen Kette, in welche ein Fachwerk behufs Berechnung irgend einer Unbekannten *S* verwandelt worden ist, Fig. 496a; es seien ferner (in Fig. 496b) 0, 1, 2, 3, ... *n* die entsprechenden Punkte der auf eine wagerechte Nulllinie *AB* bezogenen Einflußlinie für *S*, gültig für senkrechte

Digitized by Google

Lasten P. Die Ordinaten $\eta_0, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ dieser Einflußlinie dürfen stets als die senkrechten Projektionen der Geschwindigkeiten der Knotenpunkte 0. 1, 2, 3, . . . n aufgefaßt werden, und daraus folgt, daß die Endpunkte 0′, 1′, 2′, 3′ . . . n' der von einem in der AB angenommenen Nullpunkte O aus aufgetragenen Geschwindigkeiten der Punkte 0, 1, 2, 3, . . . n in den durch die entsprechenden Punkte der Einflußlinie gelegten Wagerechten liegen müssen. Da nun außerdem die Geraden 0′1′, 1′2′, 2′3′. . . . . der Reihe nach rechtwinklig

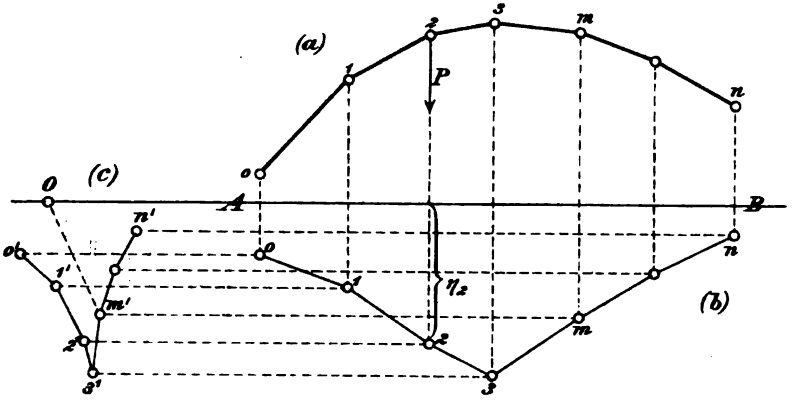


Fig. 496.

zu den Verbindungsgeraden 01, 12, 23, . . . der Knotenpunkte sein müssen (vergl. den Schluß von No. 215), so ist der Geschwindigkeitsplan in Fig. 496 c vollständig bestimmt, sobald die Richtung oder die Größe der Geschwindigkeit eines einzigen Punktes m des Scheibenzuges gegeben ist. Die Ermittelung der Geschwindigkeiten der übrigen Punkte erfolgt dann mit Hilfe des durch den bekannten Punkt m' zu führenden *Normalenzuges* $0'1'2'3' \ldots n'$.

Beispiel. Nach diesem Verfahren ist in Figur 497 der Einfluß schräger Lasten auf die Spannkraft O des Obergurtstabes 1 — 3 des Versteifungsfachwerks eines Gelenkbogens untersucht worden, indem zuerst die Einflußlinie für die lotrechte Belastung auf die im § 49 angegebene Weise gezeichnet wurde. Der dem fraglichen Stabe gegenüberliegende Knotenpunkt 4 liegt im Abstande h *unterhalb* der die Auflagergelenke verbindenden Geraden, und es wurde daher das Maß h vom entsprechenden Bogenpunkte b aus *nach oben* aufgetragen, hierauf durch 0 und den Endpunkt der Strecke h eine Gerade gelegt, welche die Verbindungslinie 14 — c in E trifft. Lotrecht unter E

Digitized by Google

liegt der Nullpunkt der Einflußlinie, welche aus drei Geraden besteht, deren mittelste auf der Senkrechten durch 0 die Strecke $1\frac{x}{r}$ abschneidet, wo r das Lot von 4 auf O bedeutet. Diese Einflußlinie

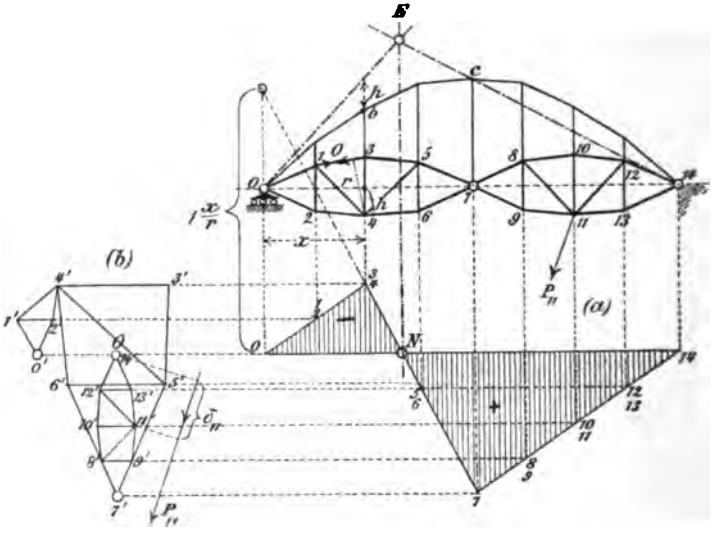


Fig. 497.

gilt für oben und unten angreifende Lasten und kann nun zur Bestimmung der Fig. 497b benutzt werden. O ist der in der Nulllinie angenommene Pol. 14′ fällt mit O zusammen. Sollen nur die unten angreifenden Lasten berücksichtigt werden, so genügt es, den der unteren Gurtung entsprechenden Normalenzug 14′ 13′ 11′ 9′ 7′ 6′ 4′ 2′ 0′ zu zeichnen. Der Einfluß von P_{11} auf O ist z. B.

$$O = + P_{11}\delta_{11}.$$

Dreht man die Last P_{11} *rechts* herum um 90° und weist man ihr den Punkt 11′ als Angriffspunkt zu, so ist $P_{11}\delta_{11}$ das Moment von P_{11} in Bezug auf den Nullpunkt O; es ist positiv anzunehmen, sobald es *rechts* um O dreht. Auf diese Weise kann man den Ausdruck $\Sigma P\delta$, ganz ebenso wie dies in No. 215 mit dem Ausdruck ΣPc geschehen ist, als das Moment der Kräfte P in Bezug auf den Pol O deuten.

Digitized by Google

§ 53.

Aufgaben über mehrteilige Fachwerke.

218. Ein Fachwerk wird ein t-teiliges genannt, wenn seine Gurtungen durch zwei einander kreuzende Scharen von Füllungsstäben verbunden sind und ein von Gurtung zu Gurtung reichender Stab der einen Schar durch Stäbe der anderen Schar in t-Teile zerlegt wird.

Die bisher ausgeführten mehrteiligen Fachwerke sind mit wenigen Ausnahmen statisch unbestimmt; es unterliegt aber nicht den geringsten Schwierigkeiten, auch brauchbare statisch bestimmte mehrteilige Fachwerke zu bilden. Beispiele für statisch bestimmte mehrteilige Netzwerke haben wir bereits im § 51, Seite 446 u. f., kennen gelernt, solche für statisch bestimmte mehrteilige Ständerfachwerke zeigen die Figuren 498 und 499.*) Beim Fachwerke Fig. 498 gehe man von

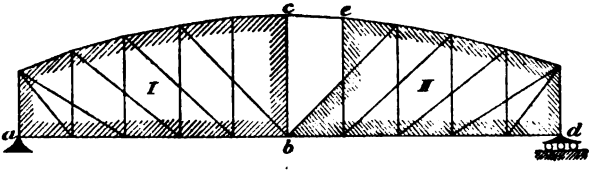


Fig. 498.

den Endständern aus, bilde mittels zweistäbigen Anschlusses der Knotenpunkte die Scheiben I und II und verbinde diese miteinander durch das Gelenk b und den Stab ce. Die Kreuzungspunkte der Diagonalen und Vertikalen dürfen auch als Knotenpunkte aufgefaßt werden. Das Fachwerk in Fig. 499 wird vom Mittelständer aus, durch zweistäbigen Anschluß der Knotenpunkte gebildet.

Die Berechnung mehrteiliger Fachwerke erfolgt am zweckmäßigsten mit Hilfe von Einflußlinien; sie soll durch eine Reihe von Beispielen, die sich auf Balken mit zwei Stützpunkten beziehen, erläutert werden.

a. Balken mit gebrochenen Gurtungen.

219. Einflußlinie für die Vertikale V des Ständerfachwerks in Fig. 499. Wird der Stab 8 7 beseitigt, so entsteht eine zwangläufige Kette. Der rechts vom Stabe 6 9 gelegene schraffierte Teil des Fachwerks ist eine starre Scheibe und soll zunächst als ruhend

*) Eine ähnliche Anordnung zeigt der auf Seite 361 abgebildete Ausleger der Niagarabrücke.

Digitized by Google

angesehen werden. An denselben schließt sich das Gelenkviereck 6 4 7 9 an, und mit diesem sind die übrigen Knotenpunkte durch je zwei Stäbe verbunden. Fig. 499a stellt die um 90° gedrehten Geschwindigkeiten dar. Nach Übertragung des ruhenden Stabes 6 9*) wurde der Punkt 7′ auf der zum Stabe 7 9 parallelen Geraden 7′9′ beliebig angenommen, und hierauf wurden der Reihe nach die Punkte 5′, 4′ 3′, 2′, 1′ und 0′ ermittelt.

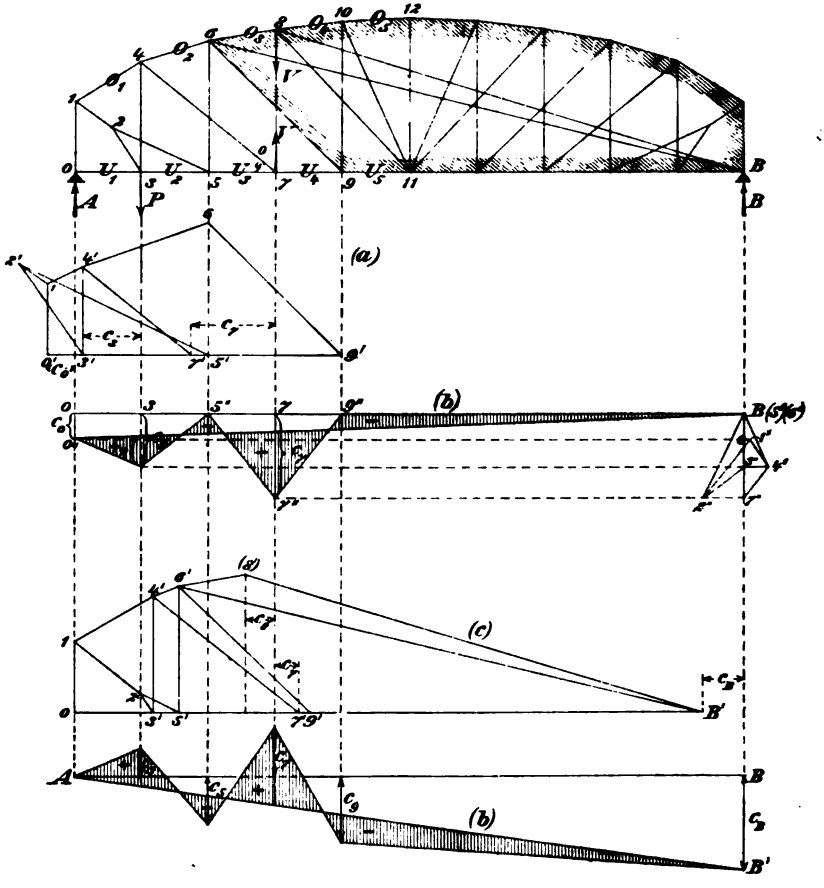


Fig. 499.

Der Einfluß irgend einer Last P ergibt sich nun aus der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma Qc = 0$. Greift P in 3 an, so erhält man

$$Pc_3 - Ac_0 - Vc_7 = 0$$

*) Der größeren Übersichtlichkeit wegen empfiehlt es sich, den Geschwindigkeitsplan vom Trägernetz zu trennen.

Digitized by Google

und hieraus

$$V = \frac{P}{c_7}\left(c_3 - \frac{A}{P}c_0\right) = \frac{P}{c_7}\left(c_3 - \frac{b}{l}c_0\right),$$

wo b den Abstand der Last P von der Stütze B und l die Stützweite bedeutet. Setzt man

$$c_3 - \frac{b}{l}c_0 = \eta,$$

so findet man

$$V = P\frac{\eta}{c_7}.$$

Die Einflußfläche für V zeigt Fig. 499b. Es wurde gemacht: $0\,0'' = c_0$, $3\,3'' = c_3$, $7\,7'' = c_7$; die Geschwindigkeiten der Punkte 5 und 9 und aller Knotenpunkte der Scheibe $6B$ sind gleich Null. Weiter wurde $0''$ mit B durch eine Gerade verbunden, deren unter P gemessene Ordinate $= \frac{b}{l}c_0$ ist. Wählt man den Kräftemaßstab $c_7 = P$, so erhält man $V = \eta$.

In Fig. 499b ist außerdem noch die Anwendung eines Geschwindigkeitsplanes gezeigt worden, der die vom Nullpunkte B aus in den wirklichen Richtungen aufgetragenen Geschwindigkeiten darstellt.*) Es wurde $B\,7''$ gleich der beliebig anzunehmenden Geschwindigkeit c_7 gemacht; die Punkte $5''$, $6''$ fallen mit B zusammen.

$4''$ wurde bestimmt mit Hilfe von $6''4'' \perp 6\,4$ und $7''4'' \perp 7\,4$
$3''$ „ „ „ „ „ $5''3'' \perp 5\,3$ „ $4''3'' \perp 4\,3$
. . . . . .

Eine dritte Lösung der vorliegenden Aufgabe zeigen die Figuren 499c und 499d. Es wurde der Stab 0 1 als ruhend angesehen. Nach Annahme von $3'$ ergaben sich der Reihe nach $2'$, $4'$, $5'$, $6'$, $7'$, $9'$. Nun wurde, da der schraffierte Teil der kinematischen Kette starr ist, der Punkt B' besimmt mit Hilfe von $9'B' \parallel 9B$ und $6'B' \parallel 6B$, und schließlich wurde $8'$ bestimmt mittels $B'8' \parallel B8$ und $6'8' \parallel 68$. Die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma Qc = 0$ lautet, wenn die Last P in 3 angreift,

$$-Pc_3 + Vc_8 + Vc_7 - Bc_B = 0,$$

woraus

$$V(c_7 + c_8) = P\left(c_3 + \frac{B}{P}c_B\right).$$

Die in der Fig. 499d schraffierte Fläche ist Einflußfläche für $V(c_7 + c_8)$. Die dritte Lösung bietet den Vorteil, daß ein Teil der Fig. 499c

*) Vergl. den Schluß von No. 215.

Digitized by Google

auch zur Berechnung anderer Spannkräfte V benutzt werden kann. Handelt es sich beispielsweise um die Spannkraft V im Stabe 5 6, so können die Punkte 2′, 3′, 4′, 5′, 7′ beibehalten werden. Die Division mit $(c_7 + c_8)$ braucht man nur mit einer Ordinate vorzunehmen, weil die Einflußlinie durch eine Ordinate und durch die Nullpunkte bestimmt ist.

Aus dem Geschwindigkeitsplane Fig. 499c lassen sich mit wenigen Strichen die Einflußlinien für die Spannkräfte D_{8-11} und D_{10-11} in den Stäben 8—11 und 10—11 folgern. Wird z. B. die kinematische Kette durch Beseitigung des Stabes 8—11 erzielt, so rückt 8′ in die Senkrechten durch 7′; Punkt 10′ wird in der Senkrechten durch 9′ mittels 8′ 10′ ∥ 8 10 bestimmt; sodann werden in der Wagerechten durch 9′ die Punkte 11′ und B' durch Ziehen von 10′—11′ ∥ 10—11 und $10'B'$ ∥ $10B$ festgelegt. Die Spannkräfte in den übrigen Diagonalen und in den Gurtungen werden mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen durch die Spannkräfte V, D_{8-11} und D_{10-11} ausgedrückt. So besteht z. B. zwischen den Spannkräften V und D der Stäbe 7 8 und 7 4, falls Knotenpunkt 7 unbelastet ist, die Beziehung

$$D \sin \varphi = -V,$$

so daß sich die Ordinaten der Einflußlinien für $D \sin \varphi$ und V in allen Knotenpunkten mit Ausnahme des Punktes 7 nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Liegt P in 7, so ist $D \sin \varphi = -V + P$; es ist dann die Ordinate der $D \sin \varphi$-Linie gleich der Lasteinheit, vermindert um die entsprechende Ordinate der V-Linie.

Zwischen U_4, D und U_3 besteht die Gleichung

$$U_4 = U_3 + D \cos \varphi = U_3 + D \sin \varphi \cdot \operatorname{cotg} \varphi.$$

Da nun $U_1 = 0$ ist, so kann man aus den $D \sin \varphi$-Linien schrittweise alle U-Linien herleiten und aus den Werten U findet man die Spannkräfte O_1, O_2, O_3 der unter den Winkeln β_1, β_2, β_3 gegen die Wagerechte geneigten Obergurtstäbe der ersten drei Felder

$$O_1 = -U_3 \sec \beta_1, \quad O_2 = -U_3 \sec \beta_2, \quad O_3 = -U_5 \sec \beta_3.$$

Die Spannkraft O_5 wird wie beim einfachen Dreiecksystem mittels der Gleichung

$$O_5 \cos \beta_5 = -\frac{\mathfrak{M}_{11}}{h_{11}}$$

gefunden, wo h_{11} die Länge des Stabes 11—12 bedeutet und für O_4 gilt die Gleichung

$$O_4 \cos \beta_4 = O_5 \cos \beta_5 - (D \cos \varphi)_{10-11}.$$

Die Spannkraft V im Stabe 11—12 ist durch das Kräftepolygon für den Knotenpunkt 11 bestimmt.

Digitized by Google

220. Zweiteiliges Netzwerk mit einem Ständer in der Mitte. Fig. 500. Die Lasten mögen in den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen. Die Einflußlinien für die Stäbe O, U und D sollen mit Hilfe von Kräfteplänen bestimmt werden.

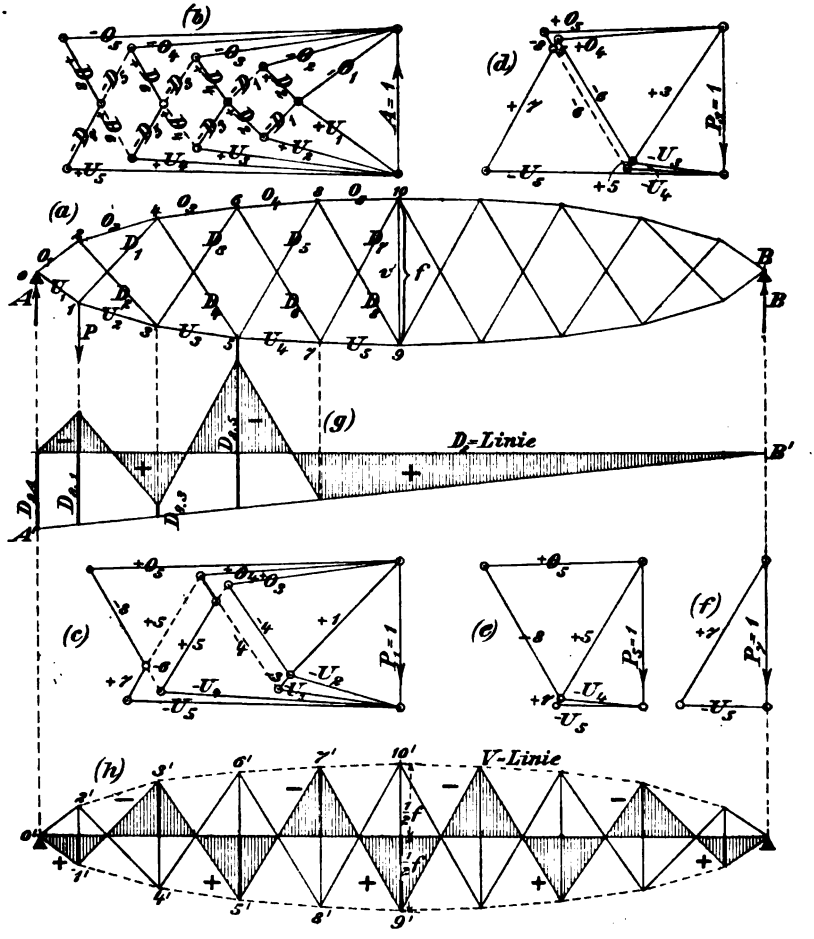


Fig. 500.

Wir betrachten die linke Trägerhälfte als einen an der Stelle 9—10 eingespannten, mit den äußeren Kräften A, P_1, P_3, P_5, P_7 belasteten Freiträger und ermitteln der Reihe nach die Spannkräfte infolge der Belastungen

$$A = 1,\ P_1 = 1,\ P_3 = 1,\ P_5 = 1,\ P_7 = 1$$

mit Hilfe der einer näheren Erläuterung nicht bedürfenden Kräfte-

Digitized by Google

pläne [b], [c], [d], [e], [f].*) Durch diese 5 Pläne sind die Einflußlinien für sämtliche Diagonalen und Gurtstäbe bestimmt.

Figur 500 g zeigt die D_8-Linie. Die dem Plane [b] entnommene positive Spannkraft $D_{8\,A}$ infolge $A = 1$ bestimmt die Gerade $A'B'$, welche für alle Lagen der Last $P = 1$ den Einfluß des Stützendruckes A auf die Spannkraft D_8 angibt. Trägt man nun, von dieser Geraden aus, auf den Senkrechten durch die Knotenpunkte 1, 3, 5, 7 die Spannkräfte $D_{8\cdot 1}$, $D_{8\cdot 3}$, $D_{8\cdot 5}$, $D_{8\cdot 7}$ ab, welche in D_8 beziehungsweise infolge von $P_1 = 1$, $P_3 = 1$, $P_5 = 1$, $P_7 = 1$ entstehen, so erhält man die Eckpunkte der D_8-Linie.**)

Um die Einflußlinie für die Spannkraft V des Ständers zu finden, verwandeln wir das Fachwerk durch Beseitigung dieses Stabes in eine kinematische Kette, bewegen die Knotenpunkte 9 und 10 in der Vertikalen 9—10 gegeneinander mit einer beliebig großen Geschwindigkeit c, bestimmen die zugehörigen Geschwindigkeiten $c_0, c_1, c_3, c_5, \ldots$ der Punkte 0, 1, 3, 5, ... und ermitteln dann die V-Linie mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma Qc = 0$. Dieses Verfahren führt stets rasch zum Ziele und gestaltet sich besonders einfach, wenn, wie im vorliegenden Falle, die Senkrechte durch die Mitte und die Wagerechte durch die Stützpunkte Symmetrieachsen des Fachwerks sind.

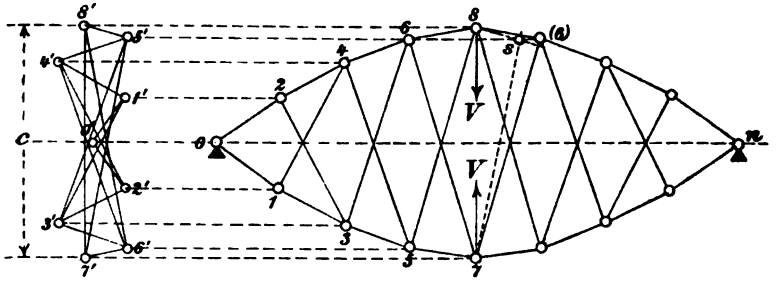


Fig. 501.

In Fig. 501 ist der Geschwindigkeitsplan für einen Träger mit 8 Feldern und (der größeren Deutlichkeit wegen) mit steileren Gurtungen gezeichnet worden. Die Geschwindigkeiten wurden nicht um 90° gedreht, sondern in ihren wirklichen Richtungen aufgetragen. Die in einer Senkrechten gelegenen Punkte 7′ und 8′ wurden in den Wagerechten durch die Knotenpunkte 7 und 8 angenommen; ihre

*) In den Plänen [c] bis [f] haben wir die Bezeichnungen $D_1, D_2, D_3, \ldots$ durch die kürzeren 1, 2, 3, ... ersetzt.

**) Dieses Verfahren läßt sich natürlich auch zur Berechnung des in Fig. 499 dargestellten Trägers benutzen.

Digitized by Google

gegenseitige Geschwindigkeit wurde also durch die Länge des Stabes 7 8 dargestellt. Nun wurde $5'$ mittels $8'5' \perp 8\,5$ und $7'5' \perp 7\,5$ bestimmt

$6'$ „ $7'6' \perp 7\,6$ „ $8'6' \perp 8\,6$ „

u. s. w.

Sind nun die Geraden $0 - n$ und 7 8 Symmetrieachsen des Fachwerks, so muß $5'$ in der Wagerechten durch 6 liegen, was man sofort erkennt, wenn man den Schnittpunkt s der drei Lote des Dreiecks 7 8 (6) bestimmt und dann beachtet, daß $8\,s \parallel 8'5'$ und $7\,s \parallel 7'5'$ ist; und ganz ebenso läßt sich beweisen, daß die Punkte

$$6'\quad 4'\quad 3'\quad 2'\quad 1'$$

der Reihe nach in den Wagerechten durch die Punkte

$$5\quad 4\quad 3\quad 1\quad 2$$

liegen. Ist also die gegenseitige Geschwindigkeit der Punkte 7 und 8 gleich dem Abstande $\overline{7\,8}$ der Knotenpunkte 7 und 8, so sind die gegenseitigen Geschwindigkeiten der Punktepaare (5, 6), (3, 4), (1, 2) beziehungsweise gleich den Strecken $\overline{5\,6}$, $\overline{3\,4}$, $\overline{1\,2}$.

Aus diesem wichtigen Gesetze folgt nun für den vorhin behandelten Fachwerkbalken (Fig. 500) sofort die in Figur 500h lediglich mit Hilfe des Trägernetzes dargestellte Einflußlinie für V. Die schraffierte Fläche $0'\ 1'\ 3'\ 5'\ 7'\ 9'$ ..... gilt für untenliegende, die Fläche $0'\ 2'\ 4'\ 6'\ 8\ 10'$ für obenliegende Fahrbahn. Der Kräftemaßstab ist $P = 1 = f$.

b. Parallelträger.

221. Ganz besonders einfach gestaltet sich die Untersuchung mehrteiliger Fachwerkbalken mit parallelen Gurtungen. Sind die Feldweiten gleich groß, was in der Regel der Fall sein wird, so kann man das Trägernetz als Plan der um 90° gedrehten Geschwindigkeiten benutzen. Es besteht dann die Herleitung der Einflußlinien lediglich im Anschreiben von Ziffern an die Knotenpunkte.

222. Zweiteiliges Ständerfachwerk. Fig. 502. Wird die Einflußlinie für die Spannkraft D_5 gesucht, so mache man das Fachwerk durch Beseitigung von D_5 beweglich, nehme die schraffierte starre Scheibe ruhend an und schreibe dem Knotenpunkte 3 eine Geschwindigkeit $c_3 = \lambda$ zu. Punkt $3'$ fällt dann mit dem Knotenpunkte 1 zusammen, $4'$ mit 2, $6'$ mit 6, $5'$ mit 5, $8'$ mit 6, $7'$ mit 5 u. s. w., $11'$ mit 9. Der Hebelarm von D_5 in Bezug auf $4'$ ist $\lambda \sin \varphi$, und man erhält beispielsweise für eine in 3 angreifende Last P die Gleichung

$$A\lambda - P\lambda - D_5 \lambda \sin \varphi = 0$$
$$D_5 \sin \varphi = A - P$$

Digitized by Google

Figur 502a zeigt die $D_5 \sin \varphi$-Linie sowohl für untenliegende als auch für obenliegende Fahrbahn.

Beseitigt man D_4 und bestimmt man in derselben Weise einen Geschwindigkeitsplan, so findet man, daß 11′ mit 11 zusammenfällt.

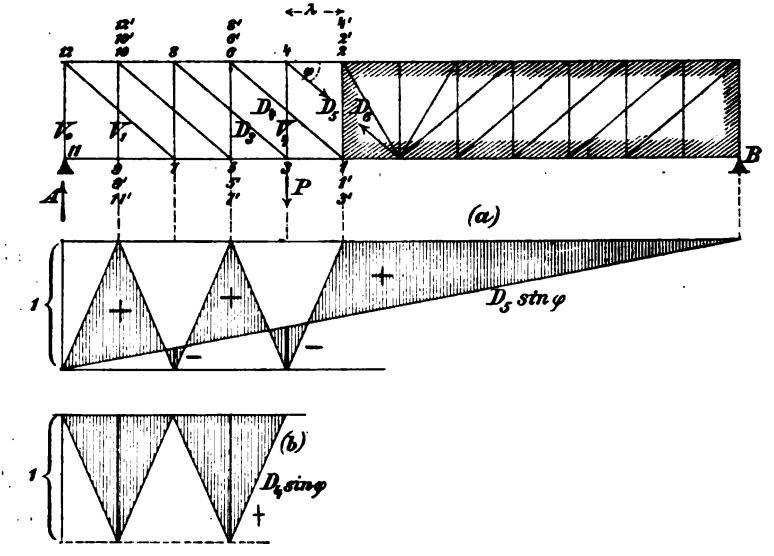


Fig. 502.

Es entsteht die in Fig. 503b gezeichnete $D_4 \sin \varphi$-Linie. Damit sind die Bildungsgesetze für die $D \sin \varphi$-Linien gefunden. Für alle Diagonalen, welche dem vom Endknoten 12 ausgehenden Stabzuge 12—7—8—3 . . . angehören, ergeben sich Einflußlinien von der Art Fig. 502a, für die anderen solche von der Art Fig. 502b. Dies gilt auch für $D_6 \sin \varphi_6$, welches im vorliegenden Falle zur zweiten Gruppe [Fig. 502b] gehört.

Kennt man die Grenzwerte ${}_{max}D \sin \varphi$ und ${}_{min}D \sin \varphi$, so findet man die Spannkräfte in den Vertikalen mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte. Beispielsweise ergibt sich für V_4 bei untenliegender Fahrbahn der Wert

$$V_4 = - D_5 \sin \varphi - g_o \lambda$$

wo $g_o \lambda$ die ständige Belastung des Knotenpunktes 4 bedeutet, und bei obenliegender Fahrbahn wird

$$V_4 = - D_3 \sin \varphi + g_u \lambda$$

wo $g_u \lambda$ die ständige Belastung des Knotenpunktes 3 ist.

Digitized by Google

Fig. 503 zeigt die Einflußlinie für die Spannkraft U in einem Stabe der unteren Gurtung. Die schraffierte Scheibe ist wieder als ruhend angesehen worden; 1′ fällt also mit 1 zusammen, 2′ mit 2. Punkt 3′ darf nach Belieben in der Geraden 2 3 angenommen werden;

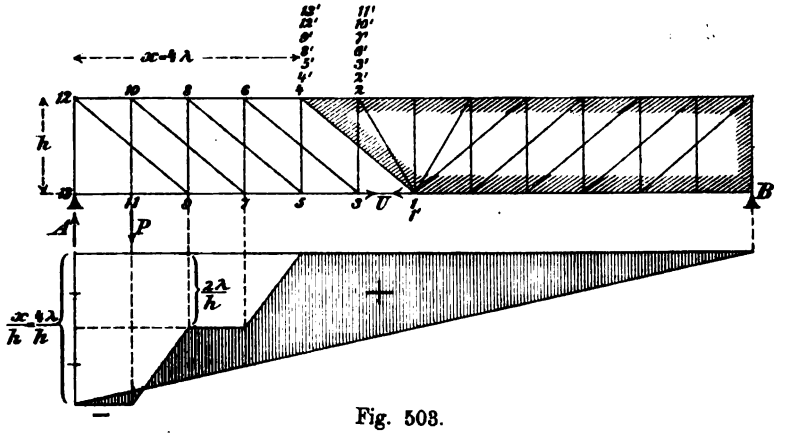


Fig. 503.

er wurde mit 2 zusammenfallend gewählt. Dann fallen auch 6′, 7′, 10′, 11′ mit 2 zusammen, während 4′, 5′, 8′, 9′, 12′, 13′ mit 4 zusammenfallen. Für eine in 11 angreifende Last P findet man

$$A \cdot 4\lambda - P4\lambda - Uh = 0$$

$$U = A\frac{4\lambda}{h} - P\frac{4\lambda}{h}.$$

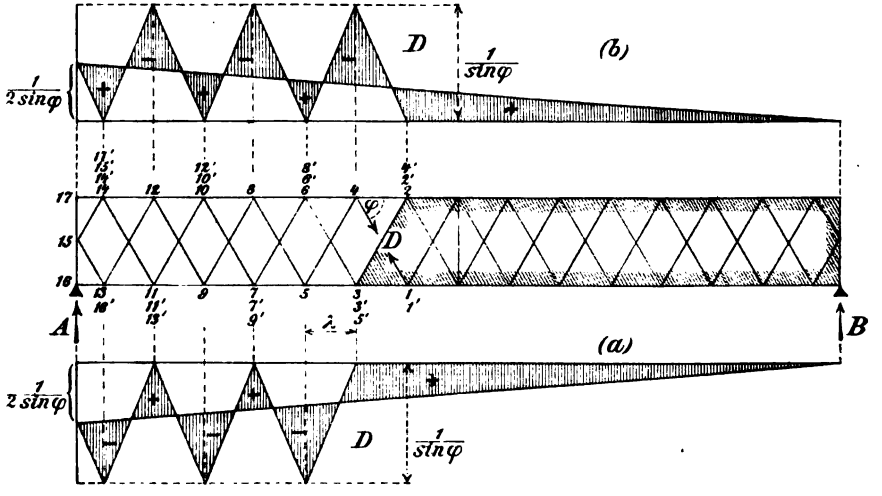


Fig. 504.

Digitized by Google

Den Knotenpunkten 9 und 7 entsprechen die Geschwindigkeiten 2λ; die Knotenpunkte 5, 3, 1 .... B bewegen sich nicht; es entsteht also die durch Schraffierung hervorgehobene Einflußfläche für U, welche sowohl für untenliegende als auch für obenliegende Fahrbahn gilt und deren Bildungsgesetz leicht zu übersehen ist.

223. Zweiteiliges Netzwerk mit Mittelständer Fig. 504 und 505. Die für D und O gezeichneten Einflußlinien (a gilt für untenliegende,

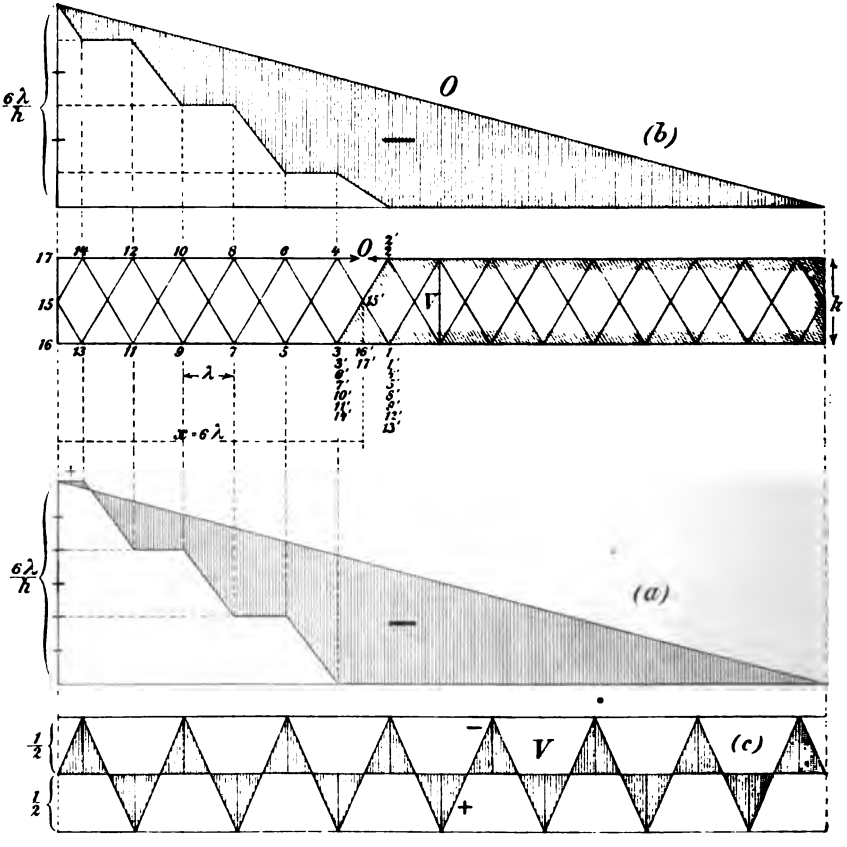


Fig. 505.

b für obenliegende Fahrbahn) dürften nach den vorstehenden Entwicklungen eine weitere Erklärung nicht mehr erfordern. Die Einflußlinie für V folgt aus dem in No. 220 (Fig. 500h) gefundenen allgemeinen Gesetze.

224. Fig. 506 zeigt ein zweiteiliges Fachwerk, das sich von dem soeben untersuchten im wesentlichen nur dadurch unterscheidet,

Digitized by Google

daß der Mittelständer durch einen wagerechten Stab CC_1 ersetzt worden ist. Außerdem wurden durch Einschaltung von Vertikalen in der belasteten Gurtung neue Knotenpunkte zur Stützung von Querträgern geschaffen. Die Ordinaten der Einflußlinien für die Spannkraft H im Stabe CC_1 sind gleich $\pm\lambda : h$; es hat diese Linie dieselbe Form wie die V-Linie des vorhin untersuchten Systems. In Fig. 506a ist ein Geschwindigkeitsplan für die durch Beseitigung des Stabes CC_1 gewonnene zwangläufige Kette gezeichnet worden. Den Punkten C und C_1 wurden die entgegengesetzt gleichen wagerechten Geschwindigkeiten OC' erteilt und in ihren wirklichen Richtungen aufgetragen, sodann wurde 5′ mittels $C'5' \perp C5$ und $C_1'5' \perp C_1 5$ bestimmt, hierauf (5)′ sodann 4′ u. s. w. Es fallen zusammen

mit (5)′ die Punkte 3′, (1)′ und 7′, (9)′
„ 5′ „ „ (3)′, 1′ „ (7)′, 9′
„ O „ „ 4′, 2′, 0′ „ 6′, 8′, 10′
„ C' der Punkt A'
„ C'_1 der Punkt B'.

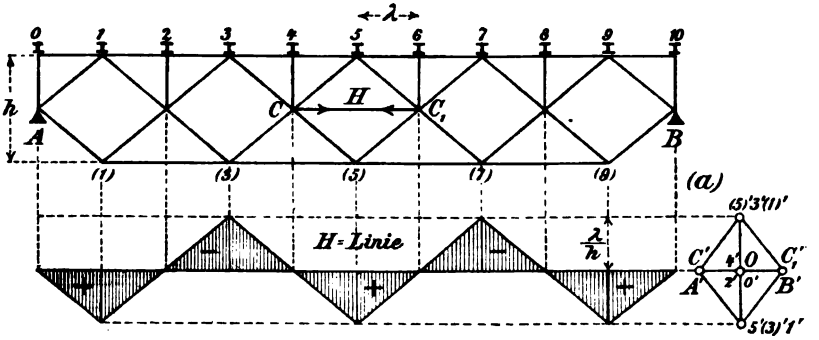


Fig. 506.

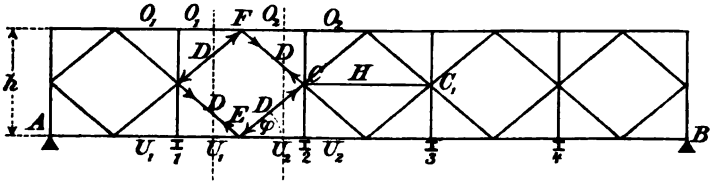


Fig. 507.

Lasten, welche in den Knotenpunkten 0, 2, 4, 6, 8, 10 angreifen, sind ohne Einfluß auf H.

Werden also nur in den Knotenpunkten der Vertikalen Querträger angeordnet (Fig. 507), so ist der Einfluß der Verkehrslast auf H gleich

Digitized by Google

Null. Auch das auf alle Knotenpunkte sich verteilende Eigengewicht erzeugt im Stabe CC_1 nur eine geringe Beanspruchung. Sehr einfach gestaltet sich bei dieser Anordnung die Berechnung der Spannkräfte in den Diagonalen und Gurtungen. Es ist nämlich immer zulässig, das Eigengewicht nur auf die Knotenpunkte 1, 2, 3 .... zu verteilen und die Knotenpunkte E und F unbelastet anzunehmen. Dann ergeben sich für die beiden in E angreifenden Diagonalen entgegengesetzt gleiche Spannkräfte und ebenso auch für die beiden in F sich treffenden. Da nun aber die Querkraft Q für alle zwischen den beiden Knotenpunkten 1 und 2 geführten Schnitte gleich groß ist, so erhält man für alle vier dem Felde 1—2 angehörigen Diagonalen denselben Wert D, so zwar, daß die linkssteigenden Diagonalen bei positivem Q, mit

$$D = \frac{1}{2}\,\frac{Q}{\sin\varphi}$$

auf *Zug* und die rechtssteigenden ebenso stark auf Druck beansprucht werden. Für die Gurtungen erhält man aus den Angriffsmomenten $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... die Spannkräfte

$$-O_1 = +U_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{h}$$

$$-O_2 = +U_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{h}$$

. . . . . .

Die unteren Hälften der Vertikalen werden durch die Knotenpunktslasten auf Zug beansprucht, die oberen Hälften erfahren nur unwesentliche Drücke und dienen hauptsächlich zur Unterstützung der Knickfestigkeit der oberen Gurtung. Der Vorzug dieses Trägers und des in Fig. 506 dargestellten besteht überhaupt in den kurzen Längen der auf Druck beanspruchten Stäbe.

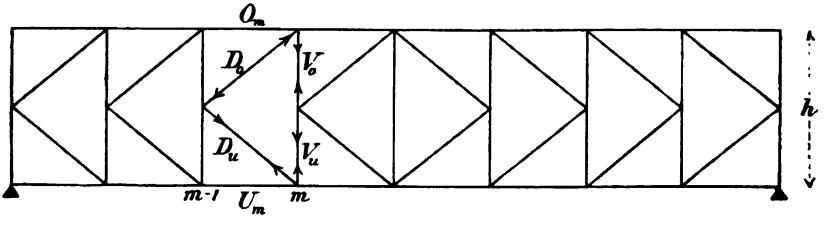


Fig. 508.

Eine verwandte Anordnung zeigt Fig. 508; sie ist in neuerer Zeit vielfach bei ebenen Windverstrebungen zur Ausführung gekommen und vom Verfasser schon seit Jahren in seinen Übungen im Entwerfen

Digitized by Google

eiserner Brücken empfohlen worden. Für die Spannkraft D gilt hier ebenfalls die Formel

$$(\text{Zug})\ D_u = +\frac{1}{2}\frac{Q_m}{\sin\varphi} = D_o\ (\text{Druck}).$$

In den Gurtungen entstehen die Spannkräfte

$$U_m = +\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{h};\quad O_m = -\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{h}.$$

In den Vertikalen entsteht

$$V_o = D_o \sin\varphi = \tfrac{1}{2} Q_m$$
$$V_u = P_m - D_u \sin\varphi = P_m - \tfrac{1}{2} Q_m.$$

225. Eine umfangreiche Anwendung mehrteiliger Fachwerke mit kurzen Stablängen zeigt das von mir im Jahre 1894 konstruierte, in Fig. 509 skizzierte **Baugerüst des Berliner Domes.** Es bestand aus Pfeilern, deren Stabwerk durch kräftigere Linien hervorgehoben wurde, und aus darauf ruhenden Sprengwerken. Die Stäbe s sollten nur den Anschluß leichter Maurer-Rüstungen und die Schaffung von Arbeitsböden ermöglichen. Seitenriß und Grundriß geben Auskunft über die Anordnung der Windverstrebungen. Das Gewicht der großen Schiebebühne mit Elektromotor, Winde, Katze und Drahtseil betrug 14 400 ^{kg}, die Nutzlast 15 000 ^{kg}. Der von einem Stiele aufzunehmende größte Druck (einschließlich der Wirkungen des Eigengewichts und eines Winddruckes von 100 ^{kg} f. d. qm) war rund $P = 25\,000^{kg}$. Die größte Geschoßhöhe war $h = 5{,}7^{m}$. Wären die einzelnen Felder des Pfeilers in der gewöhnlichen Weise durch zwei sich kreuzende Diagonalen versteift worden, so wäre nach der bekannten *Euler*schen Formel ein kleinstes Querschnitts-Trägheitsmoment

$$J_{min} = \frac{n P h^2}{\pi^2 E}$$

erforderlich gewesen, wo n den Sicherheitsgrad und E den Elastizitätsmodul bedeutet. Setzt man $\pi^2 E = 1\,000\,000\ ^{kg}/_{qcm}$ und wählt $n = 6$, so erhält man

$$J_{min} = \frac{6 \cdot 25\,000 \cdot 570^2}{1\,000\,000} = 48\,735\ cm^4.$$

Infolge der Halbierung der freien Längen der Stirnwand geht dieser Wert herab auf

$$J_{min} = \frac{48\,735}{4} = \text{rd. } 12\,200\ cm^4,$$

und es erwiesen sich daher zwei Hölzer von 13 ^{cm} × 18 ^{cm} Stärke mit

$$J_{min} = \frac{2 \cdot 13 \cdot 18^3}{12} = 12\,640\ cm^4$$

als vollkommen sicher.

Zur Schätzung der durch Halbierung der freien Längen erzielten Holzersparnis genügt folgende kurze Überschlagsrechnung. Sind l_1 und l_2 die Längen zweier gleich stark auf Knicken beanspruchten Stäbe, F_1 und F_2 die Inhalte, J_1 und J_2 die kleinsten Trägheitsmomente ihrer Querschnitte, und sind die beiden Querschnitte einander ähnlich, so verhält sich

$$F_1 : F_2 = \sqrt{J_1} : \sqrt{J_2} = l_1 : l_2,$$

und man findet daher für $l_1 = \frac{1}{2} l_2$ das Verhältnis $F_1 = \frac{1}{2} F_2$.

Digitized by Google

Der Materialverbrauch ist deshalb für die erste Anordnung nur halb so groß wie für die zweite. In Wirklichkeit ändert sich natürlich diese Zahl etwas, wegen der gebotenen Anpassung an die im Handel vorkommenden Holzstärken; dafür tritt aber noch der Umstand hinzu, daß sehr starke Hölzer — wie sie hier für eine freie Länge von 5,7^{m} erforderlich gewesen wären — teurer sind, wie solche mittlerer Abmessungen. Ich hebe noch hervor, daß bei der Domrüstung an einer

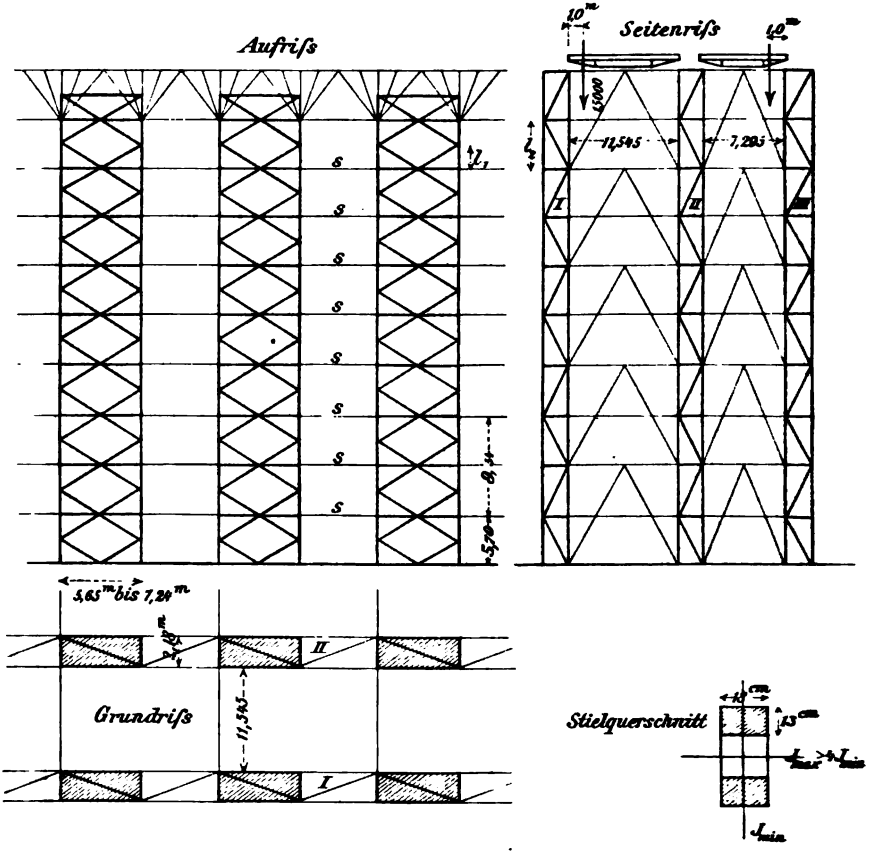


Fig. 509.

Stelle auch eine größere Spannweite mit *Howe*schen Trägern (d. h. Paralleltäger mit hölzernen Gurtungen, hölzernen gedrückten Diagonalen und eisernen gezogenen Vertikalen) überbrückt worden ist und schließe diese kurze Mitteilung mit dem Rate, große Baugerüste auch für Hochbauten stets nach den im Brückenbau geltenden Grundsätzen zu entwerfen. Ob man nun eine sogenannte Gerüstbrücke (wie die in Fig. 509 dargestellte) baut, oder ob man Träger mit größeren Spannweiten verwendet, muß von Fall zu Fall entschieden werden.

226. Unsymmetrisches zweiteiliges Netzwerk, Fahrbahn unten. Die Figuren 510 und 511 zeigen die Ermittelung der Einflußlinien

Digitized by Google

für D_1 und O_5. Das Fachwerk stimmt mit dem in Fig. 509 als Pfeiler verwendeten überein.

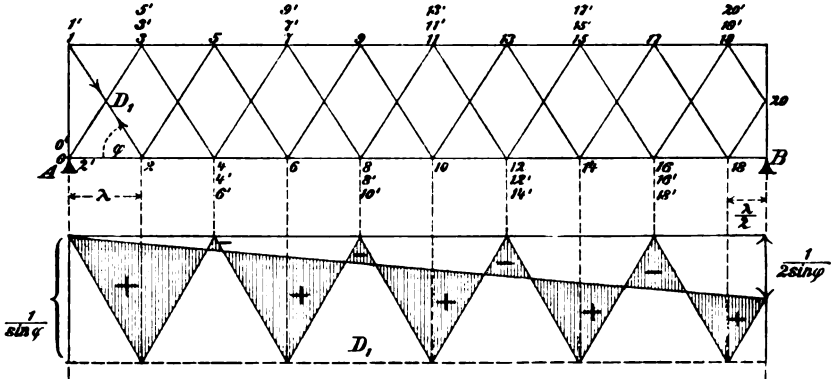


Fig. 510.

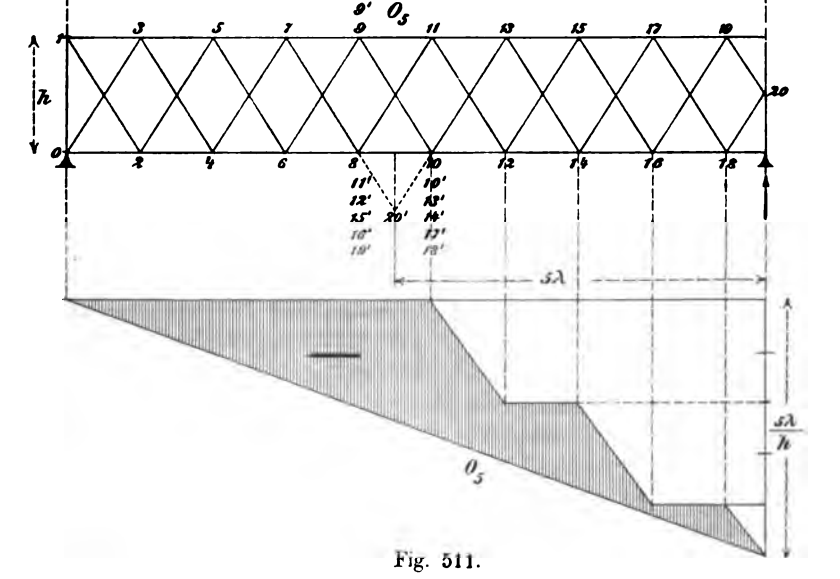


Fig. 511.

227. Unsymmetrisches vierteiliges Netzwerk. Fig. 512. Die Streben bilden einen zusammenhängenden Stabzug, der in einem Endknoten des linken Ständers beginnt und in dem anderen Endknoten

Digitized by Google

endigt; das Netzwerk ist statisch bestimmt (vergl. Seite 452). Der Träger besitzt 14 ganze und ein halbes Feld; seine Stützweite ist 29 m, seine Höhe 4 m. Wir beginnen mit der Ermittelung der Einflußlinie für $D_1 \sin\varphi$, lassen A' mit A zusammenfallen, $1'$ mit 1 und finden $2'$ mit 2 zusammenfallend, $3'$ mit 3, $4'$ mit 4 u. s. w., $8'$ mit 8.*) Nun wurde dem Punkte 9 der mit 8 zusammenfallende Geschwindigkeitspunkt $9'$, der in der Geraden 8 9 beliebig angenommen werden darf, zugewiesen und $10'$ mit 7 zusammenfallend gefunden, $11'$ mit 6 u. s. w., $16'$ mit 1. Punkt $17'$ fällt mit 17 zusammen, $18'$ mit 18 u. s. w. $23'$ mit 23, $24'$ mit 23, $25'$ mit 22 u. s. w. $31'$ mit A, $32'$ mit 1, B' mit 8. Den Knotenpunkten der unteren Gurtung, in denen alle Lasten (auch die ständigen) angreifen mögen, entsprechen abwechselnd die Geschwindigkeiten $c = \lambda$ und $c = 0$. Punkt A besitzt die Geschwindigkeit 0, Punkt B die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}\lambda$. Die Summe der Momente der in den Knotenpunkten 31 und 32 angreifenden Kräfte D_1 in Bezug auf die zugehörigen Geschwindigkeitspunkte $31'$ und $32'$ ist $-2 D_1 \lambda \sin\varphi$, und es ergibt sich daher für jede, in einem der Knotenpunkte (1), (3), (5), ...**) angreifende Last die Gleichung

$$-2 D_1 \lambda \sin\varphi + P\lambda - B\frac{\lambda}{2} = 0,$$

woraus

$$D_1 \sin\varphi = \tfrac{1}{2} P - \tfrac{1}{4} B.$$

Die Einflußlinie für $D_1 \sin\varphi$ zeigt Fig. 512b. Die Untersuchung der übrigen Spannkräfte D geschieht nun am kürzesten wie folgt.

Greifen nur in den Knotenpunkten der unteren Gurtung Lasten an, so ist der Knotenpunkt 32 nur dann im Gleichgewicht, wenn die beiden in 32 angreifenden Spannkräfte D entgegengesetzt gleich sind; wird also die linkssteigende Diagonale mit D_1 gezogen, so wird die rechtssteigende Diagonale mit D_1 gedrückt. Auf dieselbe Weise kann man nun durch Betrachtung des Gleichgewichts des Knotenpunktes 16 schließen, daß die Diagonale 16 — 15 ebenfalls mit D_1 gezogen wird. Wir setzen nun fest, daß *die Stabkraft D für eine linkssteigende Diagonale positiv angenommen wird, wenn sie Zugspannungen hervorbringt, für eine rechtssteigende Diagonale hingegen positiv, wenn sie Druckspannungen erzeugt.* Die Bezeichnung der Diagonalen ist aus der Fig. 512a zu ersehen; die Pfeile deuten an, in welchem Sinne die positiven Kräfte D an den Knoten der unteren Gurtung angreifen. Mit Ausnahme von D_2 kommt jede Spannkraft D zweimal vor. Greifen in den Knoten (1), (2), (3), ... der unteren Gurtung die Lasten P_1, P_2, P_3, . . . an, so muß sein:

*) In Fig. 512a sind die Knotenpunkte in der Reihenfolge nummeriert worden, in welcher die Geschwindigkeiten am zweckmäßigsten bestimmt werden.

**) So wollen wir die Angriffsstellen der Lasten fortan bezeichnen, siehe Fig. 512b.

Digitized by Google

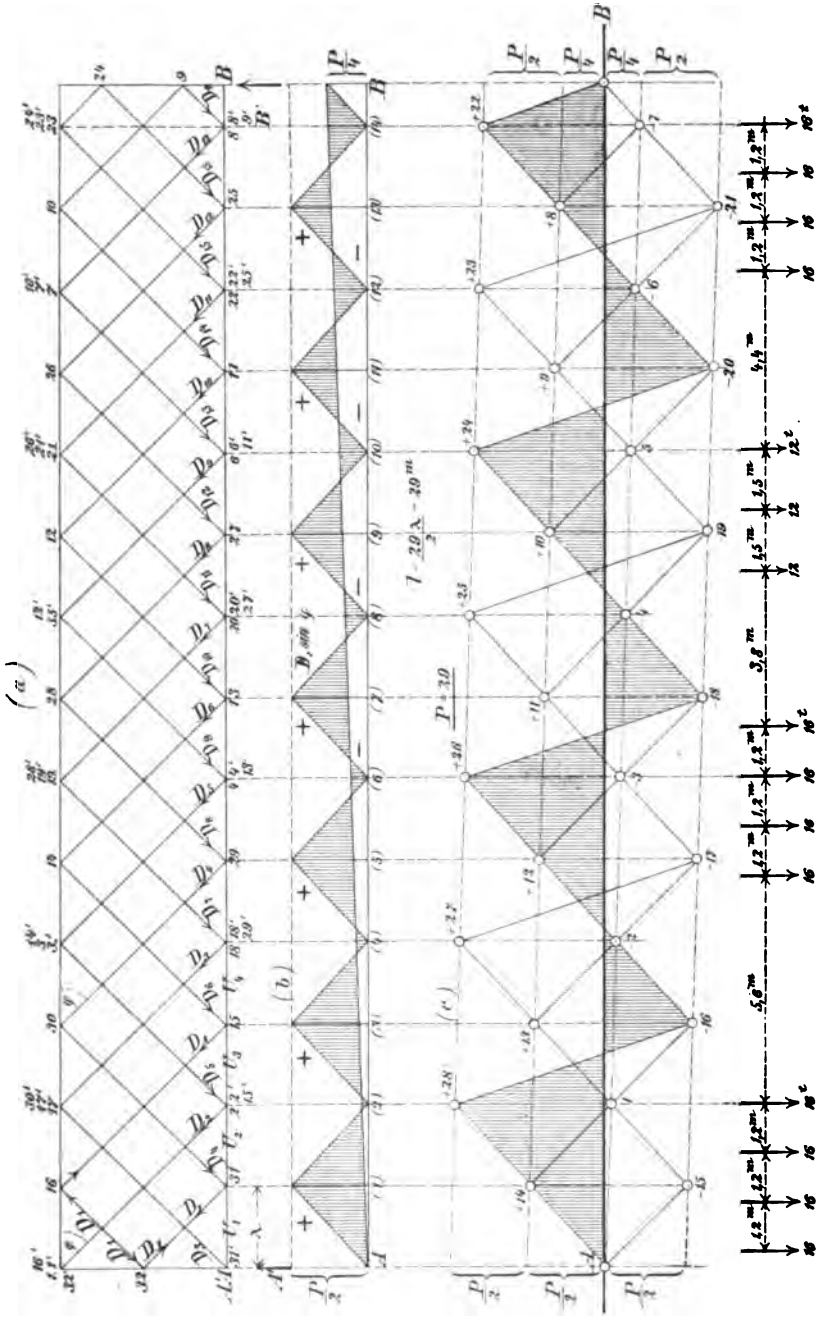


Fig. 512.

Digitized by Google

$$
\text{(I)}\quad
\begin{cases}
D_4 \sin\varphi = D_1 \sin\varphi - P_1, \\
D_8 \sin\varphi = D_4 \sin\varphi - P_5 \\
D_{12} \sin\varphi = D_8 \sin\varphi - P_9 \\
D_{15} \sin\varphi = D_{12} \sin\varphi - P_{13} \\
D_{11} \sin\varphi = D_{15} \sin\varphi + P_{12} \\
D_7 \sin\varphi = D_{11} \sin\varphi + P_8 \\
D_3 \sin\varphi = D_7 \sin\varphi + P_4 \\
D_6 \sin\varphi = D_1 \sin\varphi - P_3 \\
D_{10} \sin\varphi = D_6 \sin\varphi - P_7 \\
D_{14} \sin\varphi = D_{10} \sin\varphi - P_{11} \\
D_{13} \sin\varphi = D_{14} \sin\varphi + P_{14} \\
D_9 \sin\varphi = D_{13} \sin\varphi + P_{10} \\
D_5 \sin\varphi = D_9 \sin\varphi + P_6 \\
D_2 \sin\varphi = D_5 \sin\varphi + P_2.
\end{cases}
$$

Ist der Knotenpunkt (1) unbelastet, so ist $D_4 \sin\varphi = D_1 \sin\varphi$. Die Ordinaten für diese beiden Werte unterscheiden sich also nur an der Stelle (1) voneinander und zwar um die Lasteinheit P. Man kann also in der durch die vorstehenden Gleichungen bestimmten Reihenfolge aus der $D_1 \sin\varphi$-Linie schrittweise die Einflußlinien für $D_4 \sin\varphi$, $D_8 \sin\varphi$, ... folgern. Dabei empfiehlt es sich, um Bruchziffern zu vermeiden, die Rechnung für $P = 29$ $\left(\text{weil } l = 29\,\frac{\lambda}{2} \text{ ist}\right)$ durchzuführen. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden. Die Ordinate, in welcher eine Linie von der vorhergehenden Linie abweicht, wurde durch Unterstreichung hervorgehoben; man beachte, daß $D_6 \sin\varphi$ wieder aus $D_1 \sin\varphi$ gefolgert wird.

	Knotenpunkt													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$D_1 \sin\varphi$	+ 14	− 1	+ 13	− 2	+ 12	− 3	+ 11	− 4	+ 10	− 5	+ 9	− 6	+ 8	− 7
$D_4 \sin\varphi$	− 15	− 1	+ 13	− 2	+ 12	− 3	+ 11	− 4	+ 10	− 5	+ 9	− 6	+ 8	− 7
$D_8 \sin\varphi$	− 15	− 1	+ 13	− 2	− 17	− 3	+ 11	− 4	+ 10	− 5	+ 9	− 6	+ 8	− 7
$D_{12} \sin\varphi$	− 15	− 1	+ 13	− 2	− 17	− 3	+ 11	− 4	− 19	− 5	+ 9	− 6	+ 8	− 7
$D_{15} \sin\varphi$	− 15	− 1	+ 13	− 2	− 17	− 3	+ 11	− 4	− 19	− 5	+ 9	− 6	− 21	− 7
$D_{11} \sin\varphi$	− 15	− 1	+ 13	− 2	− 17	− 3	+ 11	− 4	− 19	− 5	+ 9	+ 23	− 21	− 7
$D_7 \sin\varphi$	− 15	− 1	+ 13	− 2	− 17	− 3	+ 11	+ 25	− 19	− 5	+ 9	+ 23	− 21	− 7
$D_3 \sin\varphi$	− 15	− 1	+ 13	+ 27	− 17	− 3	+ 11	+ 25	− 19	− 5	+ 9	+ 23	− 21	− 7
$D_6 \sin\varphi$	+ 14	− 1	− 16	− 2	+ 12	− 3	+ 11	− 4	+ 10	− 5	+ 9	− 6	+ 8	− 7
$D_{10} \sin\varphi$	+ 14	− 1	− 16	− 2	+ 12	− 3	− 18	− 4	+ 10	− 5	+ 9	− 6	+ 8	− 7
$D_{14} \sin\varphi$	+ 14	− 1	− 16	− 2	+ 12	− 3	− 18	− 4	+ 10	− 5	− 20	− 6	+ 8	− 7
$D_{13} \sin\varphi$	+ 14	− 1	− 16	− 2	+ 12	− 3	− 18	− 4	+ 10	− 5	− 20	− 6	+ 8	+ 22
$D_9 \sin\varphi$	+ 14	− 1	− 16	− 2	+ 12	− 3	− 18	− 4	+ 10	+ 24	− 20	− 6	+ 8	+ 22
$D_5 \sin\varphi$	+ 14	− 1	− 16	− 2	+ 12	+ 26	− 18	− 4	+ 10	+ 24	− 20	− 6	+ 8	+ 22
$D_2 \sin\varphi$	+ 14	+ 28	− 16	− 2	+ 12	+ 26	− 18	− 4	+ 10	+ 24	− 20	− 6	+ 8	+ 22

Digitized by Google

Fig. 512c enthält sämtliche $D \sin \varphi$-Linien; sie ist bestimmt durch 4 parallele Geraden; die Einflußfläche für die am stärksten beanspruchte Diagonale, d. i. D_2, ist durch Schraffierung hervorgehoben worden.

Aus den D-Linien findet man die U-Linien mit Hilfe der Gleichungen

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} U_1 = D_3 \cos \varphi \\ U_2 = U_1 + D_1 \cos \varphi + D_4 \cos \varphi \\ U_3 = U_2 + D_2 \cos \varphi + D_5 \cos \varphi \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Im vorliegenden Falle ist $\varphi = 45°$, also $\cos \varphi = \sin \varphi$. Sonst würde man an Stelle der U-Linien die $U \operatorname{tg} \varphi$-Linien bestimmen, damit man die Ordinaten der $D \sin \varphi$-Linien ohne weiteres benutzen kann. Führt man dann die ganze Rechnung für $P = 29$ aus, so hat man es mit einfachen Zahlenwerten zu tun. Ganz ebenso werden die $O \operatorname{tg} \varphi$-Linien ermittelt.

Handelt es sich um eine Eisenbahnbrücke, so wird man bei der Berechnung der größten Spannkräfte D die Radstände und gegenseitigen Abstände der Lokomotiven und Tender mit den Feldweiten tunlichst so in Einklang bringen, daß möglichst hohe D-Werte erzielt werden. Im vorliegenden Falle empfiehlt sich z. B. für die Berechnung von ${}_{max}D_{2p}$ die in Fig. 512 dargestellte Zuganordnung; sie liefert

$${}_{max}D_{2p} \sin \varphi = 101^t.$$

Die ständige Belastung sei $g = 1{,}6\,{}^t/_m$ Gleis, also $g\lambda = 3{,}2^t$ für einen Knotenpunkt. Die Summe der Ordinaten der Einflußlinie ist, für $P = 29$,

$$14 + 28 + 12 + 26 + 10 + 24 + 8 + \frac{3}{4}\,22^{*}) - (16 + 2 + 18 + 4 + 20 + 6) = 72{,}5;$$

folglich ergibt sich

$$D_{2g} \sin \varphi = 72{,}5\,\frac{3{,}2}{29} = 8{,}0^t.^{**})$$

Im ganzen entsteht also

$${}_{max}D_2 \sin \varphi = 109^t \text{ und } {}_{max}D_2 = 154^t.$$

Mit diesem Werte wollen wir die Spannkraft ${}_{max}D$ im 4^m langen Endfelde eines einteiligen Parallelträgers von 29^m Spannweite vergleichen. Es ergibt sich (Fig. 513) für einen Zug mit den früher festgesetzten Radständen

$$D_p \sin \varphi = A_p - \frac{16 \cdot 1{,}2}{4} = 102{,}2 - 4{,}8 = 97^t$$

$$D_g \sin \varphi = g x'' = 16 \cdot 12{,}5 = 20^t$$

$${}_{max}D \sin \varphi = 117^t \text{ und } D = 165^t.$$

*) Knotenpunkt 14 ist nur mit $\frac{3}{4}\,g\lambda$ belastet.

**) Werden sämtliche D_g gesucht, so berechne man einen Wert $D_g \sin \varphi$ mit Hilfe der Ordinaten der Einflußlinie, die übrigen aber mittels der Gleichungen I.

Digitized by Google

Die Diagonale D_2 des vierteiligen Fachwerks erfährt also im vorliegenden Falle nahezu dieselbe Beanspruchung wie die eines einteiligen Systems, ein Ergebnis, welches hinreicht, um den Träger in Fig. 512 als unvorteilhaft zu kennzeichnen. Ein weiterer, für die Ausführung sehr ins Gewicht fallender Nachteil dieses Fachwerks ist seine unsymmetrische Anordnung. Würde man nur in den Knotenpunkten (1), (3), (5) . . . Querträger anordnen, so würde D_2 wesentlich kleiner werden, weil dann die großen Ordinaten der D-Linie fortfallen.

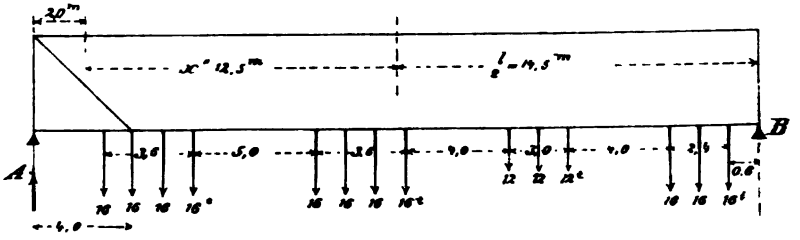


Fig. 513.

228. Symmetrisches vierteiliges Netzwerk mit einem halben Ständer in der Mitte. Fig. 514.*) Der Träger besitzt 14 ganze und 2 halbe Felder; seine Stützweite ist 30m, seine Höhe 4m. Die Fahrbahn liege an der unteren Gurtung. Wir beginnen mit der Darstellung der Einflußlinie für $D_2 \sin\varphi$, nehmen die schraffierte Scheibe ruhend an, weisen dem Knotenpunkte 1 den Punkt 1′ zu und bestimmen der Reihe nach zu den Punkten 2, 3, 4, 5, ... 33 die Punkte 2′, 3′, 4′, 5′, . . . 33′.

Die Lote von den Punkten 27′ und 32′ auf die in den Knoten 27 und 32 angreifenden Kräfte D_2 sind $2\lambda \sin\varphi$ und $\lambda \sin\varphi$. Punkt 33 besitzt die Geschwindigkeit $1{,}5\,\lambda$, Punkt 12 die Geschwindigkeit 2λ, Knoten 23 die Geschwindigkeit $c = 1{,}5\,\lambda$. Man erhält also für eine in 23 angreifende Last:

$$D_2\,(2\lambda \sin\varphi - \lambda \sin\varphi) + A\,1{,}5\,\lambda - B\,2{,}0\,\lambda - P\,1{,}5\,\lambda = 0$$

und hieraus

$$D_2 \sin\varphi = -1{,}5\,A + 2{,}0\,B + 1{,}5\,P.$$

Die Gerade $A''B''$ ist Einflußlinie für den Ausdruck $(-1{,}5\,A + 2{,}0\,B)$; trägt man von dieser Geraden aus auf den Senkrechten durch die Knotenpunkte der unteren Gurtung die entsprechenden $\frac{c}{\lambda}$

*) Man vergleiche die Untersuchung des in Fig. 429 dargestellten Trägers auf Seite 446 u. f. und bilde zur Übung die Determinante D. Auch empfiehlt sich Untersuchung des Falles eines von Gurtung zu Gurtung reichenden Mittelständers, der mit den ihn kreuzenden Diagonalen nicht verbunden ist.

Digitized by Google

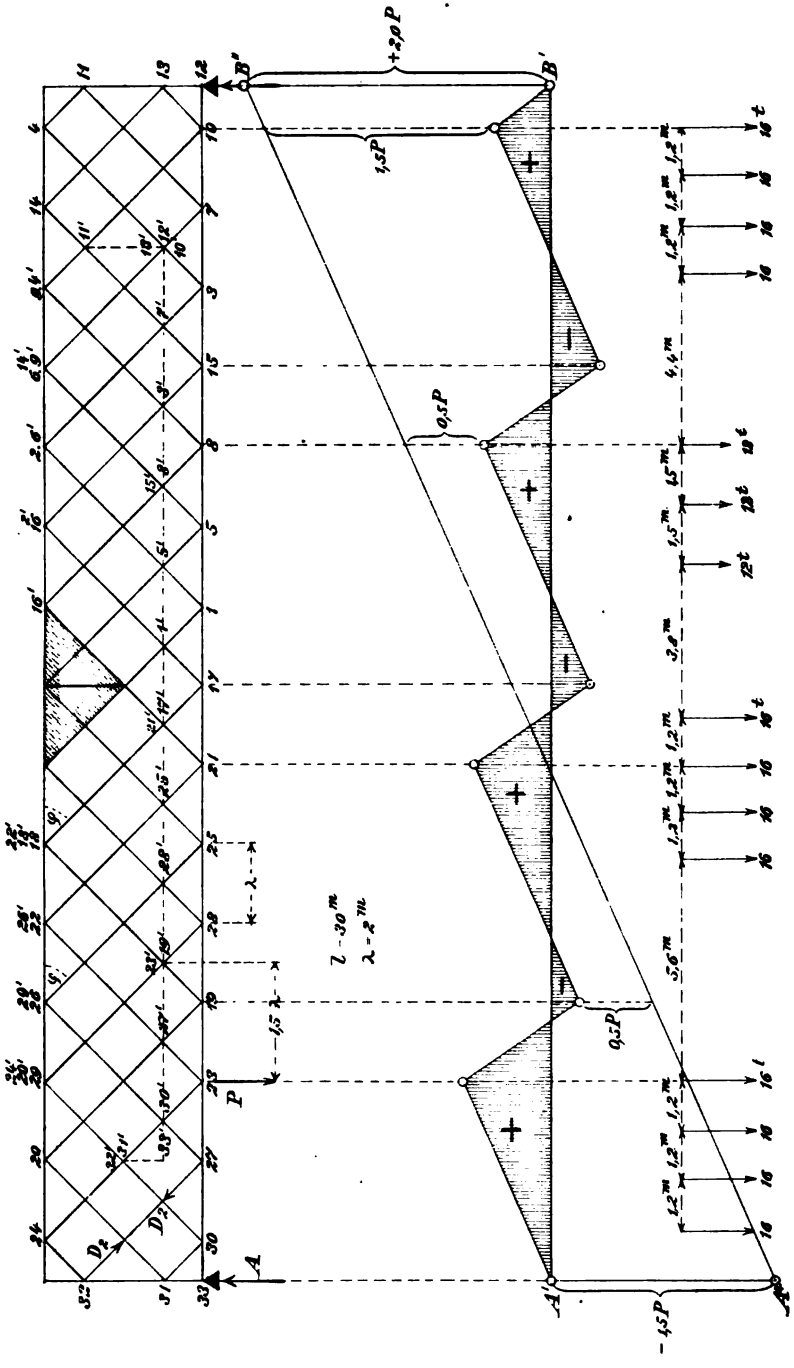


Fig. 514.

Digitized by Google

auf, so erhält man die $D_2 \sin\varphi$-Linie. Für die ersten drei Knotenpunkte ist $\frac{c}{\lambda} = +1{,}5$, für die nächsten drei $\frac{c}{\lambda} = +0{,}5$, für die folgenden $\frac{c}{\lambda} = -0{,}5$, für die letzten $\frac{c}{\lambda} = -1{,}5$.

Die dritte Zeile der Tabelle I auf Seite 524 enthält die Ordinaten der $D_2 \sin\varphi$-Linie für $P = 30$. Die Ordinaten der $D_1 \sin\varphi$-Linie ergeben sich aus der Gleichgewichtsbedingung, denen die am linken Endständer angreifenden Kräfte D genügen müssen, Fig. 515,

$$2\,D_1 \sin\varphi + 2\,D_2 \sin\varphi = A,$$

woraus

$$(D_1 + D_2)\sin\varphi = \tfrac{1}{2}A.$$

Die Ordinaten der Einflußlinie für $\frac{1}{2}A$ sind in der ersten Zeile der folgenden Tabelle angegeben. Nach Berechnung der $D_1 \sin\varphi$-Linie findet man die Ordinaten der übrigen $D \sin\varphi$-Linien der Reihe nach mit Hilfe der Gleichungen:*)

$$\begin{aligned}
D_3 \sin\varphi &= D_1 \sin\varphi - P_1\\
D_4 \sin\varphi &= D_2 \sin\varphi - P_2\\
D_5 \sin\varphi &= D_3 \sin\varphi - P_3\\
D_6 \sin\varphi &= D_1 \sin\varphi - P_4\\
D_7 \sin\varphi &= D_3 \sin\varphi - P_5\\
D_8 \sin\varphi &= D_4 \sin\varphi - P_6\\
D_9 \sin\varphi &= D_5 \sin\varphi - P_7.
\end{aligned}$$

Die Einflußlinien für $D'_8 \sin\varphi$ und $D_8 \sin\varphi$ sind Spiegelbilder. Die V-Linie ist bestimmt durch

$$V = D_8 \sin\varphi + D'_8 \sin\varphi;$$

sie besitzt, wie die V-Linie des in Fig. 505 dargestellten zweiteiligen Fachwerks, in den Knotenpunkten abwechselnd Ordinaten $+\frac{1}{2}P$ und $-\frac{1}{2}P$.

In Figur 515 sind alle D-Linien zusammengestellt worden; ihre Eckpunkte liegen in 6 parallelen Geraden. Die Einflußlinie für $D_7 \sin\varphi$ ist durch Schraffierung hervorgehoben worden.

Tabelle II auf Seite 524 enthält die Ordinaten sämtlicher U-Linien. Es ist

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = D_1 \cos\varphi + D_3 \cos\varphi = D_1 \sin\varphi + D_3 \sin\varphi \quad \text{weil } \varphi = 45°\text{**})$$

u. s. w.

---

*) Für die $\frac{\text{linkssteigenden}}{\text{rechtssteigenden}}$ Diagonalen der linken Trägerhälfte bedeutet ein $\frac{\text{positives}}{\text{negatives}}$ D einen Zug.

**) Ist dies nicht der Fall, so berechne man die Werte $U \operatorname{tg}\varphi$.

Digitized by Google

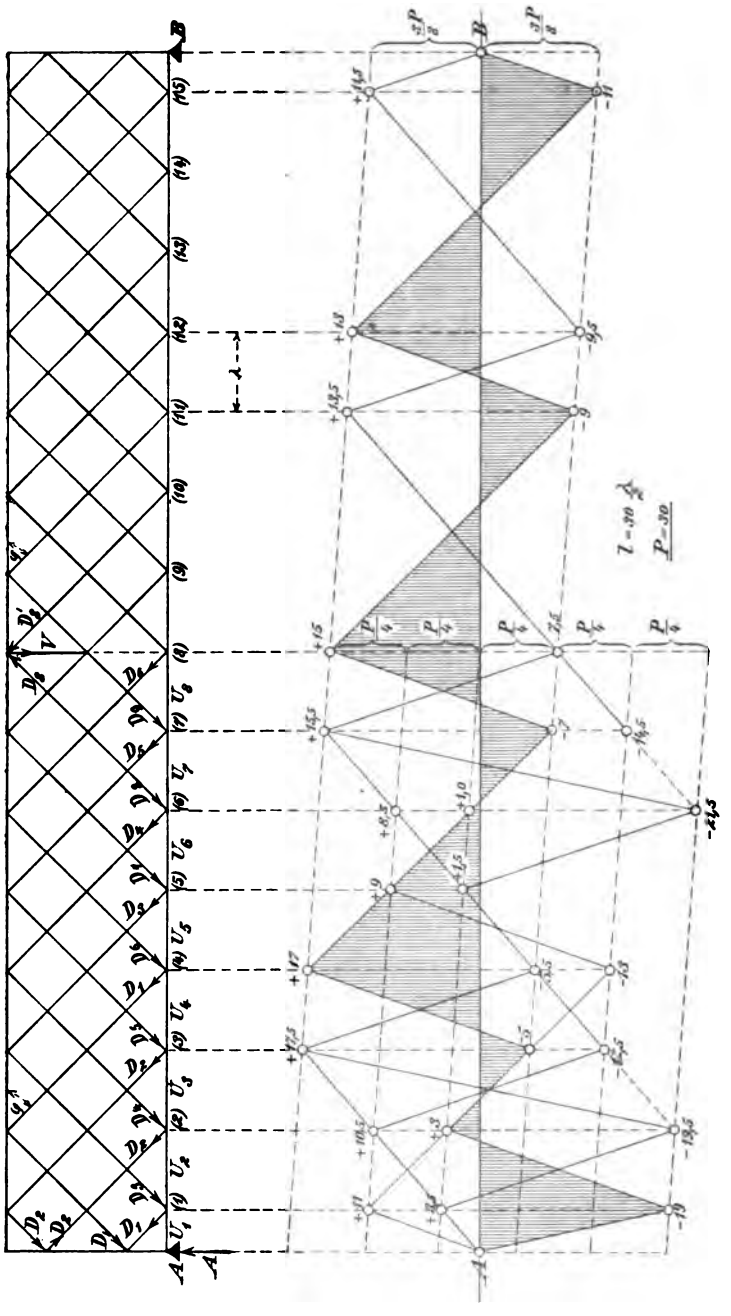


Fig. 515.

Digitized by Google

Tabelle I.

	Knotenpunkt														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\frac{1}{2}A$	14,5	13,5	12,5	11,5	10,5	9,5	8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5
$D_1 \sin\varphi$	+ 11	+ 3	− 5	+ 17	+ 9	+ 1	− 7	+ 15	+ 7	− 1	− 9	+ 13	+ 5	− 3	− 11
$D_2 \sin\varphi$	+ 3,5	+ 10,5	+ 17,5	− 5,5	+ 1,5	+ 8,5	+ 15,5	− 7,5	− 0,5	+ 6,5	+ 13,5	− 9,5	− 2,5	+ 4,5	+ 11,5
$D_3 \sin\varphi$	− 19	+ 3	− 5	+ 17	+ 9	+ 1	− 7	+ 15	+ 7	− 1	− 9	+ 13	+ 5	− 3	− 11
$D_4 \sin\varphi$	+ 3,5	− 19,5	+ 17,5	− 5,5	+ 1,5	+ 8,5	+ 15,5	− 7,5	− 0,5	+ 6,5	+ 13,5	− 9,5	− 2,5	+ 4,5	+ 11,5
$D_5 \sin\varphi$	+ 3,5	+ 10,5	− 12,5	− 5,5	+ 1,5	+ 8,5	+ 15,5	− 7,5	− 0,5	+ 6,5	+ 13,5	− 9,5	− 2,5	+ 4,5	+ 11,5
$D_6 \sin\varphi$	+ 11	+ 3	− 5	− 13	+ 9	+ 1	− 7	+ 15	+ 7	− 1	− 9	+ 13	+ 5	− 3	− 11
$D_7 \sin\varphi$	− 19	+ 3	− 5	+ 17	− 21	+ 1	− 7	+ 15	+ 7	− 1	− 9	+ 13	+ 5	− 3	− 11
$D_8 \sin\varphi$	+ 3,5	− 19,5	+ 17,5	− 5,5	+ 1,5	− 21,5	+ 15,5	− 7,5	− 0,5	+ 6,5	+ 13,5	− 9,5	− 2,5	+ 4,5	+ 11,5
$D_9 \sin\varphi$	+ 3,5	+ 10,5	− 12,5	− 5,5	+ 1,5	+ 8,5	− 14,5	− 7,5	− 0,5	+ 6,5	+ 13,5	− 9,5	− 2,5	+ 4,5	+ 11,5
$D_s \sin\varphi$	+ 11,5	+ 4,5	− 2,5	− 9,5	+ 13,5	+ 6,5	− 0,5	− 7,5	+ 15,5	− 21,5	+ 1,5	− 5,5	+ 17,5	− 19,5	+ 3,5
V	+ 15	− 15	+ 15	− 15	+ 15	− 15	+ 15	− 15	+ 15	− 15	+ 15	− 15	+ 15	− 15	+ 15

Tabelle II.

	Knotenpunkt														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$U_2 = D_1 \sin\alpha + D_8 \sin\alpha =$	− 8	+ 6	− 10	+ 34	+ 18	+ 2	− 14	+ 30	+ 14	− 2	− 18	+ 26	+ 10	− 6	− 22
$D_2 \sin\alpha + D_4 \sin\alpha =$	+ 7	− 9	+ 35	− 11	+ 8	+ 17	+ 31	− 15	− 1	+ 13	+ 27	− 19	− 5	+ 9	+ 23
$U_3 =$	− 1	− 3	+ 25	+ 23	+ 21	+ 19	+ 17	+ 15	+ 13	+ 11	+ 9	+ 7	+ 5	+ 3	+ 1
$D_2 \sin\alpha + D_5 \sin\alpha =$	+ 7	+ 21	+ 5	− 11	+ 3	+ 17	+ 31	− 15	− 1	+ 13	+ 27	− 19	− 5	+ 9	+ 23
$U_4 -$	+ 6	+ 18	+ 30	+ 12	+ 24	+ 36	+ 48	0	+ 12	+ 24	+ 36	− 12	0	+ 12	+ 24
$D_1 \sin\alpha + D_6 \sin\alpha =$	+ 22	+ 6	− 10	+ 4	+ 18	+ 2	− 14	+ 30	+ 14	− 2	− 18	+ 26	+ 10	− 6	− 22
$U_5 =$	+ 28	+ 24	+ 20	+ 16	+ 42	+ 38	+ 34	+ 30	+ 26	+ 22	+ 18	+ 14	+ 10	+ 6	+ 2
$D_3 \sin\alpha + D_7 \sin\alpha =$	− 38	+ 6	− 10	+ 34	− 12	+ 2	− 14	+ 30	+ 14	− 2	− 18	+ 26	+ 10	− 6	− 22
$U_6 =$	− 10	+ 30	+ 10	+ 50	+ 30	+ 40	+ 20	+ 60	+ 40	+ 20	0	+ 40	+ 20	0	− 20
$D_4 \sin\alpha + D_8 \sin\alpha =$	+ 7	− 39	+ 35	− 11	+ 3	− 18	+ 31	− 15	−1,0	+ 13	+ 27	− 19	− 5	+ 9	+ 23
$U_7 =$	− 3	− 9	+ 45	+ 39	+ 33	+ 27	+ 51	+ 45	+ 39	+ 33	+ 27	+ 21	+ 15	+ 9	+ 3
$D_5 \sin\alpha + D_9 \sin\alpha =$	+ 7	+ 21	− 25	− 11	+ 3	+ 17	+ 1	− 15	− 1	+ 13	+ 27	− 19	− 5	+ 9	+ 23
$U_8 =$	+ 4	+ 12	+ 20	+ 28	+ 36	+ 44	+ 52	+ 30	+ 38	+ 46	+ 54	+ 2	+ 10	+ 18	+ 26

Digitized by Google

Den größten Wert D erhielten wir für die Diagonale D_2. Die in Figur 514 angegebene Zugstellung erzeugt

$$_{max}D_{2p} = +\,64{,}7'.$$

Infolge der ständigen Belastung, welche für die Knoten (1) und (15) je $\frac{3g\lambda}{4}$ und für die übrigen $g\lambda$ beträgt, entsteht

$$D_{2g}\sin\varphi = \frac{g\lambda}{30}\left[\frac{3}{4}\cdot 3{,}5 + 10{,}5 + 17{,}5 + 1{,}5 + 8{,}5 + 15{,}5 + 6{,}5 + 13{,}5 + 4{,}5 + \frac{3}{4}\,11{,}5 - 5{,}5 - 7{,}5 - 0{,}5 - 9{,}5 - 2{,}5\right]$$

$$= g\lambda\cdot 2{,}125 = 1{,}6\cdot 2{,}0\cdot 2{,}125 = 6{,}8',$$

mithin im ganzen

$$_{max}D_2\sin\varphi = 64{,}7 + 6{,}8 = 71{,}5' \text{ und } D_2 = 101'.$$

c. Angenäherte Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke.

229. Allgemeines. Die Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke erfolgt in der Regel in der Weise, daß das t-teilige Fachwerk in t einteilige statisch bestimmte Fachwerke zerlegt und jedes Teil-

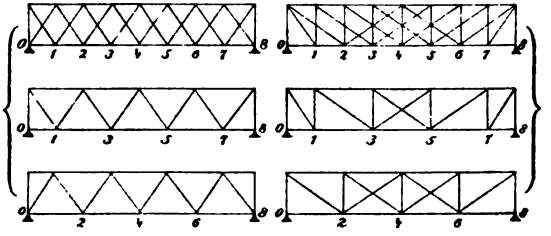


Fig. 516. Fig. 517.

system nur für die in seinen Knotenpunkten angreifenden Lasten berechnet wird. Gehört ein Knotenpunkt mehreren Teilsystemen an, so wird seine Belastung gleichmäßig auf diese Systeme verteilt. Sodann werden die Teilfachwerke wieder vereinigt und die Spannkräfte zusammenfallender Stäbe und Stababschnitte addiert. In den Figuren 516 und 517 sind die Zerlegungen eines zweiteiligen Strebenfachwerks und eines zweiteiligen Ständerfachwerks mit Gegendiagonalen dargestellt worden; es wird in beiden Fällen angenommen, daß auf das obere Teilsytsem nur die in den Knotenpunkten 1, 3, 5, 7 angreifenden Lasten von Einfluß sind, während die Belastungen der Punkte 2, 4, 6 lediglich von dem unteren Teilsystem auf die Auflager übertragen werden.

Digitized by Google

Auch die bislang ausgeführten mehrteiligen Netzwerke mit Diagonalenzügen, die von beliebigen Punkten der Endständer ausgehen, also nicht von Gurtung zu Gurtung führen, Fig. 518, sind nach dem Verfahren der Teilsysteme berechnet worden. Sie sind statisch unbestimmt, weil sie biegungsfeste Endständer, welche die Rolle starrer Scheiben spielen, besitzen. In Figur 518 ist die Zerlegung eines derartigen vierteiligen Systems angegeben worden; alle vier Teilsysteme

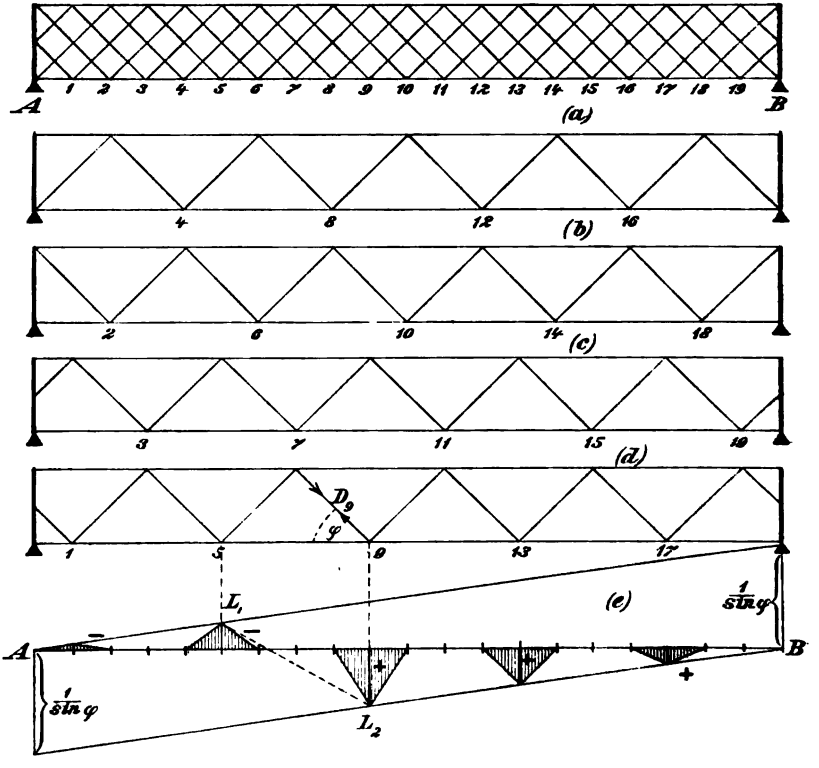


Fig. 518.

sind statisch bestimmt. Hat man die Spannkräfte der an den Endständern angreifenden Stäbe berechnet, so kann man für jeden Querschnitt des Endständers die Längskraft N, die Querkraft Q und das Angriffsmoment $\mathfrak{M}$ angeben und die im Querschnitte auftretenden Spannungen σ und τ (s. Abschnitt II) ermitteln. Statt biegungsfester Endständer kann man auch gegliederte Scheiben (Fig. 520 und 522) anordnen.

Digitized by Google

Fig. 518e zeigt die Einflußfläche für die Spannkraft D_9 in einer Diagonale für den Fall untenliegender Fahrbahn. Sie wird aus der Einflußfläche AL_1L_2B für die Diagonale eines einteiligen Parallelträgers mittels der (zuerst von *Fränkel* gemachten) Annahme gefolgert, daß nur die in den Knotenpunkten 1, 5, 9, 13, 17 angreifenden Lasten einen Einfluß auf D ausüben, während die übrigen Knotenlasten von den drei anderen Teilfachwerken aufgenommen werden.

Bei gebrochenen Gurtungen führt die Zerlegung in Teilsysteme zu Gurtstäben, die einen oder mehrere Knicke aufweisen und durch gerade Stäbe ersetzt werden müssen. So werden z. B. in Fig. 519 bei

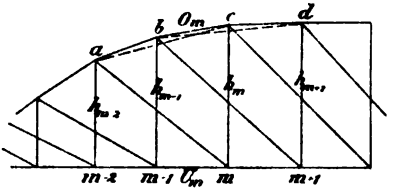


Fig. 519.

Betrachtung der beiden Teilfachwerke behufs Berechnung der Füllungsstäbe an Stelle der Gurtungen abc und bcd die Stäbe ac und bd eingeführt. Die Spannkräfte O und U drückt man hingegen zweckmäßiger wie folgt durch die für die ungeteilte Belastung berechneten größten Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ aus. Man setze für den Stab bc als Glied des Teilfachwerks bd $(m+1)$

$$O_m = -\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{M}_{m+1}}{h_{m+1}}\sec\beta_m$$

und für denselben Stab als Glied des Teilfachwerks acm

$$O_m = -\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{M}_m}{h_m}\sec\beta_m$$

im ganzen also

$$O_m = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{M}_m}{h_m}+\frac{\mathfrak{M}_{m+1}}{h_{m+1}}\right)\sec\beta_m,$$

und hierin verstehe man unter β_m den Neigungswinkel des Stabes bc. Ganz ebenso findet man für den wagerechten Stab U_m

$$U_m = +\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}}+\frac{\mathfrak{M}_{m-2}}{h_{m-2}}\right).$$

Eine genauere Berechnung der statisch unbestimmten Fachwerke enthält der zweite Band dieses Buches; mit ihren Ergebnissen stimmen die auf Grund der Zerlegung in einfache Fachwerke gefundenen Spannkräfte in vielen Fällen ganz gut überein. Dies gilt besonders von den

Digitized by Google

für die Praxis besonders wichtigen mehrteiligen Parallelträgern. Bei gebrochenen Gurtungen weichen dagegen die genauen Werte der Spannkräfte in den Füllungsstäben von den Ergebnissen des Verfahrens der Zerlegung oft so erheblich ab, daß dem einer schärferen Untersuchung nicht gewachsenen Ingenieur nur geraten werden kann, von derartigen Fachwerken Abstand zu nehmen.

Wir wollen nun die Darstellung der Einflußlinien nach dem Verfahren der Zerlegung in einteilige Fachwerke an einem Zahlenbeispiele erläutern.

230. Vierteiliges Netzwerk von 30 m Spannweite mit steifen Endscheiben. Fig. 520. Fahrbahn unten.

1. Diagonalen. Hinsichtlich der Vorzeichen setzen wir wieder fest, daß ein positives D für eine linkssteigende Diagonale einen Zug, für eine rechtssteigende Diagonale einen Druck bedeutet.

Fig. 520a zeigt die Einflußlinie für D_3. Der Strebenzug, dem D_3 angehört, ist kräftig ausgezogen worden; er enthält die Knotenpunkte 3, 7, 11, 15 der belasteten Gurtung. Die Knotenpunkte 1 und 15 gehören eigentlich jedem der vier Teilsysteme an, da diese 4 Systeme ohne die starren Endscheiben beweglich wären; wir wollen aber, der Einfachheit wegen, den Knotenpunkt 15 nur zu dem Teilsystem rechnen, welchem D_3 angehört und den Knotenpunkt 1 nur zu dem Systeme, welches die Diagonale D_5 enthält. Die Einflüsse der Belastungen dieser beiden Knotenpunkte sind unwesentlich. In Fig. 520a ist ferner der Lastenzug angegeben worden, welcher möglichst große Werte D erzeugt. Man erkennt, daß dreiachsige Lokomotiven im vorliegenden Falle größere Spannkräfte erzeugen als vierachsige. Bezeichnet η die Höhe eines der Dreiecke, aus denen die Einflußfläche besteht, so ist der Einfluß einer Lokomotive

$$\text{(I)} \quad D = 16\,\eta\left(1 + 2\,\frac{0{,}8}{2{,}0}\right) = 28{,}8\,\eta$$

und der eines Tenders

$$\text{(II)} \quad D = 12\,\eta\,\frac{2 \cdot 1{,}05 + 0{,}8}{2{,}0} = 17{,}4\,\eta.$$

Berechnen wir den unwesentlichen Einfluß der Belastung des Knotenpunktes 15 der Kürze wegen ebenfalls mittels Formel (I), so erhalten wir für D_3 den Wert

$$_{max}D_{3p} = \left(\frac{25}{30}\cdot\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{17}{30}\cdot\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\right)28{,}8 + \frac{9}{30}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\cdot 17{,}4, \quad \text{d. i.}$$

$$_{max}D_{3p} = 1{,}36\,(25 + 17 + 1) + 0{,}82 \cdot 9 = 65{,}9'.$$

Digitized by Google

In der folgenden Tabelle sind die Ordinaten aller D-Linien (und in der ersten und letzten Zeile auch die der A-Linie und B-Linie)

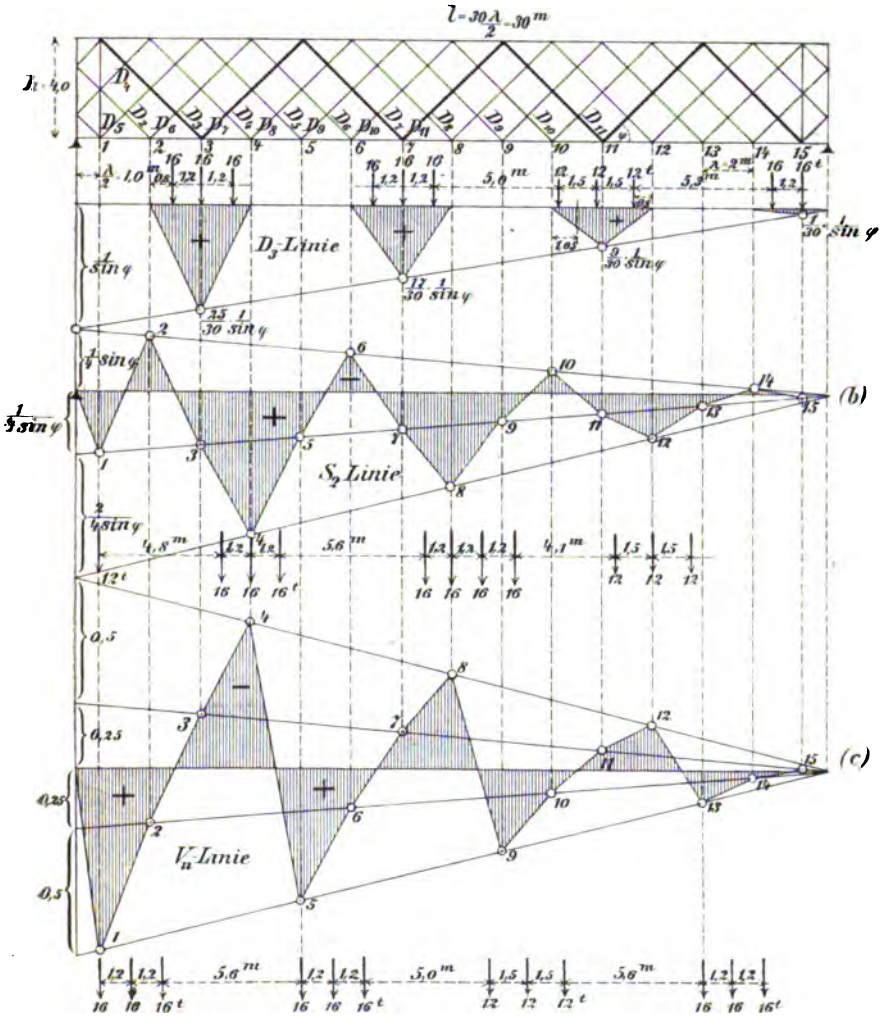


Fig. 520.

für $P = 30$ zusammengestellt worden. Die Zahlen für die mit Lokomotiven belasteten Knotenpunkte wurden durch Unterstreichung hervorgehoben.

Digitized by Google

Knotenpunkt	Knotenpunkt														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	29	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1
$D_2 \sin\varphi$		27				19				11				3	
$D_3 \sin\varphi$			25				17				9				1
$D_4 \sin\varphi$				23				15				7			
$D_5 \sin\varphi$	−1				21				13				5		
$D_6 \sin\varphi$		−3				19				11				3	
$D_7 \sin\varphi$			−5				17				9				1
$D_8 \sin\varphi$				−7				15				7			
$D_9 \sin\varphi$	−1				−9				13				5		
$D_{10} \sin\varphi$		−3				−11				11				3	
$D_{11} \sin\varphi$			−5				−13				9				1
B	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29

Aus diesen Zahlen folgt:

$$
\begin{aligned}
{}_{max}D_{2p} &= 1{,}36\,(27+19+3) + 0{,}82\cdot 11 = 75{,}66'\\
{}_{\prime\prime}\,D_{3p} &= 1{,}36\,(25+17+1) + 0{,}82\cdot\ 9 = 65{,}86\\
{}_{\prime\prime}\,D_{4p} &= 1{,}36\,(23+15) + 0{,}82\cdot\ 7 = 57{,}42\\
{}_{\prime\prime}\,D_{5p} &= 1{,}36\,(21+13) + 0{,}82\cdot\ 5 = 50{,}34\\
{}_{\prime\prime}\,D_{6p} &= 1{,}36\,(19+\ 3) + 0{,}82\cdot 11 = 38{,}94\\
{}_{\prime\prime}\,D_{7p} &= 1{,}36\,(17+\ 1) + 0{,}82\cdot\ 9 = 31{,}86\\
{}_{\prime\prime}\,D_{8p} &= 1{,}36\cdot 15 + 0{,}82\cdot\ 7 = 26{,}14\\
{}_{\prime\prime}\,D_{9p} &= 1{,}36\cdot 13 + 0{,}82\cdot\ 5 = 21{,}78\\
{}_{\prime\prime}\,D_{10p} &= 1{,}36\cdot 11 + 0{,}82\cdot\ 3 = 17{,}42\\
{}_{\prime\prime}\,D_{11p} &= 1{,}36\cdot\ 9 + 0{,}82\cdot\ 1 = 13{,}06.
\end{aligned}
$$

Infolge der ständigen Belastung $g = 1{,}6\,t/m$ entsteht

$$D_{2g} = \frac{1}{30}\left(27+19+11+3\right)\frac{g\lambda}{\sin\varphi}$$

$$= \frac{1}{30}\left(27+19+11+3\right)4{,}52 = 9{,}04'$$

$$D_{3g} = \frac{1}{30}\left(25+17+\ 9+\frac{3}{4}\right)4{,}52 = 7{,}80'^{*})$$

$$D_{4g} = \frac{1}{30}\left(23+15+7\right)4{,}52 = 6{,}78'$$

$$D_{5g} = \frac{1}{30}\left(21+13+\ 5-\frac{3}{4}\right)4{,}52 = 5{,}76'^{*})$$

$$D_{6g} = D_{2g} - \frac{g\lambda}{\sin\varphi} = D_{2g} - 4{,}52$$

*) Die Knotenpunkte 1 und 15 sind nur mit je $\frac{3}{4}\,g\lambda$ belastet.

Digitized by Google

$D_{6g} = 9{,}04 - 4{,}52 = 4{,}52'$ | $D_{9g} = 5{,}76 - 4{,}52 = 1{,}25'$
$D_{7g} = 7{,}80 - 4{,}52 = 3{,}28'$ | $D_{10g} = 4{,}52 - 4{,}52 = 0$
$D_{8g} = 6{,}78 - 4{,}52 = 2{,}26'$ | $D_{11g} = 3{,}28 - 4{,}52 = -1{,}24'$

Im ganzen erhält man also infolge Verkehrslast und Eigengewicht für ${}_{max}D_2$ bis ${}_{max}D_{11}$ der Reihe nach die Werte:

$${}_{max}D = 85', 74', 64', 56', 43', 35', 28', 23', 17', 12'.$$

Auf dieselbe Weise findet man für ${}_{min}D = {}_{min}D_p + D_g$ die Werte

${}_{min}D = 9'^*), 8'^*), 7'^*), 4', 0', -4', -7', -12', -17', -23'.$

Um nun die Spannkräfte in den Stäben der linken Endscheibe zu berechnen, betrachten wir den in Fig. 521 dargestellten Belastungszustand dieser Scheibe. Mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen

$$S_1 + S_2 = \frac{A^{**})}{2\sin\varphi}$$
$$S_1 - S_2 = D_2 - D_4,$$

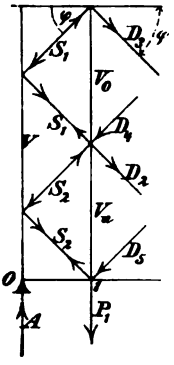


Fig. 521.

aus denen folgt:

$$S_1 = \frac{A}{4\sin\varphi} + \frac{D_2 - D_4}{2}$$
$$S_2 = \frac{A}{4\sin\varphi} - \frac{D_2 - D_4}{2}.$$

Da nun

$$A = P_1 + (D_3 + D_4 + D_2 + D_5)\sin\varphi$$

sein muß, so erhält man schließlich die Formeln

$$S_1 = \frac{P_1}{4\sin\varphi} + \frac{1}{4}[D_3 - D_4 + 3D_2 + D_5]$$
$$S_2 = \frac{P_1}{4\sin\varphi} + \frac{1}{4}[D_3 + 3D_4 - D_2 + D_5],$$

welche die Herleitung der Einflußlinien für S_1 und S_2 aus den D-Linien ermöglichen. Fig. 520b zeigt die S_2-Linie, deren Konstruktion einer weiteren Erläuterung wohl nicht bedarf. Man braucht nur die Strebenzüge, denen die Diagonalen D_3, D_4, D_2 und D_5 angehören, zu verfolgen und festzustellen, welche Knotenpunkte der unteren Gurtung in ihnen liegen.

*) Die ersten drei Werte sind nur von g abhängig.

**) A bedeutet den um die Belastung des Knotenpunktes 0 verminderten Stützenwiderstand.

Digitized by Google

Nach Berechnung von S_1 findet man

$$V = +2 S_1 \sin\varphi \text{ (als Druck positiv)},$$

während die in der üblichen Weise als Zugkräfte positiv angenommenen Stabkräfte V_o und V_u den Gleichgewichtsbedingungen genügen müssen

$$V_o = S_1 \sin\varphi - D_3 \sin\varphi$$
$$V_u = P_1 - S_2 \sin\varphi + D_5 \sin\varphi.$$

Man findet

$$V_o = \frac{1}{4} P_1 + \frac{1}{4} [3 D_2 - 3 D_3 - D_4 + D_5] \sin\varphi$$

$$V_u = \frac{3}{4} P_1 + \frac{1}{4} [D_2 - D_3 - 3 D_4 + 3 D_5] \sin\varphi.$$

Die Einflußlinie für V_u ist in Figur 520c dargestellt worden. Man erhält für die in den Figuren 520b und 520c gezeichneten Laststellungen

$$_{max}S_{2p} = 59' \text{ und } _{max}V_{up} = 44'.$$

Den Einfluß des Eigengewichts berechnet man mit Hilfe der Formeln

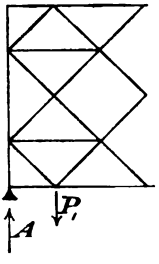


Fig. 522.

$$S_{2g} = \frac{A_g}{4\sin\varphi} - \frac{D_{0g} - D_{4g}}{2}$$
$$= \frac{1}{4\sin\varphi}\left(\frac{gl}{2} - \frac{g\lambda}{4}\right) - \frac{1}{2}(D_{2g} - D_{4g}) = 7{,}07'$$
$$V_{ug} = P_{1g} - (S_{2g} - D_{5g}) \sin\varphi$$
$$= \frac{3}{4} g\lambda - (S_{2g} - D_{5g}) \sin\varphi = 1{,}01'.$$

Im ganzen entsteht also $_{max}S_2 = 66'$ und $_{max}V_u = 45'$.

Wir empfehlen dem Leser, in gleicher Weise auch die Spannkräfte der in der Fig. 522 dargestellten Anordnung der Endscheibe zu untersuchen und wenden uns jetzt zu den Gurtstäben. Wir beschränken uns darauf, die Konstruktion der Einflußlinie für U_8 zu beschreiben.

Zunächst fassen wir U_8 als Stab des in der Figur 523 kräftig ausgezogenen Teilsystems auf, dem die unteren Knotenpunkte 1, 5. 9 und 13 angehören. Es folgt dann aus dem Momente $M_{(7)}$ in Bezug auf den oberen Knotenpunkt (7) für U_8 der Wert

$$U = + \frac{M_{(7)}}{h};$$

Digitized by Google

die Punkte 1′, 5′, 9′, 13′ der Einflußlinie gehören also dem Linienzuge $A'(7)'B'$ an, der durch $A'J_7 = 1\,\frac{x_7}{h} = 6{,}5\,\frac{\lambda}{h}$ bestimmt ist.

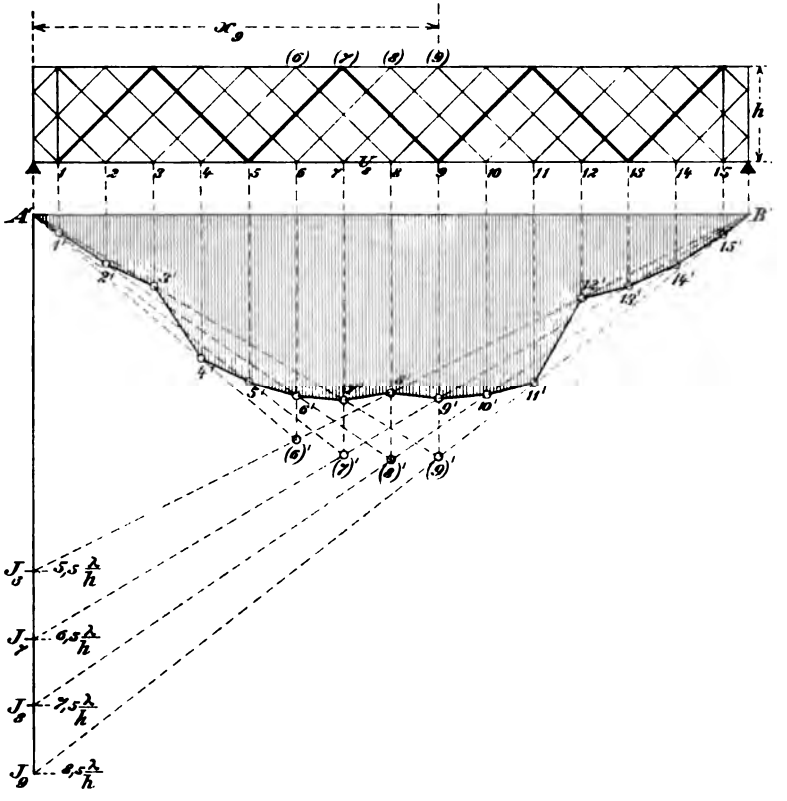


Fig. 523.

Und ganz ebenso läßt sich folgern:

Die Punkte 2′, 6′, 10′, 14′ liegen auf dem Linienzuge $A'(8)'B'$
„ „ 3′, 7′, 11′, 15′ „ „ „ „ $A'(9)'B'$
„ „ 4′, 8′, 12′ „ „ „ „ $A'(6)'B'$.

Durch diese Angaben ist die Einflußlinie für U_8 bestimmt.

Anmerkung. Zu einer eingehenden Untersuchung mehrteiliger Strebenfachwerke wurde ich bereits in den Jahren 1894 und 1895 gelegentlich einer im dienstlichen Auftrage ausgeführten Prüfung von Entwürfen für zerlegbare eiserne

Digitized by Google

Brücken veranlaßt. Es stellte sich bei dieser Untersuchung heraus, daß es vor allen Dingen darauf ankommt, geringe Spannkräfte in den Diagonalen zu erhalten, damit die Durchmesser der auf Biegung beanspruchten Gelenkbolzen möglichst klein ausfallen. Ein *vier*teiliges Fachwerk, wie das in No. 227 behandelte, in welchem sich in einer Diagonale eine Spannkraft entwickeln kann, die beinahe ebenso groß ist wie bei einem *ein*teiligen System, ist für zerlegbare Brücken natürlich ganz ungeeignet, taugt aber auch sonst nicht als Brückenträger. Schon der Umstand, daß dieses Fachwerk unsymmetrisch ist, spricht gegen seine Verwendung. Die vorgeführten Aufgaben beweisen, daß man mit symmetrischen Anordnungen bessere statische Ergebnisse erzielen kann und dann noch den Vorteil zweier gleichartigen Trägerhälften gewinnt. Aus gleichen Gründen verdient auch das Fachwerk in Fig. 504 den Vorzug vor dem Fachwerk in Fig. 510. Die kleinsten Strebenkräfte erhielt ich für statisch unbestimmte mehrteilige Fachwerke mit steifen Endscheiben; sie wurden sowohl nach dem genäherten als auch nach dem in Band II mitgeteilten genaueren Verfahren berechnet. Auch das Fachwerk mit steifen Endscheiben und Mittelvertikale (Vereinigung der in den Figuren 520 und 514 dargestellten Anordnungen) erwies sich als vorteilhaft und leicht zu berechnen.

Die Warnung vor dem in No. 227 untersuchten Fachwerk spreche ich hier hauptsächlich deshalb aus, weil in einem Aufsatze über „*Statisch bestimmte mehrteilige* Wandgliederung der Gitterträger“*) von Prof. Mehrtens gerade für diese Anordnung — allerdings ohne Durchführung einer eingehenderen Untersuchung — eingetreten wird. Herr Mehrtens nennt ein Strebenfachwerk, „*das einen einzigen in sich geschlossenen Stabzug bildet, der von einem Ständer-Eckknoten ausgeht und in einem anderen Ständer-Eckknoten endigt*“, ein *endloses Netzwerk* — eine Benennung, die mir, beiläufig bemerkt, wenig passend erscheinen will, für einen Stabzug, von dem doch ausdrücklich behauptet wird, daß ein mit dem Anfangspunkte nicht zusammenfallender *Endpunkt* vorhanden ist; er weist (in der Literatur wohl zum ersten Male) darauf hin, daß diese Fachwerke statisch bestimmt sind, beschreibt auch ein einfaches rechnerisches Verfahren zur Ermittelung der Einflußlinien für die Strebenkräfte und beendet dann seine Abhandlung mit dem Satze: „Vergleicht man schließlich die gebräuchlichen mehrteiligen Netzwerke mit den erörterten endlosen statisch bestimmten Netzwerken, so finden sich die mehr als zweiteiligen unbestimmten Anordnungen insofern im Nachteil, als sie stets $(t-2)\frac{1}{2}$**) Viereckzüge***) enthalten, die beweglich sind und für die Lastübertragung nicht taugen. Dagegen verteilen die statisch bestimmten mehrteiligen Netzwerke alle Lasten gleichmäßig über das gesamte Stabwerk der Wand, der Gurte und der Ständer.“

Alle in diesem Satze aufgestellten Behauptungen sind unrichtig. Herr Mehrtens übersieht, daß die *gebräuchlichen* mehrteiligen Netzwerke steife Endständer besitzen. Zweitens haben wir in Fig. 442 (Seite 453) ein mehrteiliges Fachwerk ohne steifen Endständer kennen gelernt, welches statisch unbestimmt ist und trotzdem keinen „beweglichen Viereckzug“ besitzt. Ganz unverständlich

*) Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, Wochen-Ausgabe, 1898, Seite 329.

**) t ist die Teilungsziffer.

***) So nennt Herr Mehrtens die geschlossenen Stabzüge, wie 0123 . . 8 in Fig. 441, Seite 453.

Digitized by Google

ist aber der Schluß des beanstandeten Satzes; denn wie hat man sich die ***gleichmäßige*** Verteilung einer Last über ***sämtliche*** Stäbe des Systems vorzustellen? Oder soll das etwa heißen, es sei zulässig, für einen senkrecht durch den Balken geführten Schnitt die Querkraft zu bilden und gleichmäßig über die vom Schnitte getroffenen Diagonalen zu verteilen? — ein Verfahren, das bei mehrteiligen Netzwerken mit steifen Endständern öfters benutzt wird, das aber bei einem Netzwerk der hier besprochenen Art (Endständer mit Gelenken in jedem Knotenpunkte) zu ganz unrichtigen Ergebnissen führen kann. Das beweist die in No. 227 durchgeführte Berechnung der Spannkraft D_2, welche nicht $D_2 = \frac{Q}{4 \sin \varphi}$, sondern beinahe $D_2 = \frac{Q}{\sin \varphi}$ lieferte.

Im zweiten Bande ist die in Nr. 227 durchgeführte statische Untersuchung durch die Darstellung der Formänderungen des fraglichen Fachwerks ergänzt worden. Das Ergebnis ist für das ***Mehrtens***sche System außerordentlich ungünstig und beweist, wie voreilig es ist, neue Trägerarten ohne eingehende wissenschaftliche Untersuchung und konstruktive Durcharbeitung zu empfehlen.

§ 54.

Balkenbrücken von großer Spannweite.

231. Bei weitgespannten Balkenbrücken kommt man mit den in den Abschnitten IX und X untersuchten einfachen Dreiecksystemen nicht aus. Auch mehrteilige Fachwerke sind konstruktiver Schwierigkeiten wegen nicht zu empfehlen. Zweckmäßiger sind die in den Figuren 524 und 525 dargestellten Tragwerke.

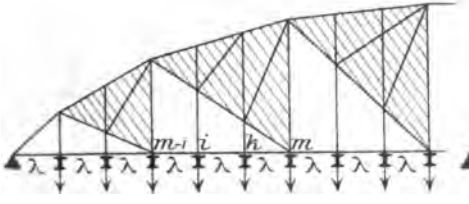


Fig. 524.

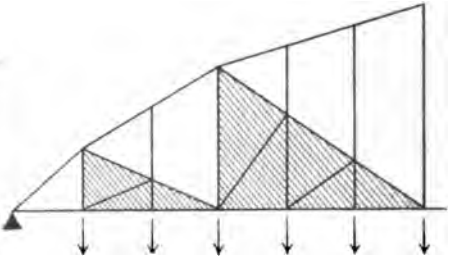


Fig. 525.

Der Träger in Fig. 524 besteht aus einem weitmaschigen Dreiecksystem, dessen Feldweiten zwischen dem einfachen und dreifachen Querträgerabstande wechselt. Die innerhalb der Felder des Dreiecknetzes liegenden Querträger i, k hängen an den durch Schraffierung kenntlich gemachten gegliederten Scheiben, für deren Ausbildung Fig. 524 zwei verschiedene Anordnungen (denen sich leicht noch andere anreihen ließen) angibt.

Digitized by Google

Fig. 525 zeigt einen ähnlichen Träger. Die schraffierten Scheiben liegen unterhalb der Diagonalen des Hauptnetzes. Die Zwischenvertikalen reichen bis zur oberen Gurtung, sie erhöhen deren Knickfestigkeit und übertragen die in ihren oberen Endpunkten angreifenden Bestandteile der ständigen Belastung auf die Scheiben.

Die allgemeine Berechnungsweise derartiger Fachwerke ist im § 28 (No. 137) erledigt worden. Die gegliederten Scheiben übertragen die in den Zwischenknoten angreifenden Lasten ... P_i, P_k ... nach Fig. 527 auf die Knotenpunkte ... $(m-1)$, m ... des Hauptnetzes. Man

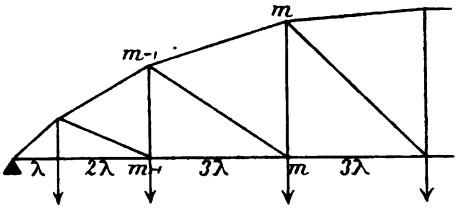


Fig. 526.

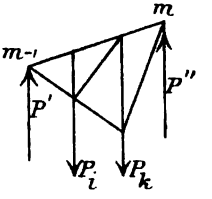


Fig. 527.

berechnet die in den Stäben der Scheiben durch die Kräfte P_i, P_k, P', P'' hervorgerufenen Spannkräfte, ermittelt sodann die Spannkräfte in den Stäben des Hauptnetzes, und zählt schließlich für diejenigen Stäbe, welche sowohl einer Scheibe als auch dem Hauptsystem angehören, die aus beiden Untersuchungen sich ergebenden Bean-

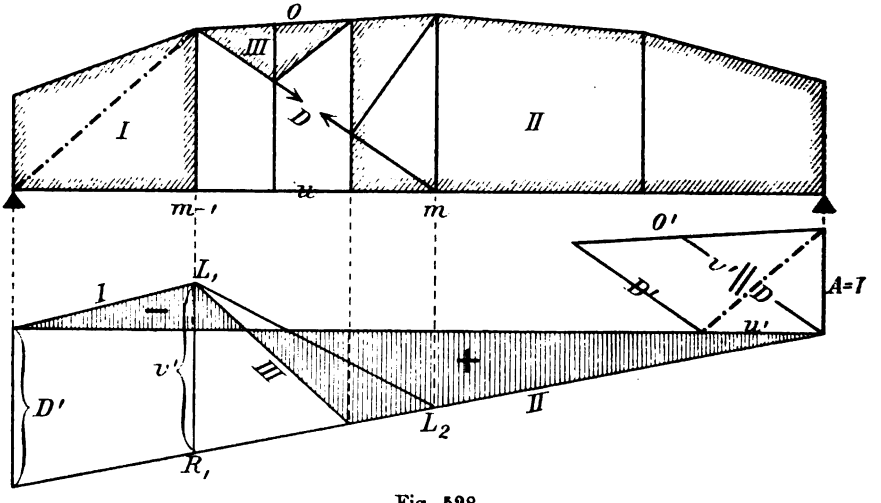


Fig. 528.

spruchungen zusammen. Diese Betrachtung führt auch ohne weiteres zu den Einflußlinien. Als Beispiel haben wir in Fig. 528 die Ein-

Digitized by Google

flußlinie für die Spannkraft D im Mittelstück der Diagonale eines dreiteiligen Feldes dargestellt. Zuerst wurde die Diagonale nur als Bestandteil des Hauptnetzes ins Auge gefaßt. Die Einflußlinie AL_1L_2B für D ist dann bestimmt durch die Spannkraft D' infolge $A = 1$ und durch die Bedingung, daß der senkrechte Abstand $\overline{L_1R_1}$ der Geraden I und II an der Stelle $m-1$ gleich der durch Zerlegung von 1 nach den Richtungen von O und D gewonnenen Strecke v' ist. Nun wurde D als die Spannkraft der unteren Gurtung der in das Hauptnetz eingesetzten Scheibe betrachtet und ihre Einflußlinie in Fig. 529 mit Hilfe der Spannkraft (D') infolge $A' = 1$ ermittelt, wobei sich $(D') = v'$ ergab. Schließlich wurden die beiden Einflußflächen zu der in Fig. 528 durch Schraffierung gekennzeichneten D-Fläche vereinigt.

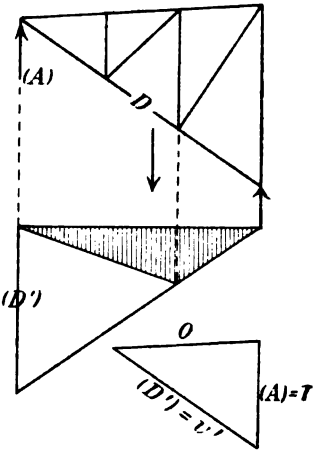


Fig. 529.

Noch schneller findet man die D-Fläche aus der Bedingung, daß den drei Scheiben I, III, II die drei Geraden I', III', II' entsprechen und die Linie II mit der D'-A-Linie übereinstimmt. Man muß dabei allerdings daran denken, daß es beim Ständerfachwerk gleichgültig ist, ob die Lasten an der unteren oder an der oberen Gurtung angreifen.

232. Als zweites Beispiel wählen wir eine etwas ausführlichere Untersuchung des in Fig. 530 dargestellten Trägers. Die Spannkräfte in den drei Abschnitten der Diagonalen des m^{ten} Feldes bezeichnen wir, von unten nach oben, der Reihe nach mit D_m, D_{m1}, D_{m2}, die Spannkräfte in den Gurtstäben mit O_m, U_m, der Vertikalen mit V_m, der Diagonalen der Scheibe $m\,(m)\,(m-1)$ mit Z_{m1}, Z_{m2}.

Nach Führung des Schnittes I ergibt sich aus der Momentengleichung für den oberen Knotenpunkt $m-1$ als Drehpunkt:

$$(1) \quad U_m = + \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$$

und aus der Momentengleichung für den unteren Knotenpunkt m:

$$(2) \quad O_m \cos \beta_m = - \frac{M_{m2}}{h_m} ,$$

wo M_{m2} das Moment der links vom Schnitte I angreifenden äußeren Kräfte in Bezug auf m bedeutet. Dieses Moment darf nicht mit M_m

Digitized by Google

verwechselt werden. Für den in Fig. 530 angenommenen Belastungsfall ist

$$M_m = Ax_m - P_1 5\lambda - P_2 4\lambda - P_3 3\lambda - P_i 2\lambda - P_k \lambda$$

und

$$M_{m2} = Ax_m - P_1 5\lambda - P_2 4\lambda - P_3 3\lambda = M_m + P_i 2\lambda + P_k \lambda.$$

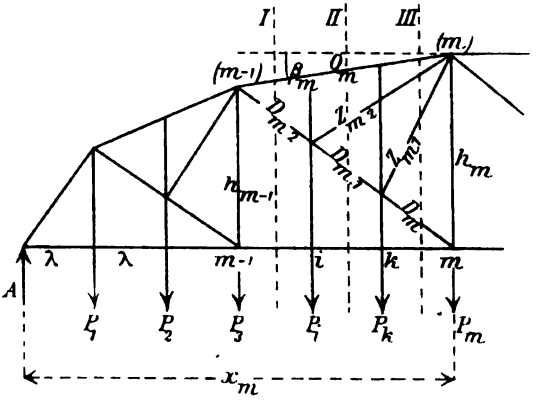


Fig. 530.

Die Lasten P_i und P_k liegen zwar links von m, aber nicht links vom Schnitt *I*. Fig. 531 enthält eine Gegenüberstellung der M_m-Fläche und M_{m2}-Fläche. Der Einfluß der in i und k angreifenden Lasten auf M_{m2} ist gleich Ax_m; es ist also die mit x_m multiplizierte A-Linie von B bis i zu benutzen.

Für die Spannkraft D_{m2} ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung

$$D_{m2} \cos \varphi_m + O_m \cos \beta_m + U_m = 0$$

der Wert

$$(3) \quad D_{m2} \cos \varphi_m = \frac{M_{m2}}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}.$$

Nun wird Schnitt *II* geführt und die Momentengleichung für den oberen Knotenpunkt m aufgestellt; sie lautet

$$(D_{m1} \cos \varphi_m + U_m) h_m = M_{m1},$$

wo M_{m1} das auf m bezogene Moment der links von *II* angreifenden äußeren Kräfte (d. i. hier der Kräfte A, P_1, P_2, P_3, P_i) bedeutet.

Man findet

$$(4) \quad D_{m1} \cos \varphi_m = -\frac{M_{m1}}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}.$$

Digitized by Google

Führt man schließlich den Schnitt *III*, so erhält man aus der Momentengleichung für den oberen Knotenpunkt m für D_m die Formel

$$(5) \quad D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} .$$

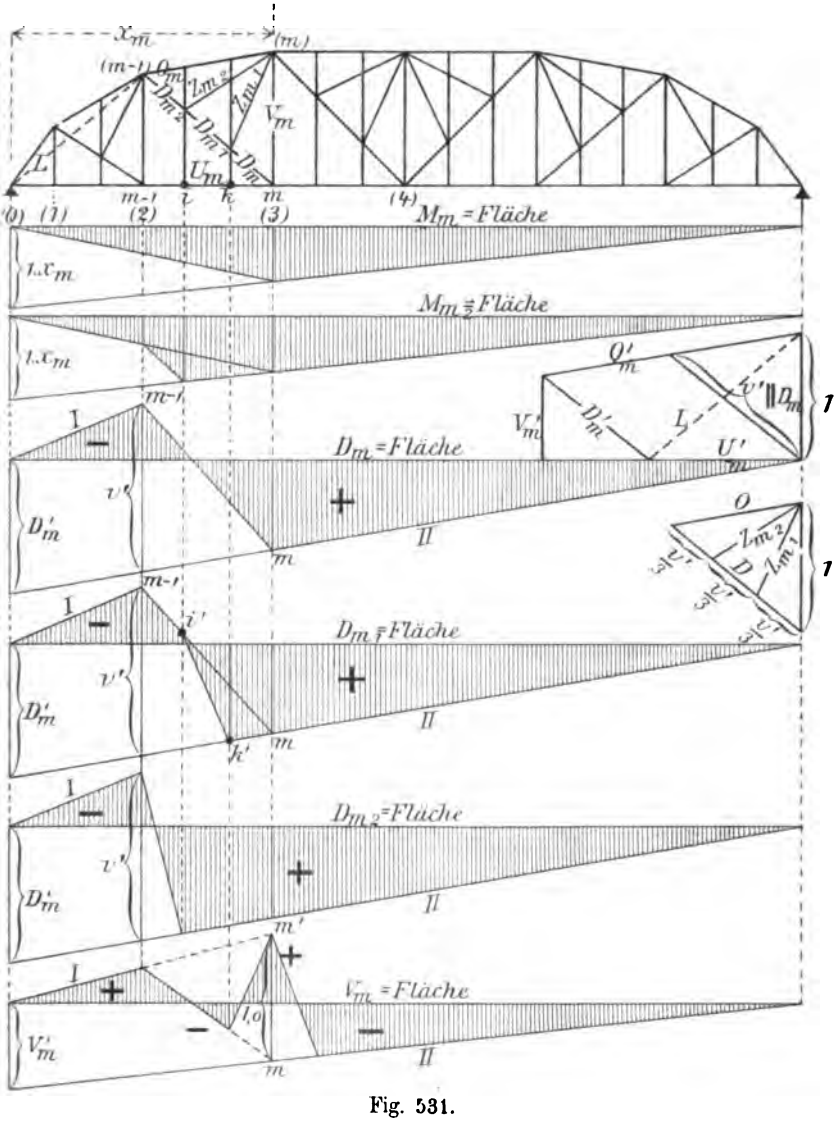


Fig. 531.

Für die Berechnung von D_m genügt also die Untersuchung des Hauptsystems.

Digitized by Google

Die Spannkräfte Z_{m2} und Z_{m1} der Zwischendiagonalen gewinnt man durch Zerlegung der Knotenlasten P_i und P_k nach den Richtungen von D und Z. Bezeichnet man die Längen dieser Diagonalen mit z_{m2} und z_{m1}, so erhält man

$$(6) \quad z_{m2} = P_i \frac{Z_{m2}}{h_m}, \quad z_{m1} = P_k \frac{Z_{m1}}{h_m}.$$

Die Spannkraft in der m^{ten} Vertikale ist

$$(7) \quad V_m = -D_m \sin \varphi_m + P_m.$$

In Fig. 531 haben wir noch die *Einflußflächen* für die Spannkräfte D_m, D_{m1}, D_{m2}, V_m dargestellt. Die D_m-Linie ist bestimmt durch D'_m und v' (vergl. den Schluß von No. 231). Um aus der D_m-Linie die D_{m1}-Linie und die D_{m2}-Linie abzuleiten, betrachte man D_{m1} und D_{m2} als Spannkräfte der unteren Gurtung der Scheibe $(m-1)$ (m) m. Eine in i angreifende Last 1 erzeugt

$$D_{m2} = \frac{2}{3} v', \quad D_{m1} = 0,$$

und eine in k angreifende Last 1 erzeugt

$$D_{m-2} = D_{m1} = \frac{1}{3} v'.$$

Die V_m-Linie ist durch die Gleichung (7) bestimmt. Man trägt die $D_m \sin \varphi_m$-Linie auf und ändert an der Stelle m deren Ordinate um $\overline{mm'} = +1$. Der Punkt m' fällt in die Verlängerung der Linie I, was ohne weiteres aus den Eigenschaften der V_m-Linie des Hauptnetzes folgt. Man vergleiche Fig. 226 auf Seite 240; dort wird $\overline{L_2 R_2} = v = 1$, sobald der Stab CF_2 eine lotrechte Lage annimmt. Die schraffierte V_m-Linie ist also durch die Spannkraft V'_m und die Strecke $\overline{mm'} = 1$ vollständig bestimmt.

233. Zahlenbeispiel. Eingleisige Eisenbahnbrücke mit Schwedler-Trägern von 150,3 m Spannweite (Fig. 531). Anzahl der Felder gleich 18, Feldweite $\lambda = 8{,}35$ m. Das Hauptnetz besitzt zwei einfache, zwei doppelte und vier dreifache Felder. Das Eigengewicht darf man für die statische Berechnung setzen

$$g = 30\,l + F,$$

wo F das Gewicht der Fahrbahn bedeutet.*) Mit $F = 1250$ kg/m ergibt sich

$$g = 30 \cdot 150 + 1250 = 5750 \text{ kg/m} = 5{,}75 \text{ t/m Gleis},$$

es ist also

$$g\lambda = 5{,}75 \cdot 8{,}35 = 48{,}0 \text{ t} \quad \text{und} \quad \frac{g\lambda^2}{2} = 200 \text{ tm}.$$

Nach der Formel

$$M_{mg} = \frac{g x_m (l - x_m)}{2}$$

erhält man für die Momente infolge des Eigengewichts die Werte

*) Siehe die im Anhang gemachten Angaben über die Gewichte eiserner Brücken.

Digitized by Google

$$M_{1g} = \frac{g\lambda^2}{2} \cdot 1 \cdot 17 = 200 \cdot 1 \cdot 17 = 3400\,tm$$

$$M_{2g} = 200 \cdot 3 \cdot 15 = 9000 \text{ „}$$
$$M_{3g} = 200 \cdot 6 \cdot 12 = 14400 \text{ „}$$
$$M_{4g} = 200 \cdot 9 \cdot 9 = 16200 \text{ „}$$
$$M'_{2g} = M_{2g} + g\lambda \cdot \lambda = 9400 \text{ „}$$
$$M'_{3g} = M_{3g} + g\lambda \cdot \lambda = 14800 \text{ „}$$
$$M''_{3g} = M_{3g} + g\lambda \cdot \lambda + g\lambda \cdot 2\lambda = 15600 \text{ „}$$
$$M'_{4g} = M_{4g} + g\lambda \cdot \lambda = 16600 \text{ „}$$
$$M''_{4g} = M_{4g} + g\lambda \cdot \lambda + g\lambda \cdot 2\lambda = 17400 \text{ „}$$

Nach Bestimmung der Trägerform lassen sich die Spannkräfte O, U, D, V infolge des Eigengewichts mit Hilfe der Formeln (1) bis (7) aus den Momenten M, M', M'' berechnen.

Bestimmung der Trägerform. Aus dem auf Seite 288 angegebenen Grunde empfiehlt es sich bei der Berechnung der Verhältniszahlen $h_{m-1} : h_m$ mit einem kleineren Eigengewichte zu rechnen. Wir dividieren daher die vorstehenden Momente M_g durch 1,2 und erhalten

$$M_{1g} = 2800, \quad M_{2g} = 7500, \quad M_{3g} = 12000, \quad M_{4g} = 13500\,tm.$$

Behufs Berechnung von $h_3 : h_4$ nehmen wir an, der von A aus auffahrende Zug sei so weit in das Feld 2—3 vorgerückt, daß die r^{te} Achse am Knotenpunkt 2 liegt, Fig. 532. Es entsteht dann

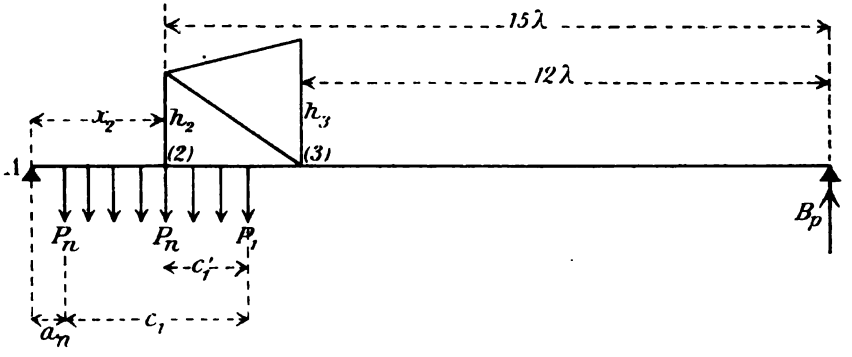


Fig. 532.

$$B_p = \frac{\Sigma Pa}{l} = \frac{1}{18} \cdot \frac{\Sigma Pa}{\lambda}, \text{ wo } \Sigma Pa = \mathfrak{S}_n + \mathfrak{P}_n a_n$$
$$M_2 = B_p\, 15\lambda - \mathfrak{S}_r + M_{2g}$$
$$M_3 = B_p\, 12\lambda + M_{2g}$$

und es muß sein

$$\frac{h_2}{h_3} > \frac{M_2}{M_3}.$$

Es soll mit den neuen Belastungsvorschriften für die Preußischen Staatsbahnen gerechnet werden. Die erste Maschine fährt rückwärts; es ist also die im Anhang unter II mitgeteilte Tabelle D zu benutzen, und es ergibt sich für verschiedene r der folgende Rechnungsansatz:

Digitized by Google

$r =$	4	5	6	7	8
$x_2 =$	25,05	25,05	25,05	25,05	25,05
$c'_1 =$	7,50	9,00	10,50	12,00	13,50
$x_2 + c'_1 =$	32,55	34,05	35,55	37,05	38.55
$c_1 =$	31,50	33,00	33,00	36,00	36,00
$a_m = x_2 + c'_1 - c_1 =$	1,05	1,05	2,55	1,05	2,55
$n =$	15	16	16	17	17
$\mathfrak{P}_m =$	235	248	248	261	261
$\mathfrak{P}_m a_m =$	246,7	260,4	632,4	274,0	665,5
$\mathfrak{S}_m =$	3789,5	4092,0	4092,0	4836,0	4836.0
$\Sigma Pa =$	3986,2	4352,4	4724,4	5110,0	5501.5
$B_p\lambda = \frac{1}{18}\Sigma Pa =$	221	242	262	284	306
$15\, B_p\lambda =$	3315	3630	3930	4260	4590
$\mathfrak{S}_r =$	234	318	427	562	723
$M_{2p} = 15\, B_p\lambda - \mathfrak{S}_r =$	3081	3312	3502	3698	3867
$M_{2g} =$	7500	7500	7500	7500	7500
$M_2 =$	10581	10812	11002	11198	11367
$M_{3p} = 12\, B_p\lambda =$	2652	2904	3144	3408	3672
$M_{3g} =$	12000	12000	12000	12000	12000
$M_3 =$	14652	14904	15144	15408	15672
$\frac{h_2}{h_3} = \frac{M_2}{M_3} =$	0,722	0,725	0,726	0,727	0.725

Es muß also mindestens sein $h_2 : h_3 = 0{,}73$. Auf dieselbe Weise findet man $h_1 : h_2 = 0{,}44$. Fährt die erste Lokomotive vorwärts, so ergeben sich kleinere Werte $h_{m-1} : h_m$. Wir wählen:

$$h_3 = h_4 = 24^m$$
$$h_2 = 0{,}8\, h_3 = 19{,}2^m$$
$$h_1 = 0{,}5\, h_2 = 9{,}6^m.$$*)

Berechnung von $_{max}D_{3p}$. Der Eisenbahnzug fährt von B bis in das Feld 2 — 3 des Hauptnetzes vor. Die Achse P_r liegt bei 3, Fig. 533a. Man erhält

$$h_m D_m \cos\varphi_m = M_m - M_{m-1}\frac{h_m}{h_{m-1}},$$

wo

$$M_m = \frac{\Sigma Pb}{l} x_m - \Sigma P'b',$$

$$M_{m-1} = \frac{\Sigma Pb}{l} x_{m-1}.$$

*) Der Verfasser hat gelegentlich der Bearbeitung eines größeren, für das Ausland bestimmten Brückenentwurfes vor kurzem den oben behandelten Träger und einen ähnlichen von 192,5^m Spannweite vollständig durchkonstruiert und gefunden, daß für große Spannweiten Schwedlerträger (deren Diagonalen aber zweckmäßig steif ausgebildet werden) sehr vorteilhaft sind. Infolge der geringen Beanspruchungen der Füllungsstäbe ergeben sich auch einfache Knotenpunktverbindungen.

Digitized by Google

$\Sigma P'b' = \mathfrak{S}_r$ bedeutet das statische Moment der im Felde $(m-1)-m$ (das ist $2-3$) liegenden Lasten bezogen auf den Knotenpunkt $m=3$. Rechnet man mit Achslasten und beachtet, daß die Brücke eingleisig ist, daß sich also die Belastung des Gleises auf zwei Hauptträger verteilt, so erhält man für die Diagonale eines Hauptträgers

$$2 h_m D_m \cos\varphi_m = \varepsilon_d \Sigma P b - \Sigma P' b',$$

wo

$$\varepsilon_d = \frac{x_m}{l} - \frac{x_{m-1}}{l} \cdot \frac{h_m}{h_{m-1}}.$$

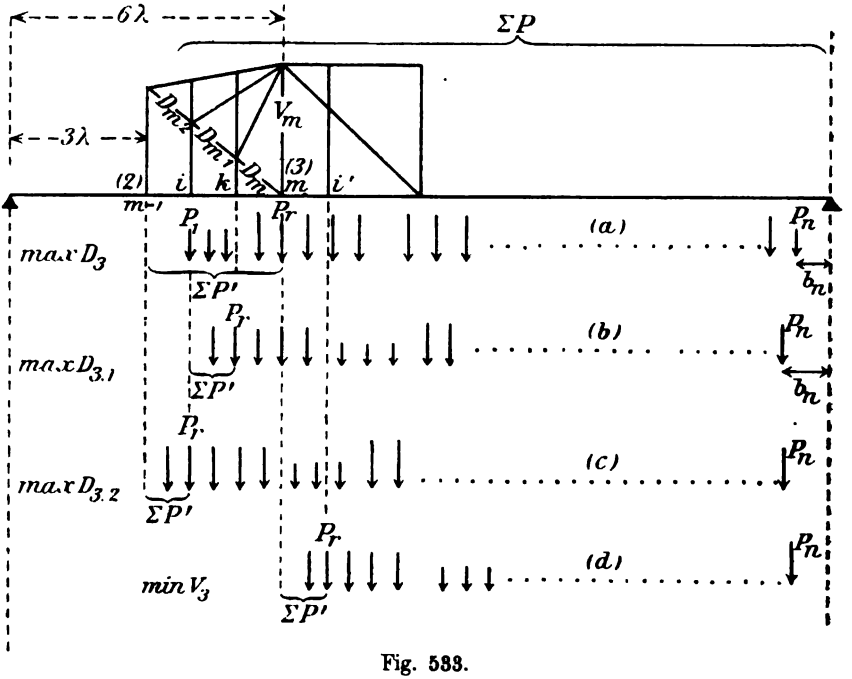


Fig. 533.

Soll die Zugstellung die Spannkraft $_{max}D$ hervorbringen, so muß sein

$$\overrightarrow{\quad} \Sigma P' \lessgtr \varepsilon_d \Sigma P.$$

Das heißt: Verschiebt man den Zug nach rechts, so daß P_r nicht zur $\Sigma P'$ gehört, so muß $\Sigma P' < \varepsilon_d \Sigma P$ sein; verschiebt man ihn nach links, so daß P_r zur $\Sigma P'$ gehört, so muß $\Sigma P' > \varepsilon_d P$ sein. Für das dritte Feld ist

$$\varepsilon_d = \frac{6}{18} - \frac{3}{18} \cdot \frac{1}{0{,}8} = \frac{1}{8}.$$

Wählt man $r=5$, so kommen 41 Achsen auf die Brücke. Es ergibt sich $\Sigma P = 573^t$ (Anhang Tabelle D) und $\varepsilon_d \Sigma P = 71{,}6^t$, ferner

$$\rightarrow \Sigma P' = 56 < 71{,}6$$

$$\leftarrow \Sigma P' = 73 > 71{,}6.$$

Digitized by Google

Nun ist, wegen $b_n = 1{,}2^m$

$$\Sigma Pb = \mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n = 573 \cdot 1{,}2 + 34392 = 35080,$$
$$\Sigma P'b' = \mathfrak{S}_2 = 318,$$
$$2 h_3 \cos\varphi_3 = 2 \cdot 24 \cdot 0{,}794 = 38{,}1,$$

mithin

$$_{max}D_{3p} \cdot 38{,}1 = \frac{1}{8} \cdot 35080 - 318,$$
$$_{max}D_{3p} = 107^t.$$

Berechnung von $_{max}D_{3\cdot 1p}$. Ein von vorwärtsgehenden Lokomotiven geführter Zug wird in das Feld ik vorgeschoben, Fig. 533b (Anhang Tabelle C). Die Summe $\Sigma P'b'$ erstreckt sich nur über die zwischen i und k liegenden Lasten; b' ist der Abstand einer Last P' von k. Punkt i wird belastet mit $\frac{\Sigma P'b'}{\lambda}$. Man findet

$$2 D_{m\cdot 1p} \cos\varphi_m = M_{m\cdot 1} - M_{m-1} \frac{h_m}{h_{m-1}},$$

wo

$$M_{m\cdot 1} = \frac{\Sigma Pb}{l} x_m - \frac{\Sigma P'b'}{\lambda} \cdot 2\lambda$$
$$= \frac{\Sigma Pb}{l} x_m - 2\Sigma P'b'$$
$$M_{m-1} = \frac{\Sigma Pb}{l} x_{m-1}.$$

Das gibt

$$2 D_{m1p} \cos\varphi_m = \varepsilon_d \Sigma Pb - 2\Sigma P'b' = \frac{1}{8}\Sigma Pb - 2\Sigma P'b'$$

Bedingung

$$\xrightarrow{\quad} \Sigma P' \lessgtr \frac{\varepsilon_d}{2} \Sigma P.$$

Ist $r = 3$, so liegen 42 Achsen auf der Brücke. Es wird $\Sigma P = 586t$ und $\frac{\varepsilon}{2}\Sigma P = \frac{1}{16} \cdot 586 = 36{,}6$

$$\xrightarrow{\quad} \Sigma P' = 34 < 36{,}6$$
$$\xleftarrow{\quad} \Sigma P' = 51 > 36{,}6,$$
$$\Sigma Pb = \mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n = 586 \cdot 2{,}05 + 36158 = 37354$$
$$2\Sigma P'b' = 2\mathfrak{S}_2 = 2 \cdot 17\,(1{,}5 + 3{,}0) = 158^*)$$
$$_{max}D_{3\cdot 1p} \cdot 38{,}1 = \frac{1}{8} \cdot 37354 - 158$$
$$_{max}D_{3\cdot 1p} = 119t.$$

Berechnung von $_{max}D_{3\cdot 2}$. Der von vorwärtsfahrenden Lokomotiven geführte Zug wird in das Feld $(m-1)k$ vorgeschoben. Die Summe $\Sigma P'b'$ erstreckt sich über die zwischen $(m-1)$ und k liegenden Lasten, b' ist der Abstand einer Last P' von i. Punkt $(m-1)$ wird belastet mit $\frac{\Sigma P'b'}{\lambda'}$. Man findet

$$2 D_{m\cdot 2p} \cos\varphi_m = M''_m - M_{m-1} \frac{h_m}{h_{m-1}},$$

*) $\mathfrak{S}_2$ darf nicht der Tabelle C entnommen werden, da die ersten 4 Reihen unter Annahme höherer Achslasten für den Fall berechnet sind, daß nur eine bis vier Achsen auf der Brücke stehen. Wir verweisen auf den Text unmittelbar vor der Tabelle C.

Digitized by Google

wo

$$M_{m\cdot 2} = \frac{\Sigma Pb}{l} x_m - \frac{\Sigma P'b'}{\lambda} \cdot 3\lambda$$

$$M_{m\cdot 2} = \frac{\Sigma Pb}{l} x_m - 3\,\Sigma P'b'$$

$$M_{m-1} = \frac{\Sigma Pb}{l} x_{m-1}.$$

Das gibt

$$2\,D_{m\cdot 2p}\cos\varphi_m = \varepsilon_d \Sigma Pb - 3\,\Sigma P'b' = \frac{1}{8}\Sigma Pb - 3\,\Sigma P'b'$$

Bedingung

$$\xrightarrow{\quad} \xleftarrow{\quad} \Sigma P' \lessgtr \frac{\varepsilon_d}{3}\Sigma P.$$

Ist $r = 2$ so kommen 45 Achsen auf die Brücke. Es wird $\Sigma P = 625^t$*) und $\frac{\varepsilon}{8}\Sigma P = \frac{1}{24}\cdot 625 = 26^t$

$$\xrightarrow{\quad} \Sigma P' = 17 < 26$$

$$\xleftarrow{\quad} \Sigma P' = 34 > 26$$

$$\Sigma Pb = \mathfrak{S}_{45} = 41544, \quad \Sigma P'b' = 17 \cdot 1{,}5 = 25{,}5$$

$$_{max}D_{8\cdot 2p}\cdot 88{,}1 = \frac{1}{8}\cdot 41544 - 3\cdot 25{,}5$$

$$_{max}D_{8\cdot 2p} = 134^t.$$

Berechnung von $_{min}V_{8p}$. Der Lastzug rückt von B aus in das rechts von m gelegene Feld $m - i'$ vor. Punkt m wird belastet mit $\frac{\Sigma P'b'}{\lambda}$. Es entsteht

$$V_m = -D_m \sin\varphi_m + \frac{\Sigma P'b'}{\lambda}$$

$$= -D_m \cos\varphi_m \frac{h_{m-1}}{\omega\lambda} + \frac{\Sigma P'b'}{\lambda},$$

wo ω die Anzahl der in dem Felde $(m-1)-m$ enthaltenen Strecken λ bedeutet; im vorliegenden Falle ist $\omega = 8$. Drückt man $D_m \cos\varphi_m$ durch die Momente aus, so erhält man

$$V_m = -\left[\frac{M_m}{h_m}\frac{h_{m-1}}{\omega\lambda} - \frac{M_{m-1}}{\omega\lambda}\right] + \frac{\Sigma P'b'}{\lambda},$$

wo $M_m = Ax_m$, $M_{m-1} = Ax_{m-1}$. Für die Vertikale eines Hauptträgers ergibt sich schließlich

$$2\,V_m\lambda = -\varepsilon_v \Sigma Pb + \Sigma P'b',$$

wo

$$\varepsilon_v = \frac{1}{\omega}\left(\frac{x_m}{l}\frac{h_{m-1}}{h_m} - \frac{x_{m-1}}{l}\right).$$

Im vorliegenden Falle ist

$$\varepsilon_v = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{18}\cdot 0{,}80 - \frac{3}{18}\right) = \frac{1}{80}.$$

---

*) Da $x'_i + 1{,}5 = 116{,}90 + 1{,}5 = 118{,}4^m$ ist, also von $c_1 = 118{,}5^m$ nur unwesentlich abweicht, so nehmen wir $n = 45$ und $b_n = 0$ an.

Digitized by Google

Liegt P_1 bei i', so kommen 36 Lasten auf die Brücke. Man findet

$$\Sigma P = 508, \quad \varepsilon_o \Sigma P = \frac{1}{30} \cdot 508 = 16{,}9^t$$

$$\longleftarrow \Sigma P' = 17 > 15{,}9^t$$

$$\Sigma P b = \mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n = 508 \cdot 0{,}35 + 26424 = 26602$$

$$_{min} V_{s\,p} \cdot 2 \cdot 8{,}35 = -\frac{1}{30} \cdot 26602$$

$$_{min} V_{s\,p} = -53^t.$$

Die Spannkräfte $_{max} V_p$ berechnet man am zweckmäßigsten mit Hilfe einer Einflußlinie, desgleichen die Spannkräfte O_p und, wenn keine Tabellen zur Ermittelung der Momente $\mathfrak{M}_{m\,p}$ zur Verfügung stehen, auch die U_p.

Die vorstehenden Untersuchungen lassen sich auch für weitgespannte Gerber-Balken verwerten.

Digitized by Google

Anhang.

I.

Neue Belastungsvorschläge für Eisenbahnbrücken.

Im Jahre 1900 wurde vom *Verein Deutscher Eisenbahnverwaltungen* ein Bericht über Verhandlungen des Ausschusses für technische Angelegenheiten veröffentlicht, welcher u. a. neue Vorschläge für die beim Entwerfen von Brücken anzunehmenden Belastungen enthält. Fig. 584 gibt die Achslasten der Lokomotive und des Tenders an. Sie wird in jenem Berichte von der Vorschrift begleitet:

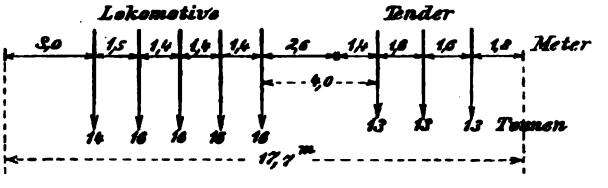


Fig. 534.

„Der Berechnung der Brücken ist ein Zug aus zwei Lokomotiven samt Tendern in ungünstigster Stellung und einseitig angereihten Wagen von 3,6 Tonnen Gewicht auf das laufende Meter Wagenlänge (einschließlich Pufferlänge) zu Grunde zu legen."

„Insofern für kleine Stützweiten oder Belastungslängen vier je 1,4m voneinander abstehende Achsen, von denen eine an der ungünstigsten Stelle mit 18 Tonnen Belastung anzunehmen ist, größere Beanspruchungen ergeben, als die oben skizzierte Lokomotive, ist dieser Belastungsfall der Rechnung zu Grunde zu legen."

Der Bericht ist reich mit Tabellen ausgestattet, denen wir folgende Werte entnehmen.

Digitized by Google

Größte Biegungsmomente für verschiedene Stützweiten l.

l	M_{max}	l	M_{max}	l	M_{max}	l	M_{max}
m	$t\,m$	m	$t\,m$	m	$t\,m$	m	$t\,m$
1,0	4,5	15	285,0	44	1607	78	4 158
1,5	6,75	16	261,0	46	1787	80	4 329
2,0	9,0	17	289,4	48	1872	82	4 504
2,5	11,5	18	318,45	50	2007	84	4 680
3,0	15,5	19	349,5	52	2147	86	4 859
3,5	21,35	20	380,9	54	2286	88	5 039
4,0	27,6	22	448,1	56	2430	90	5 223
5,0	40,1	24	525,8	58	2574	92	5 407
6,0	55,5	26	604,0	60	2723	94	5 595
7,0	71,8	28	693,2	62	2874	96	5 783
8,0	90,9	30	790,4	64	3027	98	5 976
9,0	110,4	32	891,9	66	3182	100	6 172
10,0	129,9	34	997,0	68	3339	110	7 180
11.0	149,4	36	1108	70	3499	120	8 269
12,0	168,9	38	1226	72	3660	130	9 425
13,0	188,4	40	1350	74	3824	140	10 642
14,0	210,9	42	1477	76	3990	150	11 933

Statische Momente $\mathfrak{S}_m$.

b_1	$\mathfrak{S}_m$	b_1	$\mathfrak{S}_m$	b_1	$\mathfrak{S}_m$
0,5	9,0	22*)	2 030	64	13 359
1,0	18,0	24*)	2 398	68	14 780
1,5	28,6	26*)	2 788	72	16 257
2,0	45,6	28*)	3 186	76	17 790
2,5	62,6	30*)	3 615	80	19 385
3,0	82,8	32	4 075	84	21 034
3,5	107,8	34	4 546	88	22 743
4,0	132,8	36	5 032	92	24 509
4,5	162,6	38	5 535	96	26 330
5,0	195,6	40	6 051	100	28 212
6,0	261,6	42	6 581	105	30 644
7,0*)	327,6	44	7 124	110	33 166
8,0*)	393,6	46	7 682	115	35 778
9,0*)	471,6	48	8 256	120	38 480
10,0*)	553.5	50	8 844	125	41 271
12,0	744,6	52	9 446	130	44 153
14,0	966,9	54	10 061	135	47 125
16,0	1201	56	10 691	140	50 187
18,0	1453	58	11 338	145	53 339
20,0*)	1719	60	11 998	150	56 580

*) Ist die Stützweite $l \leqq b_1 + 4{,}0\,m$ so sind folgende Werte zu nehmen:

l	$\mathfrak{S}_m$	l	$\mathfrak{S}_m$
7,0	331,8	22	2063
8,0	409,8	24	2434
9,0	487,8	26	2816
10,0	566,8	28	3209
20,0	1768	30	3617

Digitized by Google

Die zweite Tabelle dient zur Berechnung der größten Querkräfte und entspricht unserer Tabelle I auf Seite 150. Die Strecke b_1 gibt (nach Fig. 537, Seite 551) die Entfernung der ersten Last von der rechten Stütze an. Die Tabellen des Berichtes, aus denen wir hier einen Auszug geben, erhalten nur die statischen Momente $\mathfrak{S}_m$, nicht aber die Lastensummen $\mathfrak{P}_m$, was offenbar ein Mangel ist, da man diesen Wert zur schnellen Entscheidung der Frage nach der ungünstigsten Laststellung braucht. Man vergleiche die Zahlenbeispiele am Schluß dieses Anhanges.

II.

Neue Belastungsvorschriften für die Preußischen Staatsbahnen.

Die im April 1901 vom Preußischen Ministerium der öffentlichen Arbeiten erlassene neue Belastungsvorschrift führt zu noch etwas größeren Momenten und Querkräften als die Vorschläge unter I. Sie zeichnet sich durch die größte Einfachheit aus und erleichtert deshalb die Berechnung auch in solchen Fällen, in denen die für einfache Balkenbrücken ausgearbeiteten Tabellen nicht benutzt werden können. Fig. 535 zeigt die Anordnung von Lokomotive, Tender und Güterwagen. Alle Rad-

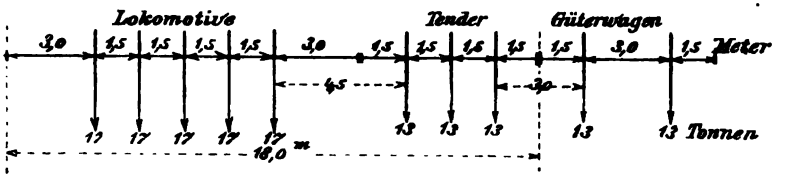


Fig. 535.

stände sind durch 1,5 teilbar. Es ist, wie nach der früheren Vorschrift, ein Zug aus zwei Lokomotiven in ungünstigster Stellung mit einer unbeschränkten Anzahl einseitig angehängter Güterwagen anzunehmen.

So lange sich weniger als 5 Lokomotivachsen auf der Brücke befinden, sind größere Achslasten in Rechnung zu stellen, und zwar ist für jede Achse anzunehmen:

18^t bei Belastung mit vier Achsen,
19^t „ „ „ drei Achsen,
20^t „ „ „ einer oder zwei Achsen.

a. Momente.

Die Tabelle A enthält die größten Momente für Stützweiten von 1,0 bis 150^m. Für dazwischenliegende Stützweiten ist geradlinig einzuschalten, wobei die angegebenen Werte $\Delta M_{max} : \Delta l$ benutzt werden können.

Digitized by Google

A. Größte Biegungsmomente.

l	M_{max}	$\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$	l	M_{max}	$\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$	l	M_{max}	$\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$
m	tm	t	m	tm	t	m	tm	t
1,0	5,00		15	243,9		60	2 900	
		5,00			26,1			81,5
1,2	6,00		16	270,0		62	3 063	
		5,00			27,8			84,5
1,4	7,00		17	297,8		64	3 232	
		5,00			29,2			85,0
1,6	8,00		18	327,0		66	3 402	
		5,00			32,8			86,5
1,8	9,00		19	359,8		68	3 575	
		5,00			34,2			88,0
2,0	10,00		20	394,0		70	3 751	
		5,00			37,5			88,0
2,2	11,00		22	469,0		72	3 927	
		5,00			40,8			91,0
2,4	12,00		24	550,5		74	4 109	
		5,80			40,8			93,0
2,6	13,16		26	632,0		76	4 295	
		9,25			48,1			94,5
2,8	15,01		28	728,2		78	4 484	
		9,30			52,1			95,0
3,0	16,88		30	832,3		80	4 674	
		9,40			53,5			97,0
3,2	18,76		32	939,2		82	4 868	
		9,50			55,4			97,5
3,5	21,61		34	1050		84	5 063	
		13,8			57,5			100
4,0	28,50		36	1165		86	5 268	
		14,2			60,5			101
4,5	35,68		38	1286		88	5 464	
		14,2			65,0			103
5,0	42,75		40	1416		90	5 669	
		14,3			68,0			104
6	57,00		42	1552		92	5 876	
		16,4			68,5			107
7	73,45		44	1689		94	6 089	
		20,1			71,5			107
8	93,50		46	1832		96	6 303	
		21,2			72,0			109
9	114,7		48	1976		98	6 520	
		21,2			73,5			110
10	135,9		50	2123		100	6 740	
		21,2			75,0			118
11	157,1		52	2273		110	7 918	
		21,3			75,0			126
12	178,4		54	2423		120	9 176	
		21,3			77,0			134
13	199,7		56	2577		130	10 520	
		21,3			80,0			144
14	221,6		58	2737		140	11 965	
		22,9			81,5			155
15	243,9		60	2900		150	13 510	

Die Kurve der größten Momente M_x an den verschiedenen Stellen (x) einer Brücke wird genau genug durch zwei Parabelstücke und eine gerade Linie, deren Länge gleich $0{,}12\,l$ ist, dargestellt. Zur Berechnung von M_x dient die Zahlenreihe *B*. Für die dazwischenliegenden Werte $x : l$ ist geradlinig einzuschalten, wobei die angegebenen Werte $\frac{\Delta M_x}{M_{max}} : \Delta \frac{x}{l}$ benutzt werden können.

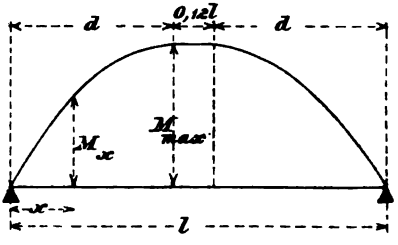


Fig. 536.

Digitized by Google

B.

$\frac{x}{l}$	$\frac{M_x}{M_{max}}$	$\Delta\frac{M_x}{M_{max}}:\Delta\frac{x}{l}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{M_x}{M_{max}}$	$\Delta\frac{M_x}{M_{max}}:\Delta\frac{x}{l}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{M_x}{M_{max}}$	$\Delta\frac{M_x}{M_{max}}:\Delta\frac{x}{l}$
0,00	0,000		0,18	0,651		0,36	0,967	
		4,45			2,60			0,70
0,02	0,089		0,20	0,703		0,38	0,981	
		4,25			2,35			0,55
0,04	0,174		0,22	0,750		0,40	0,992	
		4,00			2,15			0,30
0,06	0,254		0,24	0,793		0,42	0,998	
		3,85			2,00			0,10
0,08	0,331		0,26	0,833		0,44	1,000	
		3,60			1,75			
0,10	0,403		0,28	0,868				
		3,40			1,55			
0,12	0,471		0,30	0,899				
		3,20			1,35			
0,14	0,535		0,32	0,926				
		3,00			1,10			
0,16	0,595		0,34	0,948				
		2,80			0,95			
0,18	0,651		0,36	0,967				

Die Werte der Tabelle B folgen dem Gesetze

$$\frac{M_x}{M_{max}} = \frac{x\,(2\,d - x)}{d^2}$$

wo $d = 0{,}44\,l$ ist.

b. Querkräfte.

Der Tabelle C, welche zur Berechnung des Stützenwiderstandes dient, der am linken Auflager einer Balkenbrücke durch einen vom rechten Auflager aus vorrückenden Eisenbahnzug hervorgerufen wird, haben wir genau dieselbe Anordnung gegeben, wie der Tabelle I auf Seite 152. Wir verweisen daher auf Seite 145, No. 85. Der Auflagerdruck A wird mittels der Gleichung berechnet

$$A = \frac{1}{l}\,(\mathfrak{P}_n\,b_n + \mathfrak{S}_n).$$

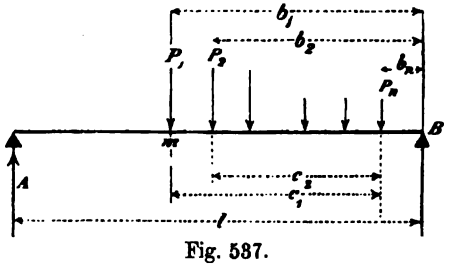


Fig. 537.

Die ersten vier Zeilen sind nicht für den über der Tabelle stehenden Lastenzug berechnet, sondern nach der für die Belastung durch eine kleinere Anzahl von Achsen geltenden Vorschrift. Es ist also gesetzt worden:

$$\mathfrak{P}_1 = 20^t,\ \mathfrak{P}_2 = 2 \cdot 20 = 40^t,\ \mathfrak{P}_3 = 3 \cdot 19 = 57^t,\ \mathfrak{P}_4 = 4 \cdot 18 = 72^t$$

und für diese schwereren Lasten sind auch die Momente $\mathfrak{S}_n$ berechnet worden.

Digitized by Google

C.

	Lokomotive					Tender			Lokomotive					Tender			Güterwagen		
Tonnen	17	— 17	— 17	— 17	— 17	13	— 13	— 13	17	— 17	— 17	— 17	— 17	13	— 13	— 13	13	— 13	13	— 13
Meter	1,5	1,5	1,5	1,5	4,5	1,5	1,5	4,5	1,5	1,5	1,5	1,5	4,5	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0

n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$	n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$
1	0,	20	0	31	76,5	443	19 389
2	1,5	40	30	32	79,5	456	20 718
3	3,0	57	85,5	33	82,5	469	22 086
4	4,5	72	162	34	85,5	482	23 493
5	6,0	85	255	35	88,5	495	24 939
6	10,5	98	637,5	36	91,5	508	26 424
7	12,0	111	784,5	37	94,5	521	27 948
8	13,5	124	951	38	97,5	534	29 511
9	18,0	141	1 509	39	100,5	547	31 113
10	19,5	158	1 720,5	40	103,5	560	32 754
11	21,0	175	1 957,5	41	106,5	573	34 434
12	22,5	192	2 220	42	109,5	586	36 153
13	24,0	209	2 508	43	112,5	599	37 911
14	28,5	222	3 448,5	44	115,5	612	39 708
15	30,0	235	3 781,5	45	118,5	625	41 544
16	31,5	248	4 134	46	121,5	638	43 419
17	34,5	261	4 878	47	124,5	651	45 333
18	37,5	274	5 661	48	127,5	664	47 286
19	40,5	287	6 483	49	130,5	677	49 278
20	43,5	300	7 344	50	133,5	690	51 309
21	46,5	313	8 244	51	136,5	703	53 379
22	49,5	326	9 183	52	139,5	716	55 488
23	52,5	339	10 161	53	142,5	729	57 636
24	55,5	352	11 178	54	145,5	742	59 823
25	58,5	365	12 234	55	148,5	755	62 049
26	61,5	378	13 329	56	151,5	768	64 314
27	64,5	391	14 463	57	154,5	781	66 618
28	67,5	404	15 636	58	157,5	794	68 961
29	70,5	417	16 848	59	160,5	807	71 343
30	73,5	430	18 099	60	163,5	820	73 764

Die folgende Tabelle ist wichtig für die Berechnung der Füllungsstäbe weitmaschiger Fachwerke. Wir verweisen auf das Zahlenbeispiel im § 54.

Digitized by Google

D.

	Tender	Lokomotive	Lokomotive	Tender	Güterwagen
Tonnen	13 — 13 — 13	17 — 17 — 17 — 17 — 17	17 — 17 — 17 — 17 — 17	13 — 13 — 13	13 — 13 | 13 — 13
Meter	1,5 1,5 4,5	1,5 1,5 1,5 1,5 6,0	1,5 1,5 1,5 1,5 4,5	1,5 1,5 3,0	3,0 3,0 3,0

n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$	n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$
1	0	13	0	31	78	448	19 347
2	1,5	26	19,5	32	81	456	20 676
3	3,0	39	58,5	33	84	469	22 044
4	7,5	56	234	34	87	482	23 451
5	9,0	73	318	35	90	495	24 897
6	10,5	90	427,5	36	93	508	26 382
7	12,0	107	562,5	37	96	521	27 906
8	13,5	124	723	38	99	534	29 469
9	19,5	141	1 467	39	102	547	31 071
10	21,0	158	1 678,5	40	105	560	32 712
11	22,5	175	1 915,5	41	108	573	34 392
12	24,0	192	2 178	42	111	586	36 111
13	25,5	209	2 466	43	114	599	37 869
14	30,0	222	3 406,5	44	117	612	39 666
15	31,5	235	3 739,5	45	120	625	41 502
16	33	248	4 092	46	123	638	43 377
17	36	261	4 836	47	126	651	45 291
18	39	274	5 619	48	129	664	47 244
19	42	287	6 441	49	132	677	49 236
20	45	300	7 302	50	135	690	51 267
21	48	313	8 202	51	138	703	53 337
22	51	326	9 141	52	141	716	55 446
23	54	339	10 119	53	144	729	57 594
24	57	352	11 136	54	147	742	59 781
25	60	365	12 192	55	150	755	62 007
26	63	378	13 287	56	153	768	64 272
27	66	391	14 421	57	156	781	66 576
28	69	404	15 594	58	159	794	68 919
29	72	417	16 806	59	162	807	71 301
30	75	430	18 057	60	165	820	73 722

Bei gewissen Stützweiten kann es vorkommen, daß für Querschnitte in der Nähe des linken Auflagers die größte Querkraft entsteht, wenn die erste Maschine rückwärts fährt und der Tender die Brücke bereits verlassen hat, Fig. 538. Es gilt

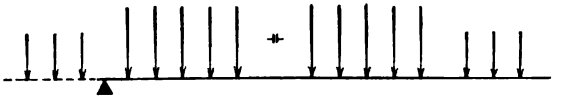


Fig. 538.

Digitized by Google

dann die Tabelle E, deren fünf erste Zeilen mit denen der Tabelle C übereinstimmen. Sobald $b_1 > 33{,}28^m$ ist, liefert die Tabelle C stets den größeren Stützenwiderstand A. Die Unterschiede zwischen den für die beiden Zuganordnungen sich ergebenden Werte sind übrigens unwesentlich, wie aus den beiden folgenden Zahlenreihen hervorgeht. Die obere Reihe ist mittels Tabelle C berechnet worden, die untere mittels Tabelle D.

$l = 10$	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32 Meter
$A = 59{,}5$	65	72	79	84	90	97	104	113	119	126	133 Tonnen
$A = 59{,}5$	64	70	77	85	94	100	107	114	121	127	134 „

E.

	Lokomotive					Lokomotive					Tender			Güterwagen		
Tonnen	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	13	13	13	13	13	13	13
Meter	1,5	1,5	1,5	1,5	6,0	1,5	1,5	1,5	1,5	4,5	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0	

n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$	n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$
1	0	20	0	9	16,5	158	1300,5
2	1,5	40	30	10	18,0	170	1530,5
3	3,0	57	85	11	22,5	183	2295,0
4	4,5	72	162	12	24,0	196	2569,5
5	6,0	85	255	13	25,5	209	2863,5
6	12,0	102	765	14	28,5	222	3490,5
7	13,5	119	918	15	31,5	235	4156,5
8	15,0	136	1096,5	16	34,5	248	4861,5

III.

Zahlenbeispiele für die Benutzung der Tabellen.*)

1. Berechnung der Querkräfte und Gurtspannkräfte für einen Parallelträger von 36^m Stützweite und 3,6^m Feldweite. Fig. 539.

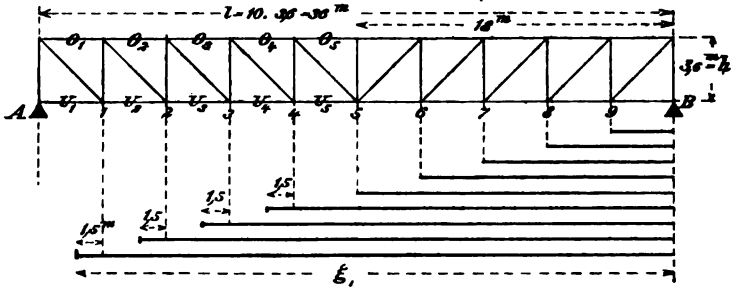


Fig. 539.

*) In diesen Beispielen handelt es sich nur um den Einfluß der Verkehrslast. Den Zeiger p haben wir überall fortgelassen.

Digitized by Google

a. Querkräfte. Nach Seite 139 muß der von B nach A vorrückende Eisenbahnzug die Grundstellung überschreiten, sobald $\mathfrak{P}_n > \mathfrak{P}_1 \frac{l}{\lambda}$ wird. Da nun $\mathfrak{P}_1 \frac{l}{\lambda} = 17 \cdot 10 = 170^t$ ist, so lehrt ein Blick auf die Tabelle C, daß $\mathfrak{P}_n$ erst bei einer Zuglänge von $21{,}0^m$ größer als 170^t wird. Für die Felder 5 bis 9 sind also die Grundstellungen maßgebend; in den anderen entsteht Q_{max}, wenn die zweite Achse an dem das Feld rechts begrenzenden Knotenpunkte liegt. Im linken Knotenpunkte des Feldes greift dann die Last $17 \frac{1{,}5}{3{,}6} = 7^t$ an. Den Zug noch weiter vorzuziehen, ist nirgends nötig, weil $\mathfrak{P}_n$ den Wert $(P_1 + P_2) \frac{l}{\lambda} = 840^t$ erst bei einer Zuglänge von $52{,}5^m$ überschreitet. Nach dieser Entscheidung über die Zugstellungen, die in Fig. 539 durch kräftige Linien angedeutet worden sind, wurde die Berechnung der ${}_{max}Q$ in der folgenden Tabelle durchgeführt. Der Abstand der ersten Last vom rechten Auflager ist mit ξ bezeichnet worden.

Feld	ξ	c_1	$b_n = \xi - c_1$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$	$A = \frac{1}{36}(\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n)$	${}_{max}Q = A - 7{,}0$
	m	m	m	t	tm	t	t
1	33,9	31,5	2,4	248	4134	131	124
2	30,3	30,0	0,3	235	3782	107	100
3	26,7	24,0	2,7	209	2508	85	78
4	23,1	22,5	0,6	192	2220	65	58
5	18,0	18,0	0		1509	$A = 42 = {}_{max}Q$	
6	14,4	13,5	0,9	124	951	80 „	
7	10,8	10,5	0,3	98	638	19 „	
8	7,2	6,0	1,2	85	255	10 „	
9	3,6	3,0	0,6	57	86	3,3 „	

Die Benutzung der den früher üblichen Belastungen entsprechenden Tabelle I auf Seite 310 liefert folgende Querkräfte

$${}_{max}Q = 83^t,\ 66^t,\ 52^t,\ 40^t,\ 28^t,\ 19^t,\ 12^t,\ 6{,}4^t,\ 2{,}4^t;$$

dieselben sind wesentlich (nämlich um 50 v. H.) kleiner als die oben berechneten Werte.

b. Gurtspannkräfte. Das größte Moment ist, nach Tabelle A, ${}_{max}M = 1165^{tm}$. Man erhält $-O_3 = \frac{M_3}{h} = \frac{1165}{3{,}6} = 324^t$ und mit Hilfe der Tabelle B

$$\text{für } \frac{x}{l} = 0{,}1 \quad -O_1 = +U_2 = 0{,}403 \cdot 324 = 131^t$$
$$0{,}2 \quad -O_2 = +U_3 = 0{,}703 \cdot 324 = 228^t$$
$$0{,}3 \quad -O_3 = +U_4 = 0{,}899 \cdot 324 = 291^t$$
$$0{,}4 \quad -O_4 = +U_5 = 0{,}992 \cdot 324 = 321^t.$$

U_1 ist gleich Null.

2. Berechnung der Spannkräfte D, V, U, O des in Fig. 540 dargestellten Parabelträgers.

a. Füllungsstäbe. Überschreitet der von B aus vorrückende Eisenbahnzug die Grundstellung so weit, daß die Lasten P_1 bis P_r im m^{ten} Felde liegen, Fig. 541, so wird der Knotenpunkt $m - 1$ mit

Digitized by Google

$$P' = \frac{\sum_1^r Pe}{\lambda_m}$$

belastet. Am linken Auflager entsteht

$$A = \frac{\sum_1^n Pb}{l}.$$

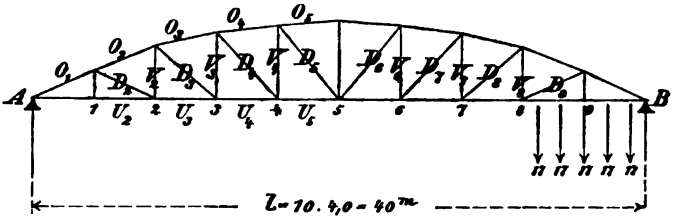


Fig. 540.

Die Spannkraft in der Diagonale nimmt die Form an

$$D = AD' + P'D''$$

und für die Vertikale erhält man

$$V = AV' + P'V''.$$

Hierin sind D' und V' die Spannkräfte infolge $A = 1$, deren Ermittelung in No. 151, Seite 255 gezeigt worden ist. D'' und V'' sind die Werte, welche die in Fig. 245 auf Seite 260 dargestellten Spannkräfte D''' und V''' für $P' = 1$ annehmen. Auf der linken Trägerseite gehören bei untenliegender Fahrbahn zum m^{ten} Felde die Stäbe D_m und V_{m-1}, auf der rechten Trägerseite die Stäbe D_m und V_m. Wir wollen die ganze Untersuchung rechnerisch durchführen.

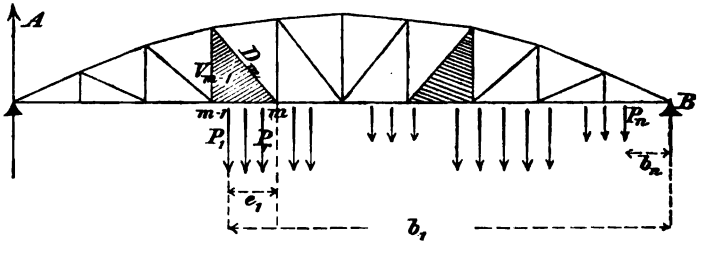


Fig. 541.

Für die linke Trägerhälfte ergibt sich für den Zustand $A = 1$ die Gleichgewichtsbedingung (Fig. 542)

$$1 + V'_m + O'_m \sin \beta_m = 0$$

und hieraus folgt, da

$$O'_m \cos \beta_m = -\frac{M_m}{h_m} = -1\,\frac{x_m}{h_m}, \quad \text{also} \quad O'_m \sin \beta_m = -1\,\frac{x_m}{h_m}\,\operatorname{tg} \beta_m$$

Digitized by Google

ist, die einfache Beziehung

$$-V'_m = \frac{x_m}{\lambda_m}\frac{h_{m-1}}{h_m} - \frac{x_{m-1}}{\lambda_m} = D'_m \sin\varphi_m{}^*);$$

und ebenso findet man für die rechte Trägerhälfte

$$-V'_m = \frac{x_m}{\lambda_{m+1}}\frac{h_{m+1}}{h_m} - \frac{x_{m+1}}{\lambda_{m+1}} = D'_{m+1}\sin\varphi_{m+1}.$$

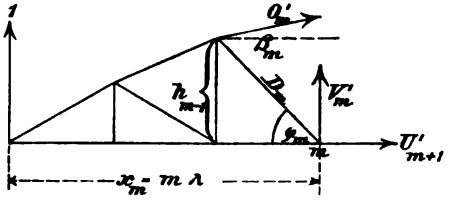


Fig. 542.

Sind alle Felder gleichlang, so ergibt sich (mit $x_m = m\lambda$)

$$(1)\quad \begin{cases} \text{linke Seite } -V'_m = +D'_m \sin\varphi_m & = m\dfrac{h_{m-1}}{h_m} - (m-1) \\ \text{rechte Seite } -V'_m = +D'_{m+1}\sin\varphi_{m+1} = m\dfrac{h_{m+1}}{h_m} - (m+1). \end{cases}$$

Da nun die Höhen h des Parabelträgers dem einfachen Gesetze folgen

$$h_m = \frac{4fx_m(l-x_m)}{l^2} = \frac{4fm(k-m)}{k^2},$$

wo k die Anzahl der Felder und f die Trägerhöhe in der Mitte bedeuten, so erhält man schließlich die einfachen Werte

$$(2)\quad \begin{cases} \text{linke Seite } -V'_m = +D'_m \sin\varphi_m & = \dfrac{m-1}{k-m} \\ \text{rechte Seite } +V'_m = -D'_{m+1}\sin\varphi_{m+1} = \dfrac{m+1}{k-m}. \end{cases}$$

Für die Spannkräfte V'' und D'' findet man (nach Fig. 245 Seite 260)

$$(3)\quad \begin{cases} \text{linke Seite } V''_m = +1, \quad D''_m = -\dfrac{d_m}{h_m}, \quad D''_m \sin\varphi_m = -\dfrac{h_{m-1}}{h_m} \\ \text{rechte Seite } V''_m = -\dfrac{h_{m-1}}{h_m}, \quad D''_m = +\dfrac{d_m}{h_m}, \quad D''_m \sin\varphi_m = +1. \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Untersuchung der gefährlichsten Laststellung über. Verschieben wir den Zug unendlich wenig nach links, so ändert sich, da $de = db$ ist, D um

$$dD = \left(D' \frac{\overset{n}{\Sigma} P}{l} + D'' \frac{\overset{r}{\Sigma} P}{\lambda} \right).$$

---

*) Diese Gleichung kann auch aus $D_m \cos\varphi_m = \dfrac{M_m}{h_m} - \dfrac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = \dfrac{x_m}{h_m} - \dfrac{x_{m-1}}{h_{m-1}}$ gefolgert werden. Vergl. auch Seite 314—316 und § 54, Nr. 233.

Digitized by Google

Die Spannkraft D nimmt also zu, sobald

$$\sum_1^n P > -\sum_1^r P \frac{l}{\lambda}\frac{D''}{D'}$$

ist. Eine etwa am Knotenpunkte m gelegene Last gehört nach der Verschiebung zur $\sum_1^r P$. Verstehen wir also unter $\left(\frac{D''}{D'}\right)$ das absolute Verhältnis der Zahlen D'' und D', und führen wir die Bezeichnung $\mathfrak{P}$ für ΣP ein, so erhalten wir den Satz:

Ist $\mathfrak{P}_m > \mathfrak{P}_r \frac{l}{\lambda}\left(\frac{D''}{D'}\right)$ *und* $\mathfrak{P}_m < \mathfrak{P}_{r+1}\frac{l}{\lambda}\left(\frac{D''}{D'}\right)$, *so muß die* $(r+1)^{te}$ *Achse des Zuges am Knotenpunkte m liegen.**)

Bei den Vertikalen tritt natürlich $\left(\frac{V''}{V'}\right)$ an die Stelle von $\left(\frac{D''}{D'}\right)$. Den beiden zu demselben Felde gehörigen Füllungsstäben können verschiedene gefährlichste Zugstellungen entsprechen.

Für den in Fig. 542 abgebildeten Parabelträger erhält man nun mit $k = 10$ und $f = 5{,}0^m$

$$h_1 = 1{,}800^m,\ h_2 = 3{,}200^m,\ h_3 = 4{,}200^m,\ h_4 = 4{,}800^m,\ h_5 = 5{,}000^m$$

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + h^2}}{h} = 2{,}4869 \quad 1{,}6008, \quad 1{,}3810 \quad 1{,}3017,$$

ferner

linke Seite	$D'_2 \sin\varphi_2 = +\frac{1}{8} = -V'_2$	$D'_2 = +0{,}805$		
	$D'_3 \sin\varphi_3 = +\frac{2}{7} = -V'_3$	$D'_3 = +0{,}457$		
	$D'_4 \sin\varphi_4 = +\frac{3}{6} = -V'_4$	$D'_4 = +0{,}690$		$V''_4 = +1{,}00$
	$D'_5 \sin\varphi_5 = +\frac{4}{5}$	$D'_5 = +1{,}04$		
rechte Seite	$D'_6 \sin\varphi_6 = -\frac{6}{5}$	$D'_6 = -1{,}56$		
	$D'_7 \sin\varphi_7 = -\frac{7}{4} = -V'_6$	$D'_7 = -2{,}42$	$D''_7 = +1{,}38$	$V''_6 = -1{,}04$
	$D'_8 \sin\varphi_8 = -\frac{8}{3} = -V'_7$	$D'_8 = -4{,}27$	$D''_8 = +1{,}60$	$V''_7 = -1{,}14$
	$D'_9 \sin\varphi_9 = -\frac{9}{2} = -V'_8$	$D'_9 = -10{,}97$	$D''_9 = +2{,}44$	$V''_8 = -1{,}31$

Es sind nur die Werte D'' und V'' angegeben worden, welche gebraucht werden, was durch die folgende Aufsuchung der ungünstigsten Zugstellungen entschieden wird. Die Zahlen $\left(\frac{D''}{D'}\right)$ folgen beim Parabelträger auf der linken und rechten Seite dem einfachen Gesetze

$$\left(\frac{D''}{D'}\right) = \frac{k+1-m}{m} \text{ d. i. hier } = \frac{11-m}{m}$$

---

*) Hierbei ist natürlich auch darauf zu achten, daß beim Vorziehen des Zuges um eine endliche Strecke neue Lasten auf die Brücke kommen können.

Digitized by Google

und man erhält daher, weil $P_1 \frac{l}{\lambda} = 170^t$ ist, die folgenden Zahlenreihen für die Belastungslängen $\xi = x'_m + 1{,}5^m$ (zweite Achse in m):

für $m =$	9	8	7	6	5	4	3	2
$\left(\frac{D''}{D'}\right) =$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{2}$
$P_1 \frac{l}{\lambda}\left(\frac{D''}{D'}\right) =$	38^t	64^t	97^t	142^t	204^t	298^t	453^t	765^t
$\xi =$	5.5^m	$9{,}5^m$	$13{,}5^m$	$17{,}5^m$				
$c_1 =$	$4{,}5^m$	6.0^m	$13{,}5^m$	$18{,}5^m$				
$\mathfrak{P}_m =$	72^t	85^t	124^t	124^t.				

Für die ersten drei Felder ist $\mathfrak{P}_m > P_1 \frac{l}{\lambda}\left(\frac{D''}{D'}\right)$; es müssen also hier (und nur hier allein) die Grundstellungen überschritten werden. Für die anderen Felder braucht man in die vorstehenden Zahlenreihen die Werte $\mathfrak{P}_m$ erst gar nicht aufzunehmen, da die Werte $P_1 \frac{l}{\lambda}\left(\frac{D''}{D'}\right)$ viel stärker anwachsen als die $\mathfrak{P}_m$. ***Man erkennt, daß der Parabelträger sich in dieser Beziehung ganz entgegengesetzt verhält wie der Paralleltträger;*** bei letzterem ist $\left(\frac{D''}{D'}\right) = 1$ und die Grundstellung muß gerade bei den Feldern in der Nähe von A überschritten werden.

Es ist nun noch nachzusehen, ob nicht noch ein weiteres Vorrücken des Zuges für irgend ein Feld geboten ist. Dies ist in der Tat erforderlich für das 9te Feld. Sobald sich nämlich der Zug um $1{,}5^m$ weiter vorschiebt, wird $\mathfrak{P}_m = 85^t > (P_1 + P_2) \frac{l}{\lambda}\left(\frac{D''}{D'}\right) = 2 \cdot 38 = 76^t$. Man erhält für diese Stellung

$$A = \frac{1}{10} \cdot 85^t = 8{,}5^t, \quad P' = \frac{17\,(1{,}5 + 3{,}0)}{4{,}0} = 19^t$$
$$_{min}D_9 = -10{,}97 \cdot 8{,}5 + 2{,}44 \cdot 19 = -47^t.\text{*)}$$

Die folgende Tabelle enthält die Berechnung der $_{min}D$ und $_{max}D$. ξ bedeutet wieder die Länge der belasteten Strecke. Es ist $P' = 17 \frac{1{,}5}{4{,}0} = 6{,}4^t$.

Feld	ξ m	c_1 m	$b_m = \xi - c_1$ m	$\mathfrak{P}_m$ t	$\mathfrak{S}_m$ tm	$A = \frac{\mathfrak{P}_m b_m + \mathfrak{S}_m}{l}$ t	$D = AD' + P'D''$
8	9,5	6,0	3,5	85	255	13,8	$_{min}D_8 = -4{,}27 \cdot 13{,}8 + 1{,}60 \cdot 6{,}4 = -49$
7	13,5	13,5	0		951	23,8	$_{min}D_7 = -2{,}42 \cdot 23{,}8 + 1{,}38 \cdot 6{,}4 = -49$
6	16,0	13,5	2,5	124	951	31,5	$_{min}D_6 = -1{,}56 \cdot 31{,}5 = -49$
5	20,0	19,5	0,5	158	1721	45,0	$_{max}D_5 = +1{,}04 \cdot 45{,}0 = +47$
4	24,0	24,0	0		2508	62,7	$_{max}D_4 = +0{,}690 \cdot 62{,}7 = +43$
3	28,0	24,0	4,0	209	2508	83,6	$_{max}D_3 = +0{,}457 \cdot 83.6 = +38$
2	32,0	31,5	0,5	248	4134	106	$_{max}D_2 = +0{,}305 \cdot 106 = +32$

*) Für die Grundstellung würde sich ergeben: $c_1 = 3{,}0^m$; $b_m = 4{,}0 - 3{,}0 = 1{,}0^m$; $\mathfrak{P}_m + 57^t$; $\mathfrak{S}_m = 85{,}5^t$; $A = \frac{1}{10}(57 \cdot 1{,}0 + 85{,}5) = 3{,}56^t$ und

Digitized by Google

Bezüglich der Vertikalen geben zunächst die folgenden Zahlenreihen Aufschluß über die ungünstigste Laststellung

$$\begin{aligned} m &= 8 \quad 7 \quad 6 \quad 4 \\ \left(\frac{V''}{V'}\right) &= 0{,}29 \quad 0{,}43 \quad 0{,}59 \quad 2{,}00 \\ P_1 \frac{l}{\lambda}\left(\frac{V'}{V''}\right) = 170\left(\frac{V''}{V'}\right) &= 49^t \quad 73^t \quad 100^t \quad 340^t \\ \xi &= 9{,}5^m \quad 13{,}5^m \quad 17{,}5^m \quad 21{,}5^m \\ c_1 &= 6{,}0^m \quad 13{,}5^m \quad 13{,}5^m \quad 21{,}0^m \\ \mathfrak{P}_m &= 85^t \quad 124^t \quad 124^t \quad 175^t. \end{aligned}$$

Für die Vertikalen 4, 3 und 2 kommen also Grundstellungen in Betracht, und zwar entstehen ${}_{min}V_4$, ${}_{min}V_3$, ${}_{min}V_2$ der Reihe nach gleichzeitig mit ${}_{max}D_5$, ${}_{max}D_4$, ${}_{max}D_3$. Man erhält mit den oben berechneten Werten A:

$${}_{min}V_4 = -\frac{3}{6}\cdot 45{,}0 = -22{,}5^t; \quad {}_{min}V_3 = -\frac{2}{7}\cdot 62{,}7 = -18^t;$$

$${}_{min}V_2 = -\frac{1}{8}\cdot 83{,}6 = -10{,}5.$$

Weiter entsteht ${}_{max}V_3$, wenn die zweite Achse bei 6 liegt. Es ist dann $\xi = 16{,}0 + 1{,}5 = 17{,}5$; $c_1 = 13{,}5$; $b_m = 4{,}0$; $\mathfrak{P}_m = 124$; $\mathfrak{S}_m = 951$; $A = 36{,}2^t$

$${}_{max}V_3 = +\frac{7}{4}\cdot 36{,}2 - 1{,}04\cdot 6{,}4 = 57^t$$

${}_{max}V_7$ und ${}_{min}D_7$ entstehen bei derselben Laststellung; ebenso ${}_{max}V_8$ und ${}_{min}D_8$. Man erhält daher

$${}_{max}V_7 = \frac{8}{8}\cdot 23{,}8 - 1{,}14\cdot 6{,}4 = 56^t$$

$${}_{max}V_8 = \frac{9}{2}\cdot 13{,}8 - 1{,}31\cdot 6{,}4 = 54^t.$$

Die Vertikalen 1 und 9 werden nur auf Zug beansprucht. Bei der in Fig. 550 angegebenen Laststellung entsteht ${}_{max}V_9 = 17 + 2\cdot 17\,\frac{1{,}0 + 2{,}5}{4{,}0} = 47^t$.

Für die Vertikale 5 ergibt sich für jede Laststellung

$$V_5 = -2\,O_5 \sin\beta_5 = +2\,\frac{M_5}{h_5}\,\mathrm{tg}\,\beta_5 = 0{,}10\,\frac{M_5}{h_5}.$$

Dieser Wert ist stets positiv. Aus der Tabelle A auf Seite 539 entnehmen wir ${}_{max}M_5 = 1420^{tm}$ und erhalten daher

$${}_{max}V_5 = 0{,}10\,\frac{1420}{0{,}5} = +28^t.$$

b. Berechnung der Spannkräfte in den Gurtungen. Es ist

$$-O_m \cos\beta_m = +U_{m+1} = +\frac{M_m}{h_m},$$

${}_{min}D_9 = -10{,}97\cdot 3{,}56 = -39^t$. Das bedeutet aber einen Fehler von 20 v. H. Im vorliegenden Falle ist nicht nur die Größe der Achsenbelastung, sondern auch die des Radstandes wichtig. Ermäßigt man z. B. die Achslast auf 16^t und den Radstand auf $1{,}3^m$, so erhält man $A = \frac{1}{10}\cdot 80 = 8^t$ und $P' = \frac{16\,(1{,}3 + 2{,}6)}{4{,}0}$ $= 15{,}6^t$ und findet dann ${}_{min}D_9 = -10{,}97\cdot 8{,}0 + 2{,}44\cdot 15{,}6 = -50^t$.

Digitized by Google

wo $$M_m = M_{max}\frac{x_m(2d - x_m)}{d^2}$$

$$h_m = 4f\frac{x_m(l - x_m)}{l^2} \quad \text{und} \quad d = 0{,}44\,l,$$

mithin für $x < 0{,}44\,l$

$$\frac{M_m}{h_m} = 1{,}29\frac{M_{max}}{f}\cdot\frac{0{,}88\,l - x_m}{l - x_m}.$$

Setzt man $l = 10\,\lambda$, $x_m = m\,\lambda$, $f = 5{,}0^m$, $M_{max} = 1420^{tm}$, so erhält man für $x < 0{,}44\,l$ d. h. für $m < 4{,}4$

$$\frac{M_m}{h_m} = 366\frac{8{,}8 - m}{10 - m}$$

$m = 1$	2	3	4
liefert $\frac{M_m}{h_m} = 317^t$	311^t	303^t	293^t.

In der Mitte ist $\frac{M_m}{h_m} = \frac{1420}{5{,}0} = 284^t$. Man erhält nun weiter für

$m = 1$	2	3	4	5
$\sec\beta_m = 1{,}10$	1,06	1,03	1,01	1,00
$-O_m = \frac{M_m}{h_m}\sec\beta_m = 349^t$	330^t	312^t	296^t	284^t.

Die berechneten Spannkräfte sind in Fig. 543 zusammengestellt worden.

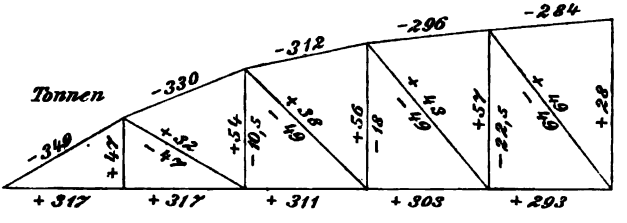


Fig. 543.

3. Aufgabe. Es sind die von der Verkehrslast herrührenden Stützenwiderstände A_{max} und A_{min} des in Fig. 544 dargestellten *Gerber-Balkens* zu berechnen. Die positive A-Fläche unterscheidet sich von der Einflußfläche für das Moment M_x

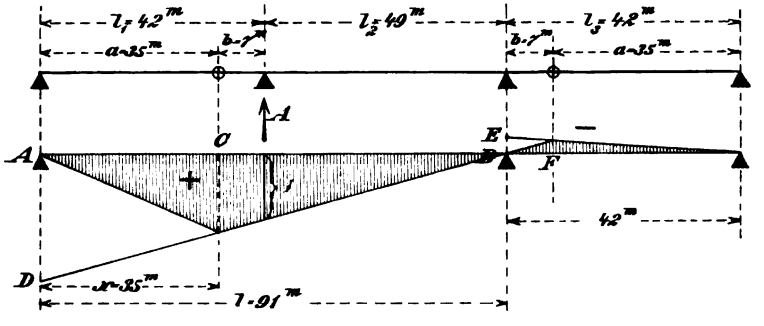


Fig. 544.

Digitized by Google

an der Stelle C eines gewöhnlichen Balkens AB nur dadurch, daß $\frac{AD}{AC}$ nicht gleich 1, sondern gleich $1 \cdot \frac{l}{l_2 \cdot a}$ ist.*) Man erhält also

$$_{max}A = \frac{l}{l_2\, a}\, M_x = \frac{91}{49 \cdot 35}\, M_x = 0{,}0531\, M_x.$$

Nach Tabelle (A) ist für $l = 91^m$

$$_{max}M = 5670 + 105 = 5775^{tm} = \text{rd. } 5780^{tm}$$

und nach Tabelle (B) für $x : l = 35 : 91 = 0{,}385$

$$M_x = (0{,}981 + 0{,}005 \cdot 0{,}55) \cdot 5780 = 0{,}984 \cdot 5780 = 5690^{tm}$$

Man erhält also schließlich $A_{max} = 302^t$.

Für die negative Einflußfläche ist $\frac{BE}{BP} = 1\, \frac{a}{l_2\, l_3} = \frac{35}{49 \cdot 42} = 0{,}0170$

$$_{max}M = 1550^{tm} \text{ für } l = 42^m;$$

$$\frac{x}{l} = \frac{7}{42} = 0{,}17,\ M_x = (0{,}595 + 0{,}01 \cdot 2{,}80)\, 1550 = 966^{tm}$$

$$A_{min} = -\,0{,}0170 \cdot 966 = -\,16^t.$$

IV.

Zusammenstellung verschiedener Gewichtsverteilungen für Lokomotiven und Tender.

Da es immerhin vorkommen kann, daß es zweckmäßig ist, auch noch andere Belastungen in Betracht zu ziehen als die unter I und II angegebenen — wir brauchen nur auf unsere Untersuchungen über mehrteilige Fachwerke und auf die Fußnote auf Seite 560 zu verweisen — so dürfte die folgende zum Teil dem auf Seite 547 erwähnten Ausschußberichte entnommene Zusammenstellung nicht überflüssig sein.

Badische Staats-Eisenbahn

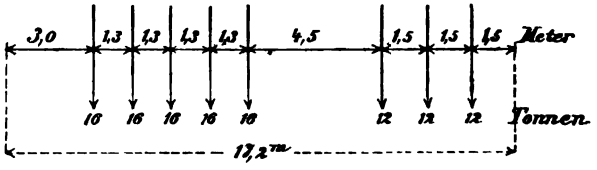


Fig. 545.

Bayerische Staats-Eisenbahn

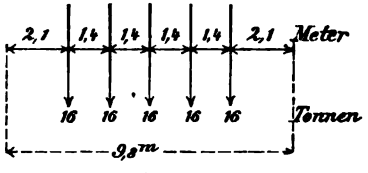


Fig. 546.

*) Vergl. Seite 157, § 19 und Seite 168 No. 99.

Digitized by Google

Sächsische Staats-Eisenbahn

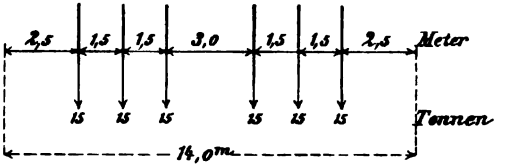


Fig. 547.

Österreich. Kaiser Ferdinands-Nordbahn

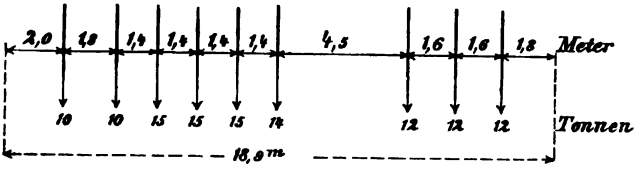


Fig. 548.

K. K. Österreichische Staatsbahnen

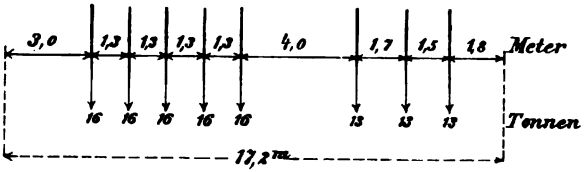


Fig. 549.

Österreich.-Ungar. St.-E.-G.

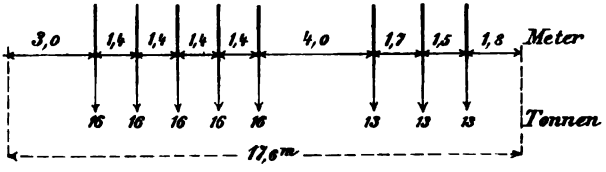


Fig. 550.

K. Ungarische Staatsbahn

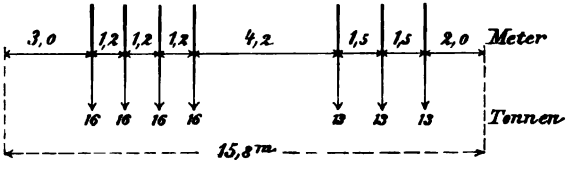


Fig. 551.

Ministerium der Verkehrswege in Rußland

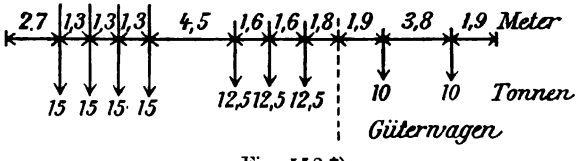


Fig. 552.*)

*) In Rußland müssen auf beiden Seiten der Lokomotiven Güterwagen angenommen werden.

Digitized by Google

Eisenbahn Moskau-Kasan

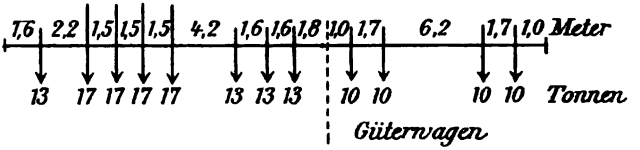


Fig. 553.*)

V.

Eigengewichte eiserner Balkenbrücken für Eisenbahnen.

1. Die in der Tabelle F zusammengestellten Formeln von *Dirksen***) gelten für eingleisige Eisenbahnbrücken, die nach den für die Preußischen Staatsbahnen erlassenen Vorschriften berechnet werden und setzen voraus: rechtwinkligen Grundriß, nicht beschränkte Bauhöhe und ein in der Geraden liegendes Gleis.

Zur Ergänzung dienen folgende Angaben:

a) Höhe des vollwandigen Hauptträgers $\frac{1}{14}l$ statt $\frac{1}{10}l$, Erhöhung des Hauptträgergewichtes um 20 v. H.

b) Höhe des Parallelträgers $\frac{1}{12}l$ statt $\frac{1}{8}l$, Erhöhung des Hauptträgergewichtes um 15 v. H.

c) Sehr beschränkte Bauhöhe, Erhöhung des Fahrbahngewichtes bis zu 20 v. H.

d) Schiefer Grundriß, Erhöhung des Fahrbahngewichtes bis zu 15 v. H.

e) Krümmung des Gleises über 300^m bei Stützweiten unter 40^m, Erhöhung des Gesamtgewichtes bis etwa 12 v. H.

Annahmen über die bauliche Ausbildung der Brücken.

Zu 1) und 2): Stegblechdicke der Blechträger 1,2^{cm}, Stegblechaussteifungen in Entfernungen gleich der Stegblechhöhe; bei Stützenweiten über 15^m Rollenlager.

Zu 3): Bei Überbauten mit Stützweiten über 40^m wird ein oberer Windverband angeordnet, daher der Sprung in der Eisengewichtsformel.

Zu 8): Stegblechhöhe mit Rücksicht auf die meist beschränkte Bauhöhe $\frac{1}{12}$ der Stützweite.

Bedielung 5^{cm} stark, Schwellenentfernung 60^{cm}, Schwellenstärke 20 · 26^{cm}, nur bei den Blechträgerbrücken mit 2^m Hauptträgerentfernung 24 · 30. Gewicht des Holzes 1$^t/_{m^3}$, der Bettung 2$^t/_{m^3}$. Bettungsstärke 36^{cm} über Fahrbahnträgeroberkante.

Falls Leitschienen angeordnet werden, ist noch ihr Gewicht von 150 $^{kg}/_m$ zu berücksichtigen.

Für zweigleisige Eisenbahnbrücken sind die angegebenen Zahlen zu verdoppeln.

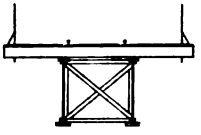
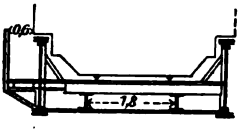
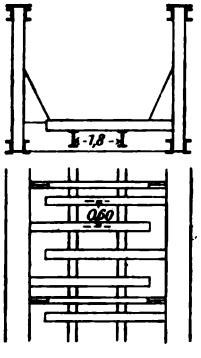
---

*) Wiedergegeben nach Abrundung der Zahlen.

) ***Dirksen, Hilfswerte für das Entwerfen der Brücken mit eisernem Unterbau.* Enthält außer Gewichtsangaben eine Reihe von wertvollen Hilfstafeln zur Berechnung der Fahrbahn eiserner Eisenbahnbrücken und zur Querschnittsbestimmung auf Druck beanspruchter Füllungsglieder eiserner Fachwerkbrücken.

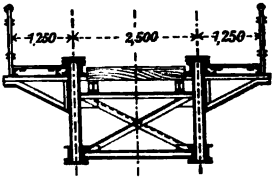
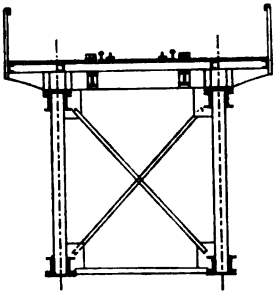
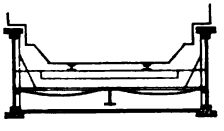
Digitized by Google

F. Eigengewichte eiserner Eisenbahnbrücken nach *Dirksen*.

Bauart der Brücke	Eisengewicht (zu Veranschlagungen)			Gesamtes Eigengewicht
	Hauptträger mit Querverband, Windverband und Lager	Fahrbahnträger	Fahrbahntafel (Schienen, Schwellen, Bohlenbelag, ohne Leitschienen)	
	kg/m	kg/m	kg/m	kg/m
1) Blechträger mit unmittelbarer Schwellenauflagerung. $l = 10 - 25^m$.		Breite		
	$240 + 54l$	1,8[1])	640	$880 + 54l$
	l = Stützweite in m	2,0[1])	775	$1015 + 54l$
Fig. 554.				
2) Blechträger mit versenkter Fahrbahn u. einem seitlichen Fußweg. $l = 10 - 25^m$.				
	$270 + 44l$	3,0	880	$1245 + 44l$
		3,8	430	595	$1330 + 44l$
		3,7	520	660	$1450 + 44l$
Fig. 555.				
3) Fachwerkträger, Fahrbahn versenkt, ohne besonderen Fußweg. $l = 20 - 40^m$.				
	$540 + 27l$	4,8	600		$1820 + 27l$
		4,9	625	680	$1845 + 27l$
		5,0	670		$1890 + 27l$
Fig. 556.				

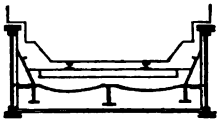
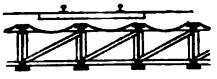
[1]) Hauptträgerentfernung statt Breite.

Digitized by Google

Bauart der Brücke	Eisengewicht (zu Veranschlagungen)			Fahrbahntafel (Schienen, Schwellen, Bohlenbelag, ohne Leitschienen)	Gesamtes Eigengewicht
	Hauptträger mit Querverband, Windverband und Lager	Fahrbahnträger			
	kg/m		kg/m	kg/m	kg/m
4) Fachwerkträger, Fahrbahn versenkt, ohne besonderen Fußweg. $l = 40 - 80$ m.	$680 + 27\,l$	Breite 4,8 4,9 5,0	600 625 670	680	$1960 + 27\,l$ $1985 + 27\,l$ $2030 + 27\,l$
5) Fachwerkträger, Fahrbahn oben.  Fig. 557.	$540 + 27\,l$	2,5 [1] 3,5 [1]	490 580	550	$1580 + 27\,l$ $1670 + 27\,l$
 Fig. 558.					
6) Blechträger mit durchgehendem Kiesbett. $l = 10 - 25$ m.  Fig. 559.	$270 + 49\,l$	3,3 3,7	670 840	2840 3260	$3780 + 49\,l$ $4870 + 49\,l$

[1]) Hauptträgerentfernung statt Breite.

Digitized by Google

Bauart der Brücke	Eisengewicht (zu Veranschlagungen)				Gesamtes Eigengewicht
	Hauptträger mit Querverband, Windverband und Lager	Fahrbahnträger		Fahrbahntafel (Schienen, Schwellen, Bohlenbelag, ohne Leitschienen)	
	kg/m		kg/m	kg/m	kg/m
7) Blechträger mit durchgehendem Kiesbett. $l = 10 - 25^m$.  Fig. 560.	$270 + 49\,l$	Breite 3.3	770	2680	$3720 + 49\,l$
		3,7	940	2820	$4030 + 49\,l$
8) Blechträger mit durchgehendem Kiesbett über den Hauptträgern. $l = 10 - 20^m$.  Fig. 561.	Eisengewicht für 1^m Brückenbreite. $160 + 24\,l$			Gewicht für 1^m Brückenbreite 920	$1080 + 24\,l$

2. Die Tabelle G enthält Angaben von *Paton* über die Eigengewichte einer größeren Anzahl russischer Brücken. Der in Rußland für die statische Untersuchung vorgeschriebene Lastzug ist leichter als der Preußische Lastzug, dafür sind aber die zugelassenen Spannungen σ niedriger.

Digitized by Google

G. Eigengewichte eiserner

Nr.	Spannweite	Ständige Belastung $g = \alpha l + F$				Eisengewicht						
				F		der beiden Hauptträger		Querverbände		Fahrbahntafel		Auflagerteile
	l	g	α	Längs- u. Querträger	Fahrbahn[1])	im ganzen	v. H.	im ganzen	v. H.	im ganzen	v. H.	
	m	kg		kg	kg	kg		kg		kg		
1	2,67	765	123,2	—	486	648	73,5	233	26,5	—	—	290
2	3,85	859	96,4	—	488	1085	72,5	405	27,5	—	—	235
3	5,00	885	85,8	—	456	1721	80	425	20	—	—	409
4	6,91	965	73,6	—	456	2860	81	658	19	—	—	565
5	9,14	1028	62,1	—	456	4180	81	1010	19	—	—	619
6	11,48	1148	60,3	—	456	6240	78,5	1720	21,5	—	—	612
7	14,85	1161	46,8	—	456	8200	79,5	2130	20,5	—	—	646
8	18,56	1221	39,0	—	498	11618	87	1830	13	—	—	1682
9	19,51	1689	56,7	46	518	19582	85	2473	11	900	4	2509
10	22,8	1661	49,6	33	497	21924	82	3849	14	755	2	2162
11	26,6	1764	46,6	35	485	29025	85	4008	11	940	4	2854
12	27,02	1720	42,6	69	500	28313	85	2899	8,5	1890	6,5	2080
13	33,14	1932	41,9	42	500	42948	90	3120	6,5	1412	2,5	3098
14	55,25	3121	39,6	420	523	109400	76	10800	8	28200	16	7865
15	65,43	4552	41,9[2])	806[2])	1005[2])	159892	69	19541	9	52743	22	11679
16	87,5	4290	36,2	648	475	242736[3])	78	34438	10	56736	17	10109

Eisen für Befestigung der Querschwellen.

[1]) Die Fahrbahn besteht aus den Schienen und Leitschienen, der Befestigung
[2]) Gewicht verhältnismäßig hoch, weil Brücke während der Zugpausen von
[3]) Infolge nicht ganz gelungener Querschnittsbildung der Druckstäbe ist das

Digitized by Google

Eisenbahnbrücken nach *Paton*.

des gesamten Eisens		Zugelassene Hauptspannung	Angaben über den Hauptträger h = Höhe			Hauptträger-entfernung	Fahrbahntafel	Verbände
	auf 1 m		Form des Trägers	$\frac{l}{h}$	Feld-weite λ			
kg	kg	$\sigma \frac{kg}{cm^2}$						
1171	439	706		7,12	—	1,83	Hölzerne Querschwellen auf den Hauptträgern liegend.	Obere und untere wagerechte Verbände und lotrechte Querverbände.
1675	432	708		6,47	—	1,83		
2555	511	710		8,13	—	1,83		
4078	590	714		8,00	—	1,83		
5809	637	718		8,18	—	1,83		
8572	746	723		9,42	—	1,83		
10976	738	727		9,78	—	1,98		
15130	816	736		10,7	—	1,98		
25464	1300	714		7,89	1,22	1,83		
28690	1255	745		8,6	1,43	2,44		
36827	1390	753		8,87	1,50	2,28		
35182	1300	754		8	1,93	2,13		
50578	1530	766		8	1,88	2,13		
151265	2740	785		8	3,45	2,72	Eiserne Quer- und Längsträger. Hölzerne Querschwellen.	
243855	3725	806		7,16	4,67	4,87		
344019	3930	850		7	6,25	4,25		

Fig. 562—570.

des Belags und den Querschwellen.
Fuhrwerken befahren wird.
Gewicht zu hoch ausgefallen.

Digitized by Google

Nr.	Spannweite	Ständige Belastung $g = \alpha l + F$				Eisengewicht						
				F		der beiden Hauptträger		Querverbände		Fahrbahntafel		Auflagerteile
	l	g	α	Längs- u. Querträger	Fahrbahn[1]	im ganzen	v. H.	im ganzen	v. H.	im ganzen	v. H.	
	m	kg		kg	kg	kg		kg		kg		
17	13,58	2106	50,0	882	565	8507	40	715	3	11979	57	997
18	17,88	2104	48,8	666	565	14909	54	700	3	11908	43	1525
19	22,86	2151	43,8	656	516	21130	58	804	2	14676	40	1826
20	22,8	1957	37,9	591	502	18655	56	1055	3	13474	41	1517
21	33,14	2490	38,6	695	516	40966	63	1440	3	23030	36	3751
22	44,5	2875	41,1	541	505	75603	72	5872	6	24069	22	5100
23	55,06	3097	36,0	618	505	99159	70	9854	7	33782	23	6241
24	66,14	3392	34,4	623	492	134462	70	16373	8	41155	22	8780
25	78,0	3698	33,1	653	464	180131	72	21055	8	50909	20	9189
26	98,0	4388	31,3	818	508	270397	72	30287	8	80019	20	13145
27	109,2	4678	31,8[2]	770	436	342762	74	36354	8	84122	18	13492
28	126,8	4993	29,8	788	436	423816	73	52606	9	102702	18	17656

[1]) Die Fahrbahn besteht aus den Schienen und Leitschienen, der Befestigung des
[2]) Der Träger ist verhältnismäßig schwer, weil zwei Gehwege vorhanden sind.

Digitized by Google

des gesamten Eisens		Zugelassene Hauptspannung	Angaben über den Hauptträger h = Höhe			Hauptträger-entfernung	Fahrbahntafel	Verbände
kg	auf 1 m kg	$\sigma \frac{kg}{cm^2}$	Form des Trägers	$\frac{l}{h}$	Feld-weite λ			
22198	1635	726		10	2,13	5,18	Eiserne Quer- und Längsträger. Hölzerne Querschwellen.	Offene Brücken, nur mit unterem wagerechten Verbande.
29042	1624	772		7,9	2,24	5,23		
38437	1719	789		7,85	2,85	5,23		
34701	1522	766		6,41	3,8	5,4		
69187	2087	766		9,06	3,66	5,29		
110645	2486	789		6,44	4,47	5,48		
149086	2706	810		7,42	4,57	5,49		
200770	3034	832		6,58	4,72	5,58		
261284	3349	856		7,11	4,88	5,58		
393848	4018	896		6,53	7,00	6,00	Eiserne Quer- und Längsträger. Eiserne Querschwellen.	Geschlossene Brücken mit oberem und unterem Windverbande und Querversteifungen oberhalb der Ladehöhe.
476730	4365	918		6,74	7,8	6,0		
596780	4706	953		6,71	7,93	6,1		

Fig. 571 – 582.

Belags und den Querschwellen.

Digitized by Google

VI.

Eiserne Straßenbrücken.

1. Eigengewichte von Straßenbrücken mit Balkenträgern.*)

Nach der Stärke des aufzunehmenden Verkehrs kann man leichte Landstraßenbrücken und schwere Stadtstraßenbrücken unterscheiden.

Landstraßenbrücken mit doppeltem Bohlenbelage.

Das gesamte Eisengewicht der *Fahrbahn* einschl. der Hauptträger ist:

$$g = 105 + 2{,}3\,l + 0{,}02\,l^2 \text{ kg/qm}.$$

Gewicht des Bohlenbelages (160 *mm* stark) $= 110$ kg/qm.

Finden sich außerhalb der Hauptträger noch besondere, mit Holz bedeckte *Fußwege*, so entspricht diesen ein Eisengewicht (einschl. der erforderlichen Verstärkung der Hauptträger, aber ausschl. der Geländer) von:

$$g' = 60 + 2{,}3\,l \text{ kg/qm}.$$

Landstraßenbrücken mit Beschotterung.

Eisengewicht, ausschl. des Gewichtes der Belageisen:

$$g = 125 + 2{,}8\,l + 0{,}025\,l^2 \text{ kg/qm}.$$

Für Belageisen sind 65 kg/qm und für Schotter 400 kg/qm hinzuzurechnen. Eisengewicht g' außenliegender Fußwege wie vorhin:

$$g' = 60 + 2{,}3\,l \text{ kg/qm}.$$

Stadtstraßenbrücken mit doppeltem Bohlenbelage.

$$g = 155 + 2{,}7\,l + 0{,}021\,l^2 \text{ kg/qm}; \quad g' = 80 + 2{,}7\,l \text{ kg/qm}.$$

Gewicht des Bohlenbelages (200 *mm* stark) $= 140$ kg/qm.

Stadtstraßenbrücken mit Beschotterung.

$$g = 170 + 3{,}2\,l + 0{,}028\,l^2 \text{ kg/qm}; \quad g' = 80 + 2{,}7\,l \text{ kg/qm}.$$

Gewicht des Schotters $= 480$ kg/qm; Gewicht der Belageisen $= 80$ kg/qm.

Stadtstraßenbrücken mit Pflasterung.

$$g = 180 + 3{,}7\,l + 0{,}029\,l^2 \text{ kg/qm}; \quad g' = 80 + 2{,}7\,l \text{ kg/qm}.$$

Gewicht der Pflasterung $= 700$ kg/qm; Gewicht der Belageisen $= 80$ kg/qm; Gewicht der Buckelplatten (8 *mm* stark) $= 65$ kg/qm.

2. Eigengewichte von Straßenbrücken mit Bogenträgern.**)

Das Gewicht der *Hauptträger* (einschl. der Wind- und Querkreuze) ist für 1 lfd. *m* Stützweite (für Bögen mit zwei Gelenken):

$$g = \gamma b + 35\,z \text{ in } kg,$$

worin: b die Breite der Brücke in *m*,
z die Anzahl der Hauptträger und
γ der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen ist.

*) Nach Engesser, Zeitschr. f. Baukunde 1881, S. 66.

**) Nach Engesser, Theorie und Berechnung der Bogenfachwerkträger ohne Scheitelgelenk, Berlin 1880.

Digitized by Google

Stützweite l in m =	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Fahrbahn mit Beschotterung; γ =	32	62	94	129	168	209	255	300	350	410
Fahrbahn mit doppeltem Bohlenbelage; γ =	28	53	80	110	144	180	220	260	305	355

Für Bogenträger mit drei Gelenken darf man die vorstehenden Zahlenwerte um 15% vermindern.

3. Verkehrslasten der Straßenbrücken.

Die Verkehrslast besteht aus der Belastung durch Menschen und Fuhrwerke. Für die Hauptträger bei Brücken bis etwa 30 m Spannweite wirken die größten Radlasten in der Regel ungünstiger als Menschengedränge (s. unten). Es genügt dann, für *Landstraßenbrücken* Wagen mit 3,0 bis 3,5 m Radstand und (je nach der Bedeutung der Straße) 3 bis 6 t Achsbelastung anzunehmen, ferner, vergleichsweise, eine 6 t schwere Chausseewalze.

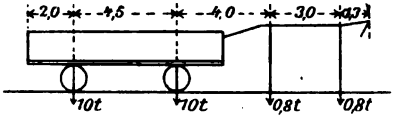


Fig. 583.

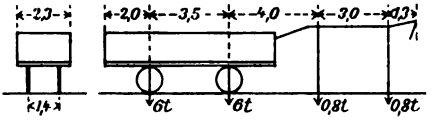


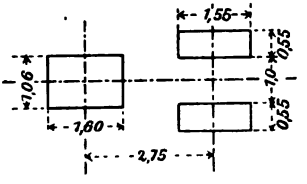
Fig. 584.

Stadtstraßenbrücken berechnet man unter der Annahme der Belastung durch einen zweiachsigen Wagen mit je 10 t (bis 12 t) Achsdruck und mit 4,5 m Radstand (vergl. Fig. 583). In besonderen Fällen ist die Last der Dampfwalze, 10 t für das Vorderrad, 13 t für die Hinterräder zusammen, einzuführen (Fig. 585). Der übrige Teil der Fahrbahntafel wird mit leichteren, zweiachsigen Wagen von je 6 t Achsdruck und 3,5 m Radstand (vergl. Fig. 584) und mit Menschengedränge belastet gedacht.

Die Hauptträger von Straßenbrücken größerer Spannweite werden gewöhnlich für Belastung durch Menschengedränge berechnet.

Dampfwalze.

Last des Vorderrades 10 t.



Last der beiden Hinterräder zusammen 13 t.

Fig. 585.

Für die Berechnung der Fahrbahn sind in jedem Falle die ungünstiger wirkenden Einzellasten einzuführen.

Für *Menschengedränge* rechnet man durchschnittlich (fünf bis sechs Menschen auf 1 qm) $p_m = 400\ ^{kg}/_{qm}$. Bei Lage der Brücken in einem Dorfe p_m vielleicht nur 300, in Städten besser $500\ ^{kg}/_{qm}$.

Digitized by Google

Literatur zu den Abschnitten I, II und III.

1. **C. Culmann,** *Die graphische Statik.* Die erste Auflage dieses grundlegenden Werkes des Begründers der Graphischen Statik erschien 1864, die zweite 1875.
2. **O. Mohr,** *Über die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen*, Zivilingenieur 1887, S. 43. Diese Abhandlung enthält u. a. die in No. 34 des vorliegenden Buches mitgeteilte graphische Darstellung der Trägheitsmomente mit Hilfe eines Kreises vom Durchmesser $J_{max} + J_{min}$. In der zweiten Auflage benutzte ich einen Kreis vom Durchmesser $J_{max} - J_{min}$, der aber bei geringem Unterschiede der beiden Grenzwerte weniger bequem ist wie der von Mohr eingeführte Kreis. Dagegen habe ich an dem in meiner früheren Darstellung befolgten Verfahren, den Kreis durch zwei Trägheitsmomente und ein Zentrifugalmoment zu bestimmen, festgehalten.
3. **R. Land,** *Über die Berechnung und die bildliche Darstellung von Trägheitsmomenten und Zentrifugalmomenten ebener Massenfiguren,* Zivilingenieur 1888, S. 123 u. Zeitschr. f. Bauwesen, 1892, S. 550. Es wird der von Mohr eingeführte Kreis benutzt und als drittes Bestimmungsstück (in Übereinstimmung mit der zweiten Auflage meiner Graphischen Statik) ein Zentrifugalmoment gewählt. Ich hebe dies nur deshalb hervor, weil im Taschenbuch der *Hütte* 1899, Teil I, S. 180 steht: *Der Trägheitskreis nach Mohr-Land,* während es nur heißen darf *nach Mohr.*
4. **W. Ritter,** *Eine neue Festigkeitsformel,* Zivilingenieur 1876, S. 309. Zeigt die Berechnung der Spannungen σ mit Hilfe des Kerns.
5. **W. Keck,** *Exzentrische Druckbelastung eines zylindrischen Mauerwerkkörpers außerhalb des Kerns,* Zeitschr. des Arch. u. Ing. Vereins in Hannover 1882, S. 301 und *Exzentrische Druckbelastung außerhalb des Kerns bei Mauerwerkskörpern von ringförmigem Querschnitte,* dieselbe Zeitschrift, 1882, S. 627. Enthält u. a. wertvolle Formeln und Tabelen zur Berechnung von Schornsteinen auf Winddruck.
6. **O. Mohr,** *Über die Verteilung der exzentrischen Druckbelastung eines Mauerwerkkörpers,* Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Vereins in Hannover, 1883, S. 163. Gibt die auf Seite 87, Fig. 82 mitgeteilte Konstruktion der Nulllinie an.
7. **Hüppner,** *Zur Ermittelung der Druckverteilung in Mauerwerksquerschnitten,* Zivilingenieur, 1885, S. 39. Behandelt zum ersten Male den Fall eines nicht in einer Symmetrieachse liegenden Angriffspunktes.

Digitized by Google

8. **F. Heinemann,** *Exzentrische Druckbelastung außerhalb des Kerns bei Mauerwerkskörpern ringförmigen Querschnitts,* Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Vereins in Hannover, 1891. Erweiterung der Keckschen Tabellen.

9. **A. Meyerhof,** *Die Biegungsspannungen der Z-Eisen zu Schiffbauzwecken,* Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing., 1899, S. 607.

10. **W. Ritter,** *Anwendungen der Graphischen Statik,* Teil I, 1888, Teil II, 1890.

Literatur zu den Abschnitten IV bis XIII.

1. **Aug. Ritter,** *Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen,* Hannover 1868. 6. Auflage, Leipzig 1904. Untersuchung des einfachen Dreiecksystems mit Hilfe von Momentengleichungen.

2. **C. Culmann,** *Die graphische Statik,* 1864, 1875. Behandlung des einfachen Dreiecksystems mittels der Zerlegung einer Kraft nach drei Richtungen.

3. **J. Clark Maxwell,** *On the application of the theory of reciprocal polar figures to the construction of diagrams of forces.* Engineer, Vol. 24, S. 402. Hier wird zum ersten Male die Konstruktion reziproker Kräftepläne für Fachwerke mit konstanter Belastung gezeigt. Allgemeinere Untersuchungen hat Maxwell niedergelegt in der Abhandlung: *On reciprocal figures and diagrams of forces.* Philosophical Magazine, April 1864, S. 250.

4. **L. Cremona,** *Le figure reciproche nella Statica Grafica.* Milano, J. Giugno, 1872. Die Untersuchungen von Cremona sind viel allgemeiner gehalten als die von Maxwell.

5. **E. Winkler,** *Vortrag über die Berechnung von Bogenbrücken.* Mitteil. d. Archit. u. Ing. Vereins für Böhmen, 1868. In dieser Arbeit wurden zum ersten male Einflußlinien benutzt. Die allgemeine Bedeutung dieses Verfahrens hatte *Winkler* aber damals noch nicht erkannt, was daraus hervorgeht, daß er in der ersten Auflage des unter 6 angeführten Werkes die statisch bestimmten Träger ohne Einflußlinien behandelte.

6. **E. Winkler,** *Theorie der Brücken,* Heft I: *Äußere Kräfte der Balkenträger,* Heft II: *Innere Kräfte der Balkenträger,* Wien, 1873—1886.

7. **O. Mohr,** *Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkträger,* Zeitschrift des Architekt. u. Ing. Vereins in Hannover, 1874, S. 223. Enthält in Form einer Anmerkung ein beachtenswertes Verfahren zur graphischen Berechnung des Fachwerkbalkens.

8. **Fränkel,** *Über die ungünstigste Einstellung eines Systems von Einzellasten auf Fachwerkträgern mit Hilfe von Influenzkurven.* Civilingenieur, 1876.

9. **H. Müller-Breslau,** *Abschnitt über die Berechnung des Fachwerks im Taschenbuch der Hütte.* 11. Auflage, 1877. Enthält die erste Arbeit des Verfassers über Einflußlinien. Der fragliche Abschnitt befand sich bereits 1875 in den Händen der Taschenbuchkommission.

10. **H. Zimmermann,** *Das Momentenschema,* Zeitschr. d. Architekt. u. Ing. Vereins in Hannover 1877, S. 61. Aufstellung von Tabellen zur Erleichterung der Berechnung der Eisenbahnbrücken für Einzellasten.

Digitized by Google

11. **H. Müller-Breslau,** *Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken.* Berlin 1880. Die dort gegebene Darstellung der Einflußlinien stammt ebenfalls aus dem Jahre 1875 und wurde vor der Veröffentlichung vom Verfasser in seinen damals gehaltenen Privatvorlesungen benutzt*).

12. **A. Foeppl,** *Theorie des Fachwerks,* Leipzig 1880. Enthält eine Reihe grundlegender Untersuchungen.

13. **L. Henneberg,** *Statik der starren Systeme,* Darmstadt 1886.

14. **Grübler,** *Beitrag zur Theorie des ebenen einfachen Fachwerks,* Rigasche Industrie-Zeitung 1887. Behandelt die Frage der Starrheit eines Fachwerks mit Hilfe der Polbestimmungen für kinematische Ketten.

15. **H. Müller-Breslau,** *Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerks,* Schweiz. Bauzeitung 1887, Mai S. 121, und Nov. S. 129. Entwicklung der kinematischen Theorie des Fachwerks sowohl mit Hilfe der Figur F' als auch mittels der augenblicklichen Drehpunkte der Glieder kinematischer Ketten. Hinweis auf die *Williot*sche Darstellungsweise der Verrückungen der Knotenpunkte eines elastischen Fachwerks**).

16. **O. Mohr,** *Über Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne kinematischer Ketten,* Zivilingenieur 1887. Anwendung des *Williot*schen Verfahrens auf die Darstellung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen kinematischer Ketten.

17. **R. Land,** *Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger,* Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Vereins 1888, S. 11 u. 162. Stützt sich hauptsächlich auf die Anwendung der *Williot*schen Darstellungsweise, benutzt aber auch Polbestimmungen.

18. **F. Schur,** *Über ebene einfache Fachwerke,* Mathematische Annalen 1897, S. 142. Knüpft an meine unter 11 aufgeführte kinematische Theorie des Fachwerks an. Wenn Schur die Einführung eines einzigen Momentenpunktes als ein neues Verfahren hinstellt, so beruht dies wohl auf Übersehen meiner späteren Arbeiten (vergl. u. a. Zentralblatt d. Bauverwaltung 1892, S. 246).

19. **G. Mehrtens,** *Statisch bestimmte mehrteilige Wandgliederung der Gitterträger,* Zeitschr. f. Architektur u. Ingenieurwesen, Wochenausgabe, 1898, S. 329. Vergl. die Anmerkung auf Seite 533 des vorliegenden Buches.

20. **Landsberg,** *Statik der Hochbaukonstr.* Handbuch der Architektur, I. Teil. 2. Aufl. 1899.

21. **W. Dietz,** *Beitrag zum statisch bestimmten gegliederten Balkenträger mit zweifachem Ausfüllsystem,* Zeitschr. d. Vereins Deutscher Ingenieure 1899, S. 230. Enthält eine beachtenswerte vergleichende Untersuchung verschiedener Doppelfachwerke.

22. **Schlink,** *Stabilitäts- und Spannungsuntersuchungen von Fachwerksträgern.* Zeitschr. für Architekt. u. Ingenieurwesen, 1903, S. 397.

*) Die in diesem Buche und in meiner Graphischen Statik mitgeteilten Verfahren zur Darstellung der Einflußlinien statisch bestimmter Träger hat Herr *Mehrtens* in seinen kürzlich erschienenen Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen ohne Angabe der Quelle benutzt, desgleichen meine kinematischen Beiträge zur Berechnung statisch bestimmter Systeme und noch manches andere. Der große Umfang dieser Entlehnungen zwingt mich zu dieser Feststellung.

**) Vergl. Abschnitt I, § 1 der ersten Abteilung des II. Bandes.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Empfehlenswerte Werke
aus dem Gebiete der Technologie und Ingenieur-Wissenschaften sowie verwandter Disziplinen.

Alfred Kröner Verlag in Stuttgart.

Autenheimer, Friedrich, Aufgaben über mechanische Arbeit, für Gewerbeschulen und angehende Techniker elementar bearbeitet. Mit 26 Abbildungen im Text. Preis geheftet 1 M. 25 Pf.

Bach, Dr. C., Die Maschinen-Elemente. Ihre Berechnung und Konstruktion mit Rücksicht auf die neueren Versuche. 9. vermehrte Aufl. 2 Bände. Mit in den Text gedruckten Abbildungen, 3 Lichtdrucktafeln und 59 Tafeln Zeichnungen. Preis geh. 32 M. In Halbfranz geb. 38 M.

— **Abhandlungen und Berichte.** Mit zahlreichen Abbildungen im Text und 14 Tafeln. Preis kartoniert 18 Mark.

— **Die Konstruktion der Feuerspritzen.** Mit einem Anhange: Die allgemeinen Grundlagen für die Konstruktion der Kolbenpumpen. Mit 94 Abbildungen im Text und 36 Tafeln Zeichnungen. Preis geh. 16 Mark.

Berg, H., Handbuch des Maschinentechnikers. Bernoullis Vademecum des Mechanikers. 23. Auflage. Nachschlagebuch für Techniker, Gewerbetreibende und technische Lehranstalten. Mit zahlreichen Abbildungen im Text. In Leinwand gebunden Preis 6 Mark.

Bermbach, Dr. W., und **C. Müller, Elektrizitätswerke, elektrische Beleuchtung und elektrische Kraftübertragung.** Gemeinverständliche Darstellung. Dritte, umgearbeitete u. stark verm. Aufl. Mit 267 Abbild. im Text. Preis geh. 7 M. In Leinwand geb. 8 M.

Bernoullis Dampfmaschinenlehre. Handbuch zum Gebrauche in der Praxis und zum Selbstunterricht für angehende Ingenieure, sowie für den Unterricht an technischen Lehranstalten. 8. Auflage. Neu bearbeitet und vermehrt von **Fr. Freytag.** Mit 396 Abbildungen im Text und 7 Tafeln. Preis geheftet 14 Mark. In Leinwand gebunden 15 Mark.

Braulik, Aug., Altägyptische Gewebe. Unter Zugrundelegung einer reichhaltigen Sammlung fachlich untersucht und besprochen. Mit 126 Originalabbildungen im Text. Preis geheftet 4 Mark.

Brüggemann, H., Theorie u. Praxis der rationellen Spinnerei.

I. Die nötigen Eigenschaften der Gespinste und deren Prüfung. Mit einem Atlas von 7 Tafeln. Preis geheftet 7 Mark.

II. Allgemeines über Faserbearbeitung und eingehendes Studium des zur Spinnerei nötigen Streckens der Fasermassen. Mit einem Atlas von 24 Tafeln. Preis geheftet 15 Mark.

III. Nitscheln und Draht und ihre mechan. Hilfsmittel. Erster Teil. Mit einem Atlas von 37 Tafeln. Preis geheftet 24 Mark.

Bujard, Dr. Alfons, Leitfaden der Pyrotechnik. Einführung in die Chemie der wichtigsten Rohmaterialien und Sprengstoffe der Kunstfeuerwerkerei nebst Besprechung der einschlägigen Polizei- und Eisenbahnverkehrsverordnungen. Mit in den Text gedruckten Abbildungen. Preis geheftet 6 Mark. In Leinwand gebunden 7 Mark.

Digitized by Google

Cremona, L., Elemente der projektivischen Geometrie. Unter Mitwirkung des Verfassers übertragen von **Fr. R. Trautvetter.** Mit 214 Figuren im Text. Preis geheftet 5 Mark.

Enßlin, Dr. M., Mehrmals gelagerte Kurbelwellen mit einfacher und doppelter Kröpfung. Ihre Formänderung und Anstrengung. Mit 74 Abbildungen im Text. Preis geheftet 6 Mark.

Fischer, Dr. Ferd., Taschenbuch für Feuerungstechniker. Anleitung zur Untersuchung und Beurteilung von Brennstoffen und Feuerungsanlagen. 5. Aufl. Mit zahlr. Abbild. im Text. In Leinwand geb. Preis 3 Mk.

Gentsch, Wilhelm, Gasglühlicht. Dessen Geschichte, Wesen und Wirkung. Für Erfinder, Fabrikanten und Konsumenten bearbeitet. Mit 68 Abbildungen im Text. Preis geheftet 2 Mark 40 Pf.

— **Sicherheits- und Rettungswesen auf See.** Mit einem Anhang: Gesetzliche Bestimmungen. Mit 253 Abbild. im Text. Preis geh. 6 Mark.

Haußner, A., Der Holländer. Eine kritische Betrachtung seiner Arbeitsweise mit Bezug auf die Einzelabmessungen seiner Teile und die verarbeiteten Fasern. Mit 38 Abbildungen im Text. Preis geheftet 4 Mark.

Heinzerling, Dr. Chr., Schlagwetter und Sicherheitslampen. Entstehung und Erkennung der schlagenden Wetter und Konstruktion der wichtigeren Typen der Sicherheitslampen. Mit 119 Abbildungen im Text. Preis geheftet 8 Mark.

Hentschel, Fr. M., Praktisches Lehrbuch der Kammgarnspinnerei zum Selbstunterricht für Spinnereitechniker, Werkführer und vorwärtsstrebende Arbeiter. 2. Auflage. Mit 96 Abbildungen im Text und vielen Tabellen. Preis geheftet 7 Mark. In Leinwand gebunden 8 Mark.

Hering, C. A., Die Verdichtung des Hüttenrauchs. Eine gedrängte Übersicht über alle bekannt gewordenen Vorrichtungen und Verfahren zum Auffangen des Flugstaubes und zur Beseitigung des schädlichen Einflusses desselben, sowie der sauren Gase, welche im Hüttenrauche enthalten sind. Mit 86 Figuren auf 13 Tafeln. Preis geheftet 5 Mark.

Klasen, L., Handbuch der Fundierungsmethoden im Hochbau, Brückenbau und Wasserbau. 2. Auflage. Mit 580 Abbildungen im Text. Preis geheftet 15 Mark. In Halbfranz gebunden 17 Mark.

Knoll, C., Taschenbuch zum Abstecken der Kurven an Straßen und Eisenbahnen. 2. Auflage. Neu bearbeitet von **W. Weltbrecht.** Mit 41 Figuren u. 10 Zahlentafeln. In Leinwand gebunden Preis 3 Mark.

Lauenstein, R., Die Festigkeitslehre. Elementares Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht, sowie zum Gebrauch in der Praxis, nebst einem Anhang, enthaltend Tabellen der Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge und Kreisinhalte. 8. Auflage. Mit 123 Abbildungen im Text. Preis geheftet 4 Mark 40 Pf. In Leinwand gebunden 5 Mark.

— **Die graphische Statik.** Elementares Lehrbuch für technische Unterrichtsanstalten und zum Gebrauch in der Praxis. 8. Aufl. Mit 285 Abbildungen im Text. Preis geh. 5 Mark 40 Pf. In Leinwand geb. 6 M.

— **Die Mechanik.** Elementares Lehrbuch für technische Mittelschulen und zum Selbstunterricht. 6. Auflage. Mit 215 Abbildungen im Text. Preis geheftet 4 Mark 40 Pf. In Leinwand gebunden 5 Mark.

Digitized by Google

Lauenstein, R., Die Eisenkonstruktionen des einfachen Hochbaues. Für den Schul- u. Selbstunterricht sowie z. Gebrauch in der Praxis.

Erster Teil: **Material und Konstruktionselemente.** 3. Aufl. Mit 201 Abbild. im Text. Preis geh. 3 Mark. In Leinwand geb. 3 M. 60 Pf.

Zweiter Teil: **Anwendung und Ausführung der Konstruktionen.** 3. Auflage. Mit 362 Abbildungen im Text. Preis geheftet 4 M. 40 Pf. In Leinwand gebunden 5 Mark.

Lew, Dr. Ignatz, Die Feuerungen mit flüssigen Brennmaterialien. Mit Abbildungen im Text u. 7 lithogr. Tafeln. Preis kart. 5 Mark.

Mayer, Robert, Die Mechanik der Wärme in gesammelten Schriften. Dritte ergänzte und mit historisch-literarischen Mitteilungen versehene Auflage. Herausgegeben von **Dr. Jacob J. Weyrauch.** Mit Porträt. Preis geheftet 10 Mark.

— **Kleinere Schriften und Briefe.** Nebst Mitteilungen aus seinem Leben. Herausgegeben von **Dr. Jacob J. Weyrauch.** Mit 2 Abbildungen und Porträt. Preis geheftet 10 Mark.

Mühlhäuser, Dr. Otto, Die Technik der Rosanilinfarbstoffe, entwicklungsgeschichtlich dargestellt und für Praxis und Wissenschaft bearbeitet. Mit 10 lithographierten Tafeln. In Leinwand geb. 6 Mark.

Müller-Breslau, Dr. Heinrich, Die graphische Statik der Baukonstruktionen.

Band I: Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in der Ebene. Trägheitsmomente u. Zentrifugalmomente ebener Querschnitte. Spannungen in geraden Stäben. Theorie der statisch bestimmten Träger mit Ausschluß der Untersuchung der Formänderungen. 4. Auflage. Mit 585 Abbildungen im Text und 7 Tafeln. Preis geh. 18 Mark. In Halbfranz geb. 20 Mark.

Band II, Abt. 1: Formänderung ebener Fachwerke. Das ebene statisch bestimmte Fachwerk. 3. Auflage. Mit 436 Abbildungen im Text und 7 Tafeln. Preis geheftet 16 Mark. In Halbfranz geb. 18 Mark.

Band II, Abt. 2, Lieferung 1: Formveränderung des geraden Stabes. Der Balken auf mehreren Stützen. Mit 110 Abbildungen im Text und 2 Tafeln. Preis geheftet 3 Mark.

— **Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen.** 3. Auflage. Mit 259 Abbildungen im Text. Preis geheftet 8 Mark. In Halbfranz gebunden 10 Mark.

Nördlinger, Dr. H., Querschnitte von hundert Holzarten. Zur Belehrung f. Forstleute, Landwirte, Botaniker u. Holztechnologen. 11 Bände, jeder Band 100, teils europäische, teils ausländische Holzarten enthaltend. Jeder Band mit beschreibendem Text, in Karton. Preis je 14 Mark.

Pregél, Th., „Neuere Werkzeugmaschinen für die Metallbearbeitung." **Fräse- und Schleifmaschinen.** Ein Handbuch für Maschinenbauer, Gewerbtreibende, Techniker und Studierende. Mit 520 Abbildungen im Text. Preis geheftet 6 Mark.

— **Drehbänke,** sowie Maschinen zum Drehen, Bohren und Gewindeschneiden. Ein Handbuch für Maschinenbauer, Gewerbtreibende, Techniker und Studierende. Mit 820 Abbildungen im Text. Preis geh. 10 Mark.

Digitized by Google

Reinert, E., Die modernen Dampfkesselanlagen. Deren Einrichtung und Betrieb. Ein Hand- und Nachschlagebuch für Industrielle, Studierende und Ingenieure. Mit 150 Abbildungen im Text.
Preis geheftet 6 Mark. In Leinwand gebunden 8 Mark.

Reye, Dr. Th., Die Geometrie der Lage.
Abteilung I. 4. Auflage. Mit 90 Abbildungen im Text.
Preis geheftet 8 Mark. In Halbfranz gebunden 10 Mark.
Abteilung II. 3. Auflage. Mit 26 Abbildungen im Text.
Preis geheftet 9 Mark. In Halbfranz gebunden 11 Mark.
Abteilung III. 3. Aufl. Preis geh. 6 Mark. In Halbfranz geb. 8 Mark.

Ritter, Dr. August, Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Konstruktionen. 6. Auflage. Mit 495 Abbild. im Text. Preis geh. 10 Mark. In Halbfranz geb. 12 Mark.

— **Lehrbuch der Analytischen Mechanik.** 3. Aufl. Mit 224 Abbildungen im Text. Preis geh. 8 Mark. In Halbfranz geb. 10 Mark.

— **Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik.** 3. Auflage. Mit 612 Abbildungen im Text. Preis geh. 16 Mark. In Halbfranz geb. 18 Mark.

— **Lehrbuch der Technischen Mechanik.** 8. Auflage. Mit 873 Abbildungen im Text. Preis geh. 20 Mark. In Halbfranz geb. 22 Mark.

Roser, Dr. E., Untersuchung des Grissongetriebes. Mit 53 Abbildungen im Text. Preis geheftet 3 Mark.

Saliger, Dr. Rudolf, Über die Festigkeit veränderlich elastischer Konstruktionen, insbesondere von Eisenbeton-Bauten. Mit 63 Abbildungen im Text und 5 Tafeln. Preis geheftet 4 Mark.

Sauerbeck, Dr. P., Lehrbuch der Stereometrie nebst zahlreichen Übungen und einem Abschnitt über Krystallographie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie für den Selbstunterricht. Mit 222 Abbildungen im Text. Preis geh. 5 M. 40 Pf. In Leinwand geb. 6 Mark.

Schinz, C., Studien über den Hohofen zur Darstellung von Roheisen. Preis geheftet 1 Mark 80 Pf.

Seelig, Dr. Eduard, Organische Reaktionen und Reagentien.
Preis geheftet 15 Mark.

Soxhlet, V. H., Die Färberei der Baumwolle mit direkt färbenden Farbstoffen. Ein praktisches Handbuch für Färber, Koloristen, Techniker und Chemiker. Mit 150 gefärbten Baumwollproben und 30 Abbildungen. Preis gebunden 15 Mark.

Uhlands Kalender für Maschinen-Ingenieure. Unter Mitwirkung bewährter Ingenieure herausgegeben von **Wilhelm Heinrich Uhland,** Civil-Ingenieur und Patentanwalt in Leipzig. Erscheint seit 1875 alljährlich im Herbst mit gegen 1000 Abbildungen. In 2 Teilen. Preis in Leinenband 3 Mark, in Lederband 4 Mark, in Brieftaschenlederband 5 Mark.

Weiske, Paul, Kerntheorie und Dachpfettenberechnung nebst einigen weiteren Kapiteln aus der Festigkeitslehre und einem Anhang: Anwendung der Trägheitskreise. Mit 104 Abbildungen im Text.
Preis geheftet 3 Mark. In Leinwand gebunden 3 Mark 60 Pf.

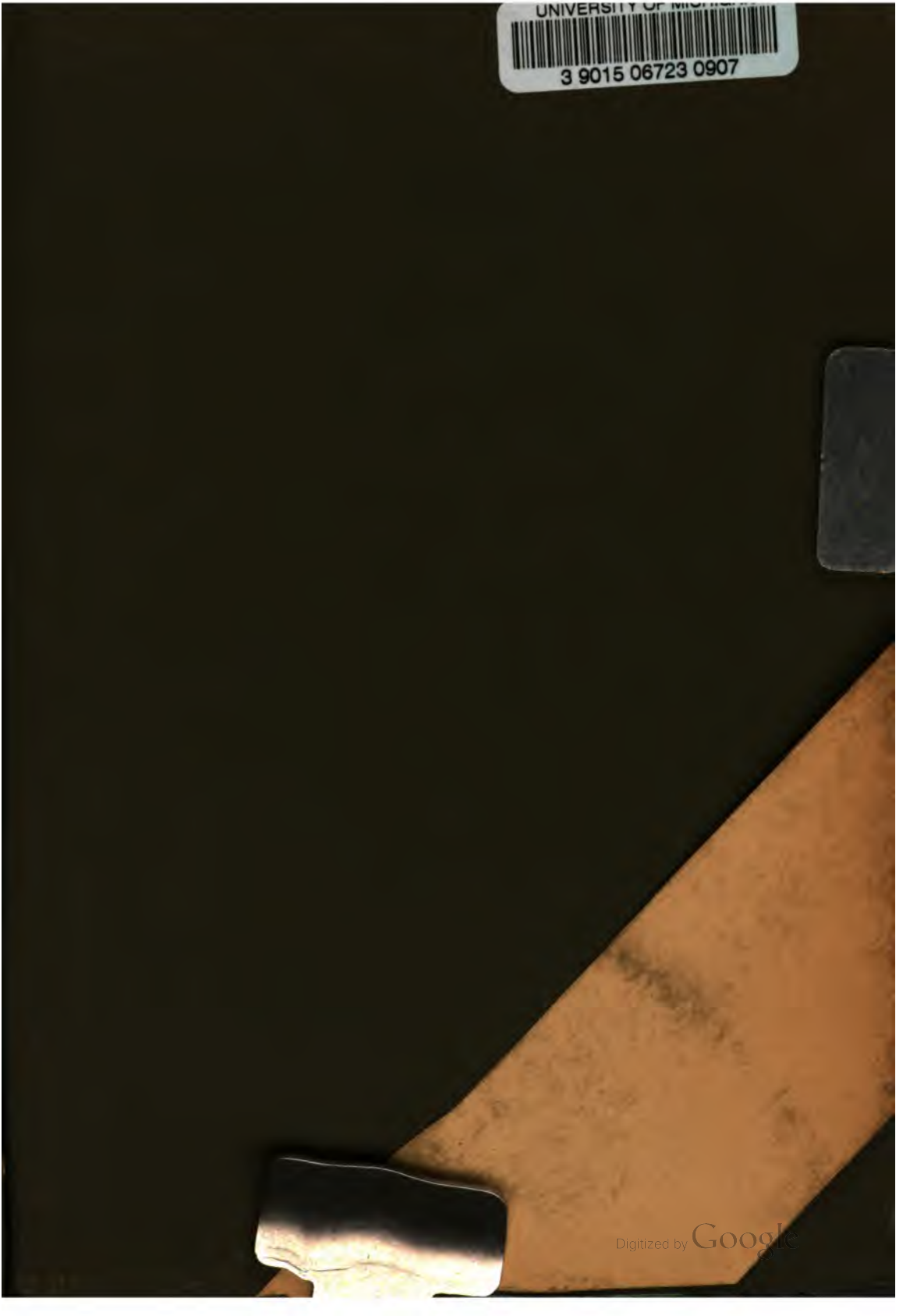
Zu beziehen durch die meisten Buchhandlungen.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06723 0907



Digitized by Google

Digitized by Google